Princeton, N. J., 16-~~2~~-62
32, Einstein Drive,

Cher Gaudin,

J'ai reçu votre "bonne année" il y a presque un mois, et quoiqu'il ~~soit~~ un peu tard, je vous souhaite une bonne année.

Voici un problème semblable à celui de Dyson. Démontrer ~~que~~ l'égalité suivante:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} dx_1\cdots dx_n\, e^{-\sum_1^n x_i^2} \prod_{i<j} |x_i - x_j|^{\beta} = n!\, 2^{-\frac{1}{4}\beta n(n-1)} \frac{\pi^{n/2}}{\{\Gamma(\frac{1}{2}\beta)\}^n} \prod_{j=1}^{n} \Gamma(\tfrac{1}{2}\beta j)$$

où $\beta$ est un nombre réel positif quelconque. Pour le cas où $\beta = 2k$ est un nombre paire, cela revient à démontrer que la term constaste dans l'expression

$$\prod_{i<j}\left(\frac{d}{dx_i} - \frac{d}{dx_j}\right)^{2k} \left(\sum_1^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}kn(n-1)} \qquad (2)$$

est égal à $n!\, 2^{\frac{1}{2}kn(n-1)} \{\frac{1}{2}kn(n-1)\}!\, \{(k-1)!\}^{-n} \prod_{j=1}^{n} \Gamma(kj)$.

Comme vous le savez bien, ces choses-là sont facile à démontrer pour les cas $\beta = 1, 2$ et $4$. (et $n$ quelconque) et pour $n = 1, 2$ (et $\beta$ quelconque). Pour les autres cas particuliers comme $n = 3$, $\beta = 3, 5, 6, \ldots$ j'ai verifié que cela est encore vrai et je n'ai aucune doute dans la verité du resultat, mais je n'ai pas reussi no plus ~~pour de~~ dans le dernier mois pour donner une démonstration. Voulez-vous l'essayer?

Pour la demonstration du conjecture de Dyson comme vous le savez peut-être, les gens ont introduit les nouvelle variables $w_i = \prod_{k \neq i}^{n} \left(1 - \frac{z_i}{z_k}\right)$ et il arrivait que le Jacobien de la transformation est simple ~~$\frac{\partial(\log w \ldots)}{\partial(\log z_i)}$ ... $\frac{1}{w}$ ...~~

$$\frac{\partial(\log w_1, \ldots, \log w_{n-1}, \log z_n)}{\partial(\log z_1, \ldots\ldots, \log z_n)} = \frac{1}{w_n}$$ et l'intégrale $\oint \frac{dz_i}{z_i} \prod \left(1 - \frac{z_i}{z_k}\right)^{-a_i}$

se reduisait à l'intégrale $\oint \frac{dw_1 \ldots dw_{n-1}}{w_1 \ldots w_{n-1} [w_n]} \ldots$, mais comme $w_1 + \cdots + w_n = 1$, on peut faire l'intégrale assez facilement. Ça ~~peut~~ pourrait-être utile pour le cas ~~prec~~ plus haut.

Il est remarkable que seule les termes paires de ~~la~~ forme (2), ~~...~~ c'est à dire ayant ~~la f~~ l'allure $\left(\frac{d}{dx_1}\right)^{2a_1} \left(\frac{d}{dx_2}\right)^{2a_2} \cdots \left(\frac{d}{dx_n}\right)^{2a_n}$ contribuent, où $a_1, a_2, \ldots$ sont ~~les ou~~ des entieres ou nulles; et on peut éspérer de les separer des autres.

FIRST FOLD

Un problem ~~plus facile~~ analogue et peut-être plus facile serait de calculer

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-\sum_1^n x_i} \prod_{i<j} |x_i - x_j|^\beta \, dx_1 \ldots dx_n$$

Ici, aussi le calcule s'effectue immediatement pour les cas $\beta = 1, 2$, et 4.

M. L. Mehta
32, Einstein Drive
Princeton, N. J.
U.S.A.

PRINCETON, N.J. FEB 17 1962

US POSTAGE 11¢ AIR MAIL

Monsieur M. Gaudin,
Service Phys. Math.
Centre d'Etudes Nucléaires de
Saclay, Gif-sur-Yvette (S&O)
(FRANCE.)

AÉROGRAMME • PAR AVION

SECOND FOLD

Enfin, il semble que j'avais laissé mon livre "Asymptotic methods in analysis — N.G. de Bruijn" à Saclay. Il porte mon nom. Si vous le trouvez, serez bien gentile de me l'envoyez par poste.

Mes amitiés à Gillet, ~~...~~ Raynal (...), Jacob, Mahou, ... et tous les camarades.

Madan Lal Mehta

P.S.
Ecrivez temps-en-temps.

Delhi, le 18 Fevrier '65.

Mon cher Gaudin,

Bien reçu les volumes de Cartan et attends les "Seminaires Sophus Lie". Peut-être il t'aidera de savoir que ceux sont publiés par "Sécrétariat mathematique, 11 rue Pierre Curie, Paris ~~#~~ 5e" en 1955. Si je n'oublie pas, c'est l'Institute Henri Poincaré.

Je te remercie beaucoup et remercierai aussi pour le reste, des soins que tu m'a apporté. Je pense que tu a depensé jusqu'au maintenant environ 110 frs. (le prix 60 + ~~taxe~~ frais postale 50), et n'a reçu rien de ma part. Je le regrette; et tu le recevra bien tôt.

Je suis perdu completement dans Cartan. Le vocabulaire est changé. Mais j'essaie quand même. Rien de nouveaux.

T. S. V. P.

J'ai reçu une lettre de Roger après une attente ~~desespérée~~ desespérément longue. Tu sera bien aimable de lui montrer, ou plutôt couper cette partie et la donner, à Balian.

Cher Roger, Delhi, le 18 Fevrier 1965

Après une très longue attente j'ai cru que tu n'étais pas à Saclay, et j'avais écrit à Gaudin. Pour la thèse de Cartan, le meilleur sera de m'envoyer les changements seules, comme tu a écrit. Le livre serait inutile.

J'avais visité une fois l'observatoire de Meudon, mais connais peu de cette region.

Rien de neuf ici. J'apprends la theorie Cartan. Mon frère C.L. Mehta que tu a vu aux états-Unies va rentrer au mois de Mai, mais peut-être il ne passe pas par Paris.

Amicalement.

[illegible]

Paie mes ~~...~~ regardes les meilleurs vers monsieur Bloch, Messiah.

Amitiés à Des Cloizeaux, Stora, Froissart, Gillet, et les autres que je connaisse.

मदन लाल मेहता

First fold here

BY AIR MAIL

हवाई पत्र
AEROGRAMME
NO ENCLOSURES ALLOWED

S.P.T.

Monsieur M. Gaudin,
~~Service Physique Math.~~
C.E.N. de Saclay,
Gif-sur-Yvette, (S.&O.)
(France.)

INDIA POSTAGE 55 nP

Conn - 66

Third fold here

Sender's name and address :—
M.L. Mehta
Physics Dept.
Delhi University
Delhi-7
India

To open cut here

Second fold here

UNIVERSITY OF DELHI

PHONES 228993, 221421/32

DEPARTMENT OF PHYSICS & ASTROPHYSICS
UNIVERSITY OF DELHI
DELHI-7

21-10-1965

Ref. No.

Cher Gaudin,

En rentrant des (courtes) vacances j'ai eu tes deux lettres. Je te remercie des nouvelles du groupe, des critiques et des commentaires. Pour tes questions je n'ai presque pas de réponses, mais j'essai quand même.

1- Papier III J.M.P. $\underline{3}$ 1962. Section IV. J'ai aussi eu la doute quand je rédigais mon cours, et donc je ne l'ai pas inclu, ni la papier IV qui dependait ~~…~~ sur eq. (75). En ~~fait~~ effet j'obtiens un autre résultat:

$$\min_{\alpha} \sum_{j=1}^{N} \left| e^{i\theta_j} - e^{\frac{2\pi i j}{N} + i\alpha} \right|^2 = \min_{\alpha} \sum_{j=1}^{N} \left| e^{i\varphi_j} - e^{i\alpha} \right|^2$$

où $\varphi_j = \theta_j - \frac{2\pi j}{N}$, est atteint quand

$$\cos\alpha \sum_{j=1}^{N} \sin\varphi_j = \sin\alpha \sum_{j=1}^{N} \cos\varphi_j$$

(On derive par rapport à $\alpha$, et l'égale à zéro pour un extrémum.) Le ~~max~~ minimum est donc atteint quand

$$e^{i\alpha} = \sum_{j=1}^{N} e^{i\varphi_j} \Big/ \left| \sum_{j=1}^{N} e^{i\varphi_j} \right|$$

(pour le maximum, il faut changer le signe).

Le min. est

$$\min_{\alpha}\sum_{j=1}^{N}\left|e^{i\theta_j}-e^{i\left(\frac{2\pi j}{N}+\alpha\right)}\right|^2 = 2N-2\left|\sum_{j=1}^{N}e^{i\theta_j-\frac{2\pi j}{N}i}\right|$$

et donc $$\Delta^2 = 2-\frac{2}{N}\left\langle\left|\sum_{j=1}^{N}e^{i\left(\theta_j-\frac{2\pi j}{N}\right)}\right|\right\rangle \text{ —— } (*)$$

~~La valeur moyenne est prise sur les angles ordonnés. [illegible]~~ Je ne sais pas comment on peut calculer la moyenne $(*)$ dessus dans le cas générale. Néanmoins, pour $N=2$ le calcule est simple et donne $2-\frac{\pi}{2}$. Et ce n'est pas égal à $1-\frac{1}{N^2}\left\langle\left|\sum e^{i\left(\theta_j-\frac{2\pi j}{N}\right)}\right|^2\right\rangle=\frac{1}{3}$ donné par Dyson. Il importe peu, si les valeurs moyennes sont prises sur les angles ordonnés ou pas.

J'écris à Dyson sur ce point. Voyons ce qu'il dit.

2. Papier V. J.M.P. 5, 1963. § c).

On a vérifié la conjecture pour $\beta=1,2,4$ et pour $n=1,2$, et peut-être 3 aussi. A part de ça je n'ai pas vérifié les autres cas des gaz.

La compressibilité est definie par la vitesse de son; ~~mais~~ il n'y a pas des déformations permanentes pour un gaz uncompressible, donc la vitesse de son ~~pour~~ devient infini quand la frequence → 0. ~~Ton gaz des particules~~ Mais pour un gaz donné, il est assez difficile d'employer ce critère. Ton gaz, où les particules s'interagissent par les fonctions δ placées au hazard, le gaz est compressible. Cela est peut-être évident intuitivement, mais la démonstration sera longue.

3. Pour ta remarque ironique du contraste entre ~~la con~~ l'introduction et ~~les autres~~ du reste, je sais la raison. Ils étaient redigés assez séparé en espace-temps; l'introduction à l'Université de New York State en Amérique, et le reste à Bombay et Kanpur en Inde. La séparation en temps a résulté dans une separation

de la mode de presentation. Maintenant il sera difficile pour moi de changer l'introduction, alas la paresse!

4- Les effects de la petite guerre Indo-Pakistanaise sont la ~~monte~~ hausse des prix, ~~ce~~ c'est à dire la descente du prix du Roupee, et les taxes nouveaux qui ne sont pas encore nombreux. ~~Mon fr~~ Personnellement, mon frère était à Jodhpur, une ville de dans l'ouest Rajsthan près de la frontière, qui était bombardée lourdement. Il était à l'école d'engineering civile (c'est à dire — ~~pot~~ ponts et chaussées, routes, batiments etc.), et en l'experience. L'école était près de l'aerodrome bombardé et les batiments (de l'école) ont eu les domages. Il a collectioné quelques pièces des bombs, qu'il garde.

c'est ~~tout~~ tous. Bien amicalement.

[illegible]
MEHTA

Princeton 6-4-67

Cher Gaudin,

Ces derniers jours j'ai calculé la probabilité jointe de deux espacements voisins et est arrivé ~~au~~ à l'identité suivante que je ne sais pas comment démontrer.

$$\left\{\prod_{i=0}^{\infty}(1-\lambda_{2i})\right\}\left\{\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda_{2i}}{1-\lambda_{2i}}\,f_{2i}(1)\int_{-1}^{1}f_{2i}(y)\,dy\right\} = \prod_{i=0}^{\infty}(1-\lambda_{2i+1}) - \prod_{i=0}^{\infty}(1-\lambda_{2i})$$

où $\lambda_{2i}$ et $f_{2i}(x)$ sont les valeurs propres et les fonctions propres <u>normalisées</u> de ~~les~~ l'equation intégrales

$$\lambda f(x) - \int_{-1}^{1} Q(x,y)\,f(y)\,dy = 0, \quad \int_{-1}^{1} f^2(y)\,dy = 1$$

$$Q(x,y) = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\sin\{(x+y)\frac{1}{2}t\pi\}}{(x+y)} + \frac{\sin\{(x-y)\frac{1}{2}t\pi\}}{x-y}\right\}$$

où $\lambda_{2i+1}$ sont les valeurs propres ~~correspondant aux~~ ~~à fonctions les fo~~ ~~impaires~~ de ~~l'equation~~ la même equation avec le noyau $\dfrac{1}{2\pi}\left\{\dfrac{\sin\{(x+y)\frac{1}{2}t\pi\}}{(x+y)} - \dfrac{\sin\{(x-y)\frac{1}{2}t\pi\}}{(x-y)}\right\}$.

L'identité pourra s'écrit aussi comme

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda_{2i}}{1-\lambda_{2i}}\,f_{2i}(1)\int_{-1}^{1}f_{2i}(x)\,dx = -1 + \prod_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1-\lambda_{2i+1}}{1-\lambda_{2i}}\right).$$

On pourra remplacer $\int_{-1}^{1} f_{2i}(x)\,dx$ par quelque chose contenant $f_{2i}(0)$ et $\lambda_{2i}$ (peut-être $\lambda_{2i}^{\frac{1}{2}}$) comme tu l'a fait dans ~~ton~~ ton papier.

Voila le problème. Tu peut le poser aux

autres gens de Saclay — des Cloisseaux, Balian, Stora, Srivastava Bloch, ... qui ~~sont~~ savent plus que moi, et qui pourront éclairer la question.

Quoi ~~[illegible]~~ d'autres choses? De ta famille et de t~~on~~a santé ?

Moi, je vais à Argonne en été, et ferrai

FIRST FOLD

M.L. Mehta
Palmer Physical Lab.
Princeton, N.J. 08540

PRINCETON APR 7 1967

SRP

Monsieur M. Gaudin,
Service Physique Théorique,
C.E.N. de Saclay
Gif-sur-Yvette, 91, S. et O.
France.

AÉROGRAMME • PAR AVION

AIR MAIL U.S.A

SECOND FOLD

quelques ~~calculats~~ calcules numeriques sur la machine avec Rosenzweig. (Comme je ne sais pas les faire autrement jusque à ce moment).

Bien cordialement ~~[illegible]~~ et attendant la reponse si tu a en une.

MADAN LAL

Mai 1, 1967

Cher Gaudin,

Soit $\lambda_i$ les valeurs propres et $f_i$ les fonctions propres correspondantes de

$$\lambda f(y) = \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2} x y z\right) f(z)\, dz.$$

Dans une ~~manière~~ façon analogue les $\mu_i$ et les $g_i$ sont définies par

$$\mu g(y) = \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2} x y z\right) g(z)\, dz.$$

Dans les deux équations au-dessus $x$ est un paramètre. Definissons

$$\Psi(x) = \prod_i (1 - x\lambda_i^2), \quad \Phi(x) = \prod_i (1 - x\mu_i^2).$$

Alors il faut montrer les identités

$$\text{(i)} \qquad \Psi \frac{d^2\Phi}{dx^2} + \Phi \frac{d^2\Psi}{dx^2} = 2 \frac{d\Psi}{dx} \frac{d\Phi}{dx},$$

$$\text{(ii)} \qquad \frac{\Phi(x)}{\Psi(x)} = 1 + \sum_i \frac{x\lambda_i^2}{1 - x\lambda_i^2} f_i(1) \int_0^1 f_i(y)\, dy \Big/ \int_0^1 f_i^2(y)\, dy.$$

Je ne suis pas arrivé à les démontrer.

M.L. MEHTA

From ENRICO BOMBIERI, FEB. 22 1979. (1)

Dear Dyson:

let me recall the following integral

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 (x_1 \cdots x_N)^{\alpha-1} \left\{ \prod_{j=1}^{N} (1-x_j) \right\}^{\beta-1} (\Delta(\underline{x}))^{2k} \, dx_1 \cdots dx_N$$

$$= \prod_{j=1}^{N} \frac{\Gamma(1+jk)\,\Gamma(\alpha+(j-1)k)\,\Gamma(\beta+(j-1)k)}{\Gamma(1+k)\,\Gamma(\alpha+\beta+(N+j-2)k)}$$

which is valid for $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$, $\mathrm{Re}\,\beta > 0$ and $\mathrm{Re}\,k \geqq 0$.

The calculation of this integral is in a paper by Atle Selberg: (*)

A. Selberg, Bemerkninger om et multipelt integral, Norsk Matematisk Tidsskrift 1944, Vol. 26, p. 71-78, ~~p. 1-8~~, formula (3) on p. 71.

Here $\Delta(\underline{x})$ is the "discriminant"

$$\Delta(\underline{x}) = \prod_{1 \leqq i < j \leqq N} (x_i - x_j).$$

Let us make $\alpha = \beta$ and let

$$x_j = \frac{1}{2} + \frac{y_j}{2\sqrt{p}}.$$

Now

(*) This paper is almost unknown and virtually unobtainable. I have the only copy, from Selberg.

$$\prod x_j(1-x_j) = 4^{-N} \prod \left(1 - \frac{y_j^2}{p}\right)$$

$$\Delta(\underline{x}) = (2\sqrt{p})^{-\frac{N(N-1)}{2}} \Delta(\underline{y})$$

$$dx_1 \cdots dx_N = (2\sqrt{p})^{-N} dy_1 \cdots dy_N$$

so that replacing $\alpha$ by $kp+1$ we find

$$(2\sqrt{p})^{-N-N(N-1)k} 4^{-Nkp} \int_{-\sqrt{p}}^{\sqrt{p}} \cdots \int_{-\sqrt{p}}^{\sqrt{p}} \prod_j \left(1 - \frac{y_j^2}{p}\right)^{kp} \Delta(\underline{y})^{2k} dy_1 \cdots dy_N$$

$$= \left\{ \prod_{j=1}^{N} \frac{(jk)!}{k!} \right\} \left\{ \prod_{j=1}^{N} \frac{(kp+(j-1)k)!^2}{(2kp+1+(N+j-2)k)!} \right\}.$$

Now

$$\lim_{p \to \infty} \int_{-\sqrt{p}}^{\sqrt{p}} \cdots \int_{-\sqrt{p}}^{\sqrt{p}} \prod_{j=1}^{N} \left(1 - \frac{y_j^2}{p}\right)^{kp} \Delta(\underline{y})^{2k} dy_1 \cdots dy_N$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-k \sum y_j^2\right) \prod_{i<j} (y_i - y_j)^{2k} dy_1 \cdots dy_N$$

$= I$ say, and

(I will not bother you with a formal proof)

$$I = (k!)^{-N} \prod_{j=1}^{N} (kj)! \; J$$

with

$$J = \lim_{p\to\infty} (2\sqrt{p})^{N+N(N-1)k}\, 4^{Nkp} \prod_{j=1}^{N} \frac{(kp+(j-1)k)!^2}{(2kp+1+(N+j-2)k)!}$$

$$= (2\pi)^{\frac{N}{2}} (2k)^{-\frac{N}{2} - \frac{N(N-1)}{2}k}$$

as one may check by computing $\log J$ using Stirling's formula.

(I have done this computation and is OK).

This proves the conjecture you mentioned.

P.S. This method was shown to me by Atle for a similar but different problem; I had a conjecture that

coeff of $(x_1 \cdots x_N)^{(N-1)k}$ in $(\Delta(\underline{x}))^{2k}$

is $\pm \dfrac{(kN)!}{(k!)^N}$ (this also is OK)

Yours

Enrico Bombieri

To Dr. M. L. MEHTA
Service de Physique Théorique
C.E.N. SACLAY
BP N° 2
91-GIF SUR YVETTE
FRANCE

THE INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY
PRINCETON, NEW JERSEY 08540
Telephone-609-924-4400

SCHOOL OF NATURAL SCIENCES

February 23 1979

Dear Madan Lal

Big surprise! I learned yesterday from Enrico Bombieri that your famous conjecture

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}N} \int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j<k}^{N} |x_j - x_k|^{\beta} e^{-\frac{1}{2}\beta \Sigma x_j^2} dx_1 \cdots dx_N$$

$$= \beta^{-\frac{1}{2}N - \frac{1}{4}\beta N(N-1)} \prod_{j=1}^{N} \left( \frac{\Gamma(1+\frac{1}{2}\beta j)}{\Gamma(1+\frac{1}{2}\beta)} \right)$$

was proved by Selberg in 1944. More accurately, it is a simple limiting case of an identity proved by Selberg.

I enclose Bombieri's letter deducing your conjecture from Selberg's identity, a copy of the Selberg paper, and an abbreviated translation of Selberg's paper in case your Norwegian is rusty.

Selberg's proof is astonishingly simple and elegant, involving almost nothing but counting The degrees of polynomials. It would be interesting to see what other identities one might prove with the same method.

It is a pity we never spoke to Selberg about This problem when you were here in Princeton. I had no idea That he had ever done anything of This kind.

Last year I believed I had found a finite graph of 126 vertices, with 3 lines at each vertices and no cycles shorter than 12. I still Think it should exist but I have not succeeded in proving it. What do you think?

Yours Freeman Dyson.

Norsk Matematisk Tidsskrift, 26, 71–78 (1944).

# Bemerkninger om et multipelt integral.

Av
**Atle Selberg.**

1. Den naturligste generalisasjon av det første Eulerske integral[1])

$$(1) \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}\,du = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \text{ (gyldig for } \Re x > 0,\ \Re y > 0)^{2)}$$

til $p > 1$ dimensjoner, er utvilsomt gitt ved Dirichlets formel[3])

$$(2) \underset{\substack{u_i>0 \\ u_1+\ldots+u_p<1}}{\int\ldots\int} u_1^{x_1-1}u_2^{x_2-1}\ldots u_p^{x_p-1}(1-u_1-\ldots-u_p)^{x_{p+1}-1}du_1\ldots du_p =$$

$$= \frac{\Gamma(x_1)\,\Gamma(x_2)\ldots\Gamma(x_{p+1})}{\Gamma(x_1+x_2+\ldots+x_{p+1})},$$

som gjelder for $\Re x_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, p+1.$

I dette arbeid skal vi betrakte et annet integral som også kan anses som en generalisasjon av Eulers, for $p > 2$ inneholder det riktignok ikke så mange vilkårlige parametere som Dirichlets integral. Vi skal vise at *når $p$ er et helt positivt tall og*

$$\Re x > 0,\ \Re y > 0,\ \Re z > -\min\left\{\frac{1}{p}, \frac{\Re x}{p-1}, \frac{\Re y}{p-1}\right\},$$

*har vi*

$$(3) \int_0^1\ldots\int_0^1 (u_1u_2\ldots u_p)^{x-1}\{(1-u_1)(1-u_2)\ldots(1-u_p)\}^{y-1}\,|\Delta(u)|^{2z}\,du_1\ldots du_p =$$

$$= \prod_{\nu=1}^{p} \frac{\Gamma(1+\nu z)\,\Gamma(x+(\nu-1)z)\,\Gamma(y+(\nu-1)z)}{\Gamma(1+z)\,\Gamma(x+y+(p+\nu-2)z)}.$$

---

1) Se f. eks. *C. Størmer*, Forelesninger over Gammafunksjonen, § 22 s. 51.
2) $\Re w$ betegner her og i det følgende realdelen av $w$.
3) *C. Størmer*, Forelesninger over Gammafunksjonen, § 26 s. 56.

*Her betegner* $\Delta(u)$ *«diskriminanten»*

$$\Delta(u) = \Delta(u_1, u_2, \ldots, u_p) = \prod_{i<j} (u_j - u_i).$$

Denne formel har jeg ikke kunnet finne anført i den tilgjengelige litteratur, så den synes ikke å være kjent tidligere[1]. Formelen er ganske interessant i seg selv, og synes dessuten ikke å være så helt enkel å bevise ved de gjengse metoder med tilbakeføring til kjente integraler ved hjelp av variabeltransformasjoner eller liknende. Jeg skal derfor i det følgende gi et, riktignok noe komplisert, bevis for formelen (3). For $p = 1$ reduserer (3) seg til (1), vi vil derfor i det følgende anta at $p$ er et helt rasjonalt tall $> 1$. Videre betegner i det følgende $x$ og $y$ alltid komplekse tall med positiv realdel.

2. La oss først anta at $z$ er et helt rasjonalt tall $\geqq 0$. Vi kan da skrive $|\Delta(u)|^{2z}$ som et polynom i $u$'ene.

$$|\Delta(u)|^{2z} = \sum c_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_p^{\alpha_p},$$

hvor $c$'ene er tallkoeffisienter. Innføres dette i integralet på venstre side i (3), får vi det uttrykt ved en sum av integraler av typen

$$(4) \quad \int_0^1 \ldots \int_0^1 u_1^{x+\alpha_1-1} \ldots u_p^{x+\alpha_p-1} (1-u_1)^{y-1} \ldots (1-u_p)^{y-1} du_1 \ldots du_p =$$

$$= \prod_{\nu=1}^{p} \frac{\Gamma(x+\alpha_\nu)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y+\alpha_\nu)},$$

ifølge (1). Da indeksenes rekkefølge åpenbart er likegyldig, vil vi for enkelhets skyld anta $0 \leqq \alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \ldots \leqq \alpha_p$. $\Delta(u)$ er homogen i alle $u$'er og av grad $\frac{p(p-1)}{2}$; altså har vi

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p = \frac{p(p-1)}{2} \cdot 2z = p(p-1)z,$$

hvorav

$$p\alpha_p \geqq p(p-1)z; \quad \alpha_p \geqq (p-1)z.$$

På samme måte fås, da $\Delta(u_1, \ldots, u_p)$ er delelig med $\Delta(u_1, \ldots, u_\nu)$ for $\nu = 1, 2, \ldots, p$, at $\alpha_\nu \geqq (\nu - 1)z$. Nu er

[1] I en litt annen form har jeg anvendt formelen i et tidligere arbeid, uten bevis. Se *A. Selberg*, Über einen Satz von A. Gelfond, Arch. f. Math. og Naturv. B. XLIV Nr. 15, s. 15 formel (11).

$$|\Delta(u)|^{2z} = (u_1 \dots u_p)^{2(p-1)z} \left|\Delta\left(\frac{1}{u}\right)\right|^{2z},$$

følgelig må vi ha

$$u_1^{\alpha_1} \dots u_p^{\alpha_p} = u_1^{2(p-1)z-\alpha'_p} \dots u_p^{2(p-1)z-\alpha'_1},$$

hvor $\alpha'_\nu$ oppfyller de samme ulikheter som $\alpha_\nu$, $\alpha'_\nu \geqslant (\nu-1)z$. Dette gir

$$\alpha_\nu = 2(p-1)z - \alpha'_{p-\nu+1} \leqslant 2(p-1)z - (p-\nu)z = (p+\nu-2)z.$$

For $\nu = 1, 2, \dots, p$, har vi altså

$$(\nu-1)z \leqslant \alpha_\nu \leqslant (p+\nu-2)z.$$

Vi kan derfor skrive

$$\frac{\Gamma(x+\alpha_\nu)}{\Gamma(x+y+\alpha_\nu)} = \frac{\Gamma(x+(\nu-1)z)}{\Gamma(x+y+(p+\nu-2)z)} \prod_{i=0}^{\alpha_\nu-(\nu-1)z-1} (x+(\nu-1)z+i) \cdot$$

$$\cdot \prod_{i=0}^{(p+\nu-2)z-\alpha_\nu-1} (x+y+\alpha_\nu+i) = \frac{\Gamma(x+(\nu-1)z)}{\Gamma(x+y+(p+\nu-2)z)} q_{\alpha_\nu}(x, y),$$

hvor $q_{\alpha_\nu}$ er et polynom i $x$ og $y$ av grad $(p+\nu-2)z - \alpha_\nu$ i $y$. Innføres dette i (4), får vi

$$\int_0^1 u_1^{x+\alpha_1-1} \dots u_p^{x+\alpha_p-1} \{(1-u_1)\dots(1-u_p)\}^{y-1} du_1 \dots du_p =$$

$$= Q_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p}(x, y) \prod_{\nu=1}^{p} \frac{\Gamma(x+(\nu-1)z)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y+(p+\nu-2)z)},$$

hvor $Q_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}$ er et polynom i $x$ og $y$ hvis grad i $y$ er lik

$$\sum_{\nu=1}^{p} \{(p+\nu-2)z - \alpha_\nu\} = \frac{3p(p-1)}{2} z - p(p-1)z = \frac{p(p-1)}{2} z.$$

Da venstre side i (3) kan skrives som en sum av uttrykk av formen (4), gir dette videre

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 (u_1 \dots u_p)^{x-1} \{(1-u_1)\dots(1-u_p)\}^{y-1} |\Delta(u)|^{2z} du_1 \dots du_p =$$

$$= Q(x, y) \prod_{\nu=1}^{p} \frac{\Gamma(x+(\nu-1)z)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y+(p+\nu-2)z)} =$$

$$= \frac{Q(x, y)}{\prod_{\nu=1}^{p} y(y+1)\dots(y+(\nu-1)z-1)} \prod_{\nu=1}^{p} \frac{\Gamma(x+(\nu-1)z)\,\Gamma(y+(\nu-1)z)}{\Gamma(x+y+(p+\nu-2)z)},$$

hvor $Q(x, y)$ er et polynom i $x$ og $y$ av grad høyst $\frac{p(p-1)}{2} z$ i $y$.

På grunn av at $\triangle(u) = \pm \triangle(1-u)$ er imidlertid venstre side av denne likning en symmetrisk funksjon av $x$ og $y$, følgelig har vi identisk

$$\frac{Q(x, y)}{\prod_{\nu=1}^{p} y(y+1)\ldots(y+(\nu-1)z-1)} =$$

$$= \frac{Q(y, x)}{\prod_{\nu=1}^{p} x(x+1)\ldots(x+(\nu-1)z-1)}.$$

Da de to nevnere er innbyrdes primiske, kan denne likning bare bestå når nevnerne på hver side av likhetstegnet går opp i tellerne. Nevneren på venstre side er av grad $\sum_{\nu=1}^{p}(\nu-1)z = \frac{p(p-1)}{2} z$ i $y$, slik at venstre side blir av nullte grad i $y$ og altså må være et polynom i $x$ alene. På samme måte må høyre side være et polynom i $y$ alene. Følgelig er uttrykket på venstre side uavhengig av $x$ og $y$ og avhenger bare av $p$ og $z$, vi vil betegne det med $c_p(z)$. Innføres dette ovenfor, får vi

$$(5) \int_0^1 \ldots \int_0^1 (u_1 \ldots u_p)^{x-1} \{(1-u_1)\ldots(1-u_p)\}^{y-1} |\triangle(u)|^{2z} du_1 \ldots du_p =$$

$$= c_p(z) \prod_{\nu=1}^{p} \frac{\Gamma(x+(\nu-1)z)\,\Gamma(y+(\nu-1)z)}{\Gamma(x+y+(p+\nu-2)z)}.$$

For å bestemme $c_p(z)$, velger vi her $x=1$, $y=1$, og får

$$(6) \int_0^1 \ldots \int_0^1 |\triangle(u_1, \ldots, u_p)|^{2z} du_1 \ldots du_p =$$

$$= c_p(z) \prod_{\nu=1}^{p} \frac{\Gamma^2(1+(\nu-1)z)}{\Gamma(2+(p+\nu-2)z)}.$$

På den annen side har vi, idet integranden er symmetrisk i $u$'ene

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 |\triangle(u_1, \ldots, u_p)|^{2z} du_1 \ldots du_p =$$

$$= p \int_0^1 du_p \int_0^{u_p} \ldots \int_0^{u_p} |\triangle(u_1, \ldots, u_p)|^{2z} du_1 \ldots du_{p-1} =$$

$$= p \int_0^1 du_p \int_0^{u_p} \ldots \int_0^{u_p} \{(u_p - u_1)\ldots$$

$$(u_p - u_{p-1})\}^{2z} |\triangle(u_1, \ldots, u_{p-1})|^{2z} du_1 \ldots du_{p-1},$$

settes her $u_1 = v_1 u_p, \ldots, u_{p-1} = v_{p-1} u_p$, gjelder

$$\triangle (v_1 u_p, \ldots, v_{p-1} u_p) = u_p^{\frac{(p-1)(p-2)}{2}} \triangle (v_1, \ldots, v_{p-1}),$$

dette gir

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 | \triangle (u_1, \ldots, u_p)|^{2z} du_1 \ldots du_p = p \int_0^1 u_p^{p(p-1)z+p-1} du_p \cdot$$

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 \{(1-v_1) \ldots (1-v_{p-1})\}^{2z} | \triangle (v_1, \ldots, v_{p-1})|^{2z} dv_1 \ldots, dv_{p-1} =$$

$$= \frac{1}{(p-1)z+1} \int_0^1 \ldots \int_0^1 \{(1-v_1) \ldots$$

$$(1-v_{p-1})\}^{2z} | \triangle (v_1, \ldots, v_{p-1})|^{2z} dv_1 \ldots dv_{p-1} =$$

$$= \frac{c_{p-1}(z)}{(p-1)z+1} \prod_{\nu=1}^{p-1} \frac{\Gamma(1+(\nu-1)z)\,\Gamma(1+(\nu+1)z)}{\Gamma(2+(p+\nu-1)z)},$$

hvor det siste integral beregnes av (5) ved å sette $x = 1$, $y = 2z+1$ og $p-1$ for $p$. Sammenholdt med (6) gir dette

$$c_p(z) \prod_{\nu=1}^{p} \frac{\Gamma^2(1+(\nu-1)z)}{\Gamma(2+(p+\nu-2)z)} =$$

$$= \frac{c_{p-1}(z)}{(p-1)z+1} \prod_{\nu=1}^{p-1} \frac{\Gamma(1+(\nu-1)z)\,\Gamma(1+(\nu+1)z)}{\Gamma(2+(p+\nu-1)z)}.$$

Etter en del reduksjon får vi

$$c_p(z) = c_{p-1}(z) \frac{\Gamma(1+pz)}{\Gamma(1+z)},$$

hvorav, da $c_1(z) = 1$ ifølge (1),

$$c_p(z) = \prod_{\nu=1}^{p} \frac{\Gamma(1+\nu z)}{\Gamma(1+z)}.$$

Innføres dette i (5) ser vi at (3) *er bevist under forutsetning av at $z$ er et helt rasjonalt tall $\geqq 0$.*

3. La no $x$ og $y$ være faste, og la oss betrakte de to funksjoner av den komplekse variable $z$,

$$f(z) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 (u_1 \ldots u_p)^{x-1} \{(1-u_1) \ldots$$

$$(1-u_p)\}^{y-1} | \triangle (u) |^{2z} du_1 \ldots du_p,$$

og

$$g(z) = \prod_{\nu=1}^{p} \frac{\Gamma(1+\nu z)\,\Gamma(x+(\nu-1)z)\,\Gamma(y+(\nu-1)z)}{\Gamma(1+z)\,\Gamma(x+y+(p+\nu-2)z)} =$$

$$= \prod_{\nu=1}^{p} \frac{\Gamma(1+\nu z)\,\Gamma(x+(\nu-1)z)\,\Gamma(y+(p-\nu)z)}{\Gamma(1+z)\,\Gamma(x+y+(p+\nu-2)z)}.$$

Vi ser straks at $f(z)$ og $g(z)$ er regulære og analytiske for $\Re z \geqslant 0$, og da alltid $|\Delta(u)| \leqslant 1$ må $|f(z)|$ være begrenset i dette halvplan. For å vise at også $|g(z)|$ er begrenset i dette område, er det tilstrekkelig å vise at hver av de $p$ faktorer i det siste produkt i ovenstående likning er begrenset. Da uttrykket er regulært i og på randen av området, bortsett fra randpunktet $z = \infty$, behøver vi bare å vise at det er begrenset når $|z| \to \infty$ i dette halvplan. Anvendes Stirlings formel[1])

$$\Gamma(w) \sim \sqrt{2\pi}\, w^{w-\frac{1}{2}}\, e^{-w},$$

som gjelder uniformt for $|w| \to \infty$ og $\Re w \geqslant 0$, får vi etter en del regning

$$\frac{\Gamma(1+\nu z)\,\Gamma(x+(\nu-1)z)\,\Gamma(y+(p-\nu)z)}{\Gamma(1+z)\,\Gamma(x+y+(p+\nu-2)z)} \sim$$

$$\sim \sqrt{\frac{2\pi}{1+z}} \cdot \frac{\nu^{\frac{1}{2}}\,(\nu-1)^{x-\frac{1}{2}}\,(p-\nu)^{y-\frac{1}{2}}}{(p+\nu-2)^{x+y-\frac{1}{2}}}$$

$$\cdot \left(\frac{\nu^{\nu}\,(\nu-1)^{\nu-1}\,(p-\nu)^{p-\nu}}{(p+\nu-2)^{p+\nu-2}}\right)^{z},$$

når $|z| \to \infty$ og $\Re z \geqslant 0$. Da

$$\frac{\nu^{\nu}\,(\nu-1)^{\nu-1}\,(p-\nu)^{p-\nu}}{(p+\nu-2)^{p+\nu-2}} \leqslant 1,$$

for $1 \leqslant \nu \leqslant p$, vil høyre og følgelig også venstre side av denne asymptotiske likning være begrenset for $\Re z \geqslant 0$. Altså er også $|g(z)|$ begrenset for $\Re z \geqslant 0$. Setter vi no $h(z) = f(z) - g(z)$, må $h(z)$ være regulær og begrenset for $\Re z \geqslant 0$, og etter hva vi har vist i foregående avsnitt, er $h(z) = 0$ for $z = 0, 1, 2, \ldots$. For $a$ reell og $> 1$ og $n$ et helt rasjonalt tall $> a$, gir no Cauchys integralformel

---

[1]) *C. Størmer*, Forelesninger over Gammafunksjonen. § 16 s. 32. Det er her praktisk å bruke den modifiserte formel, $\Gamma(a+w) \sim \sqrt{2\pi}\, w^{w+a-\frac{1}{2}}\, e^{-w}$, hvor $a$ er fast. Denne utledes lett av ovenstående.

$$h(a) = \frac{(a-1)(a-2)\ldots(a-n)}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{h(z)}{(z-a)(z-1)(z-2)\ldots(z-n)}dz,$$

herav får vi

$$|h(a)| \leqslant \frac{[a]!\,(n-[a])!}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|h(it)|}{\sqrt{(a^2+t^2)(1+t^2)(2^2+t^2)\ldots(n^2+t^2)}}dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{[a]!\,(n-[a])!}{2\pi\, n!}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|h(it)|}{1+t^2}dt \leqslant \frac{[a]!}{2\pi\,(n-a)^{a-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|h(it)|}{1+t^2}dt.$$

Lar vi $n \to \infty$ fås $h(a) = 0$ for alle reelle $a > 1$, følgelig må $h(z)$ forsvinne identisk i hele sitt definisjonsområde $\Re z \geqslant 0$; *d.v.s. (3) er bevist for alle $z$ med $\Re z \geqslant 0$.*

4. La oss for korthets skyld skrive $\Re x = x_1$, $\Re y = y_1$, og la $\sigma$ være reell og $0 > \sigma > -\min\left\{\frac{1}{p}, \frac{x_1}{p-1}, \frac{y_1}{p-1}\right\}$. Vi skal betrakte funksjonen

$$g_1(z) = \prod_{\nu=1}^{p}\frac{\Gamma(1+\nu z)\,\Gamma(x_1+(\nu-1)z)\,\Gamma(y_1+(\nu-1)z)}{\Gamma(1+z)\,\Gamma(x_1+y_1+(p+\nu-2)z)}.$$

Utvikler vi $g_1(z)$ etter potenser av $z-1$, $g_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{g_1^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^n$, ser vi at denne utvikling konvergerer for $z=\sigma$, idet det nærmeste singulære punkt er polen i $z = -\min\left\{\frac{1}{p}, \frac{x_1}{p-1}, \frac{y_1}{p-1}\right\}$. For $\Re z \geqslant 0$ gjelder ifølge foregående avsnitt

$$g_1(z) = \int_0^1\ldots\int_0^1 (u_1\ldots u_p)^{x_1-1}\{(1-u_1)\ldots$$
$$(1-u_p)\}^{y_1-1}\,|\triangle(u)|^{2z}\,du_1\ldots du_p,$$

hvorav for $\varepsilon > 0$,

$$(-1)^n g_1^{(n)}(1) = 2^n\int_0^1\ldots\int_0^1 (u_1\ldots u_p)^{x_1-1}\{(1-u_1)\ldots$$
$$(1-u_p)\}^{y_1-1}\,|\triangle(u)|^2\left\{\log\frac{1}{|\triangle(u)|}\right\}^n du_1\ldots, du_p \geqslant$$

$$\geqslant 2^n \underset{\substack{\varepsilon < u_i < 1-\varepsilon \\ |\Delta(u)| > \varepsilon}}{\int \ldots \int} (u_1 \ldots u_p)^{x_1 - 1} \{(1-u_1) \ldots$$

$$(1-u_p)\}^{y_1-1} |\Delta(u)|^2 \left\{\log \frac{1}{|\Delta(u)|}\right\}^n du_1 \ldots du_p.$$

Dette gir

$$g_1(\sigma) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n g_1^{(n)}(1)}{n!} (1-\sigma)^n \geqslant$$

$$\geqslant \sum_0^\infty \frac{2^n (1-\sigma)^n}{n!} \underset{\substack{\varepsilon < u_i < 1-\varepsilon \\ |\Delta(u)| > \varepsilon}}{\int \ldots \int} (u_1 \ldots u_p)^{x_1-1} \{(1-u_1) \ldots$$

$$(1-u_p)\}^{y_1-1} |\Delta(u)|^2 \left\{\log \frac{1}{|\Delta(u)|}\right\}^n du_1 \ldots du_p =$$

$$= \underset{\substack{\varepsilon < u_i < 1-\varepsilon \\ |\Delta(u)| > \varepsilon}}{\int \ldots \int} (u_1 \ldots u_p)^{x_1-1} \{(1-u_1) \ldots$$

$$(1-u_p)\}^{y_1-1} |\Delta(u)|^2 \sum_0^\infty \frac{\left\{2(1-\sigma) \log \frac{1}{|\Delta(u)|}\right\}^n}{n!} du_1 \ldots du_p =$$

$$= \underset{\substack{\varepsilon < u_i < 1-\varepsilon \\ |\Delta(u)| > \varepsilon}}{\int \ldots \int} (u_1 \ldots u_p)^{x_1-1} \{(1-u_1) \ldots (1-u_p)\}^{y_1-1} |\Delta(u)|^{2\sigma} du_1 \ldots du_p.$$

Da uttrykket på høyre side vokser monotont når $\varepsilon$ avtar, følger at integralet

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 (u_1 \ldots u_p)^{x_1-1} \{(1-u_1) \ldots (1-u_p)\}^{y_1-1} |\Delta(u)|^{2\sigma} du_1 \ldots du_p$$

eksisterer. Av dette ser vi at integralet

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 (u_1 \ldots u_p)^{x-1} \{(1-u_1) \ldots (1-u_p)\}^{y-1} |\Delta(u)|^{2z} du_1 \ldots du_p$$

eksisterer for $\Re z \geqslant \sigma$ og konvergerer uniformt i dette område, følgelig framstiller det her en regulær analytisk funksjon. I foregående avsnitt viste vi at formelen (3) gjelder for $\Re z \geqslant 0$, den må derfor også bestå for $\Re z \geqslant \sigma$; da $\sigma$ kan velges vilkårlig nær $- \min \left\{\frac{1}{p}, \frac{\Re x}{p-1}, \frac{\Re y}{p-1}\right\}$, *følger at (3) gjelder for* $\Re x > 0$, $\Re y > 0$, $\Re z > - \min \left\{\frac{1}{p}, \frac{\Re x}{p-1}, \frac{\Re y}{p-1}\right\}$, *hv. sk. bev.*