

*Des cartes planaires eulériennes aux arbres
étiquetés : les mobiles*

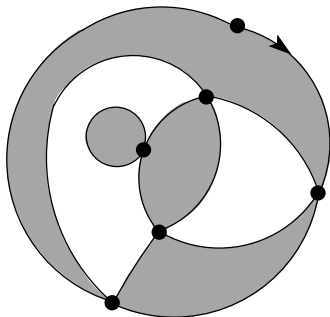
Jérémie Bouttier, Philippe Di Francesco, Emmanuel Guitter

Service de Physique Théorique, CEA Saclay
Instituut voor Theoretische Fysica Amsterdam

Journées Arbres et Chemins - LABRI - 25 novembre 2004

Problème étudié (I)

On considère la famille des **cartes planaires eulériennes**.



Soit $\mathcal{E}(n_1^\circ, n_2^\circ, \dots; n_1^\bullet, n_2^\bullet, \dots)$ l'ensemble des cartes planaires eulériennes *enracinées* avec, pour tout $k \geq 1$, n_k° faces *blanches* et n_k^\bullet faces *noires*.

$$\mathcal{E}(\underline{n}) = \emptyset \quad \text{si} \quad \sum_k kn_k^\circ \neq \sum_k kn_k^\bullet$$

Problème étudié (II)

Que dire sur $|\mathcal{E}(\underline{n})|$?

- ▶ quelques formules explicites dans des cas restreints
- ▶ détermination de la série génératrice associée

$$E(\underline{g}) \equiv \sum_{\underline{n}} |\mathcal{E}(\underline{n})| \underline{g}^{\underline{n}}$$

$$\text{(où } \underline{g}^{\underline{n}} \equiv \prod_{k \geq 1} (g_k^\circ)^{n_k^\circ} (g_k^\bullet)^{n_k^\bullet}\text{)}$$

Lorsqu'on restreint à un nombre fini de paramètres (i.e. degrés bornés), E (ou seulement l'une de ses dérivées ?) est de nature algébrique.

Cas particuliers

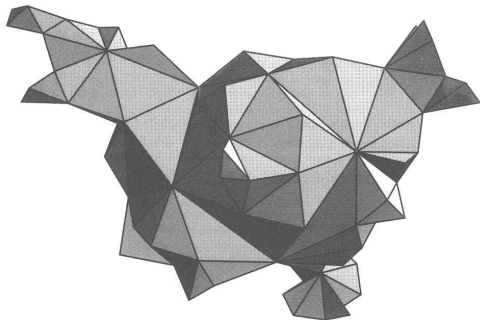
Certains cas particuliers sont bien étudiés:

1. les cartes planaires *arbitraires*, comptées selon les degrés des faces
(une carte quelconque peut être vue comme carte eulérienne n'ayant que des faces noires de degré 2)
2. les p -constellations
(faces noires de degré $p \geq 1$, faces blanches de degré multiple de p)
3. les cartes planaires *biparti(t)es*
(cas $1 \cap 2$: ce sont les 2-constellations, ou cartes ayant des faces de degré pair)
4. les triangulations, quadrangulations... en fonction de leur taille

Remarque : par dualité, ces problèmes sont équivalents à des énumérations avec contraintes sur les degrés des sommets.

Motivations physiques (I)

Les cartes fournissent des modèles de surfaces aléatoires discrètes.



[Ambjørn *et al*, 1990]

Le **modèle d'Ising** (sur réseau 2D aléatoire dynamique) apparaît comme cas particulier de notre problème.

Motivations physiques (II)

Le modèle d'Ising sur réseau 2D aléatoire dynamique :

- ▶ une *configuration* est une carte dans une famille donnée (ex : triangulations de taille N), où de plus on associe à chaque face f une valeur $\sigma_f = \pm 1$ (*spin*).
- ▶ chaque configuration C apparaît avec une probabilité proportionnelle à $e^{-\beta H(C)}$ où :

$$H(C) = -J \sum_{a \text{ arête de } C} \sigma_{f_a} \sigma_{f'_a} - h \sum_{f \text{ face de } C} \sigma_f$$

(f_a, f'_a désignent les faces incidentes à a)

- ▶ intérêt physique : il existe un **point critique** ($h = 0, \beta J = \beta_c J_c$).

Boîte à outils

Différentes méthodes sont à notre disposition :

- ▶ *décomposition récursive* : systématique, envisageable mais lourde ?
- ▶ *intégrales de matrices* : efficace [Boulatov-Kazakov 1987, Douglas 1990] mais heuristique
- ▶ **bijections** avec des arbres : astucieuse, élégante et rigoureuse [Cori-Vauquelin 1981, Schaeffer 1998].

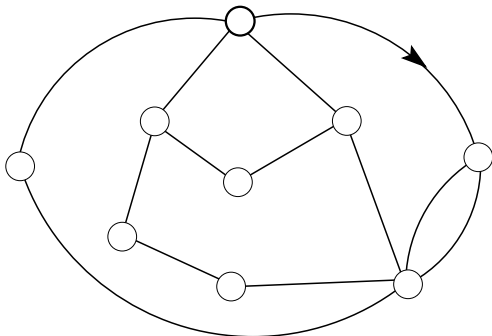
Énumération bijective des cartes

Un grand nombre de résultats ont été obtenus à l'aide de classes d'arbres qualifiables d'arbres *bourgeonnants*.

Les arbres correspondants à notre problème (via dualité) ont été caractérisés par Bousquet-Mélou et Schaeffer (2002).

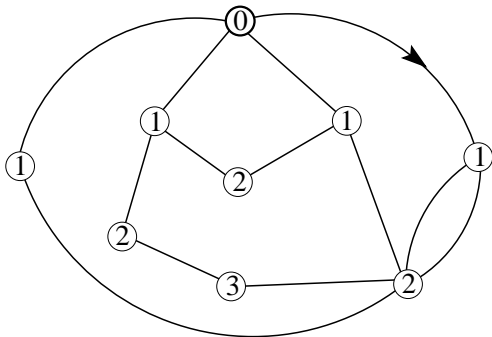
Cependant la bijection élémentaire de [Jacquard—Marcus—Chassaing]-Schaeffer, entre quadrangulations enracinées et *arbres bien étiquetés*, est de nature différente et possède des applications intéressantes.

Des cartes aux arbres (I)



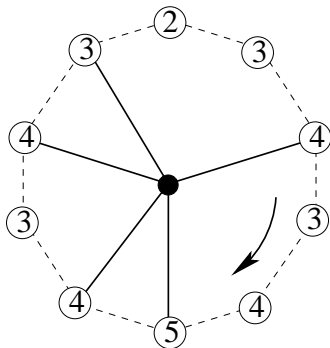
On part d'une carte bipartite enracinée...

Des cartes aux arbres (II)



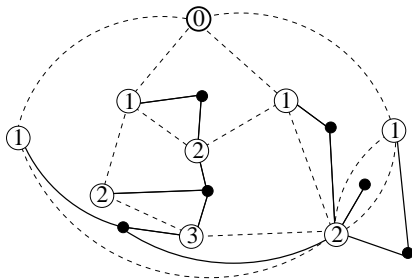
Les sommets peuvent être étiquetés par leur *distance* à l'**origine** (de l'arête-racine).

Des cartes aux arbres (III)



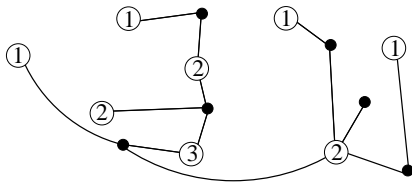
Règle : (construction locale) on ajoute un sommet non-étiqueté au centre de chaque face et on le relie à certains des sommets incidents à la face : ceux dont le sommet suivant dans le sens indirect a une étiquette inférieure.

Des cartes aux arbres (IV)



Cette construction est effectuée dans chaque face indépendamment.

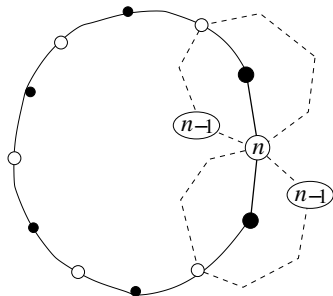
Des cartes aux arbres (V)



On efface finalement les arêtes initiales, et l'origine qui est isolée :
on obtient un arbre ! (dit **mobile**)

Éléments de preuve

Il est impossible d'avoir une boucle, car les étiquettes proviennent de la distance à l'origine.

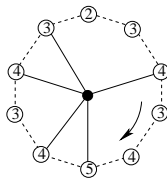


On a donc une *forêt*, un simple comptage montre qu'elle n'a qu'une composante connexe.

Caractérisation des mobiles

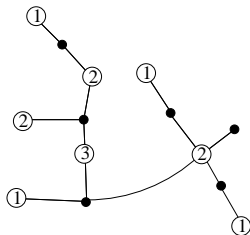
Un mobile est un arbre plan constitué de sommets étiquetés (par des entiers) et non-étiquetés, tel que :

- ▶ chaque arête relie un sommet étiqueté à un non-étiqueté,
- ▶ autour d'un sommet non-étiqueté, les étiquettes des sommets adjacents ne décroissent jamais de plus de 1 dans le sens indirect



- ▶ toutes les étiquettes sont des entiers strictement positifs, et il y a au moins un sommet d'étiquette 1 (pouvant servir de racine de l'arbre).

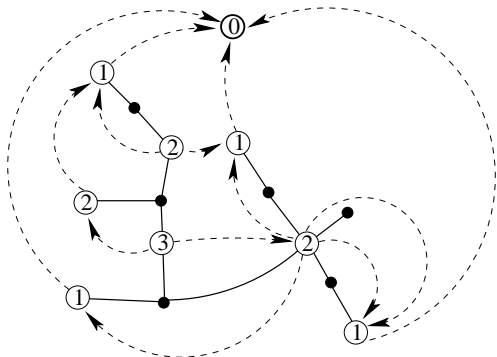
Construction inverse (I)



On considère les *coins* étiquetés. On peut associer à chaque coin son *successeur* : le premier coin sur le contour de l'arbre ayant une étiquette immédiatement inférieure (sauf pour les coins d'étiquette 1 auquel on associe un sommet externe).

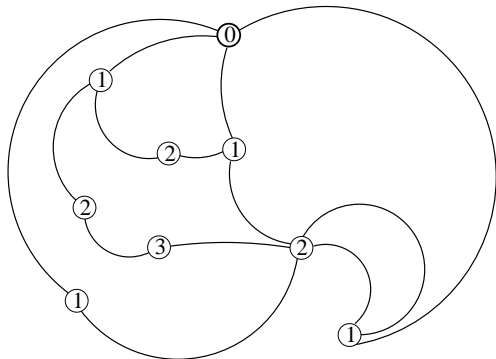
Remarque : l'existence de la fonction successeur est garantie par la définition des mobiles.

Construction inverse (II)



Chaque coin est relié à son successeur, ce qui peut se faire sans croisement.

Construction inverse (III)



En effaçant les arêtes de l'arbre et les sommets étiquetés, on trouve une carte bipartite étiquetée selon la distance à l'origine.

Conséquence sur l'énumération (I)

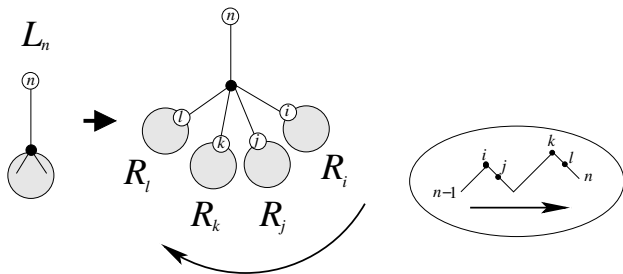
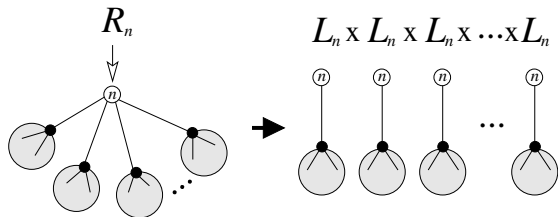
Les deux constructions présentées sont inverses l'une de l'autre, et établissent une bijection entre cartes planaires bipartites enracinées et mobiles.

L'information sur les degrés des faces est préservée : une face de degré $2k$ devient un sommet non-étiqueté de degré k (poids g_{2k} pour la série génératrice).

Pour l'énumération des mobiles, il est plus commode de lever la contrainte d'existence d'un sommet d'étiquette 1 :

- ▶ R_n est la série génératrice des mobiles avec un coin marqué d'étiquette n
- ▶ L_n est la série génératrice des mobiles avec un sommet univalent (de degré un) marqué et d'étiquette n .

Conséquence sur l'énumération (II)



Conséquence sur l'énumération (III)

Les décompositions récursives des arbres se traduisent par les équations (valables pour $n \geq 1$):

$$R_n = \frac{1}{1 - L_n}$$

$$L_n = \sum_{k=1}^{\infty} g_{2k}[X^n] Q^{2k-1} \cdot X^{n-1}$$

où $Q \cdot X^i \equiv X^{i+1} + R_i X^{i-1}$ et $[X^n]$ désigne l'extraction du coefficient de X^n . On a $R_i = 0$ si $i \leq 0$.

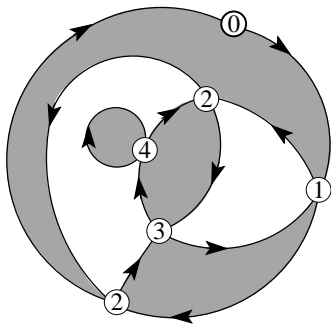
Cette équation condense une somme sur tous les chemins possibles correspondant au contour d'une face.

Conséquence sur l'énumération (IV)

- ▶ Les équations précédentes déterminent les R_n en tant que séries formelles.
- ▶ Pour des degrés bornés, on peut exploiter les propriétés d'*intégrabilité* des équations (vues comme récurrences d'ordre fini en n) pour trouver des formules explicites [BDG 2003].
- ▶ R_1 est la série génératrice des cartes bipartites enracinées.
- ▶ On peut lever la contrainte de positivité des étiquettes : par invariance par translation, tous les R_n deviennent égaux, à la série génératrice R des cartes bipartites enracinées avec un sommet marqué, vérifiant :

$$R = \frac{1}{1 - \sum_k g_{2k} \binom{2k-1}{k} R^{k-1}}.$$

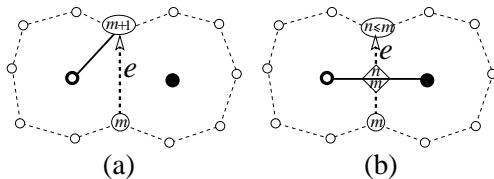
Des cartes eulériennes aux mobiles (I)



Considérons une carte eulérienne enracinée : l'orientation canonique des arêtes et le choix d'une origine fixent un étiquetage des sommets (longueur du plus court chemin orienté depuis l'origine).

Des cartes eulériennes aux mobiles (II)

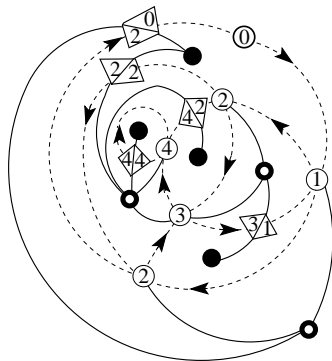
Le long d'une arête orientée, l'étiquette augmente au plus de 1.



Règle : (construction locale) on ajoute dans chaque face un sommet non-étiqueté portant la couleur de celle-ci, que l'on relie selon les règles ci-dessus, en fonction des étiquettes autour de chaque arête.

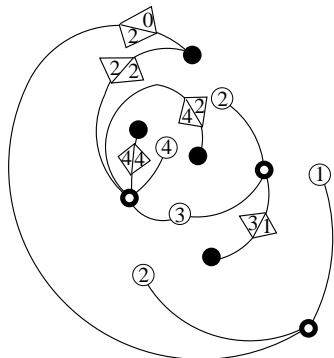
Certaines arêtes sont étiquetées par un *drapeau* de chaque côté.

Des cartes eulériennes aux mobiles (III)



On applique indépendamment la construction pour chaque arête.

Des cartes eulériennes aux mobiles (IV)



On efface les arêtes initiales et l'origine isolée : on obtient un **mobile eulérien**.

Caractérisation des mobiles eulériens

Les mobiles eulériens sont des arbres dont les sommets sont de trois types :

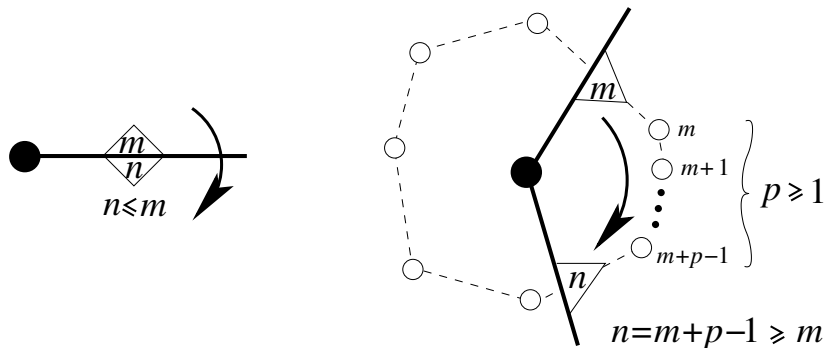
- ▶ étiqueté (par un entier)
- ▶ noir (non-étiqueté)
- ▶ blanc (non-étiqueté)

et les arêtes de deux types :

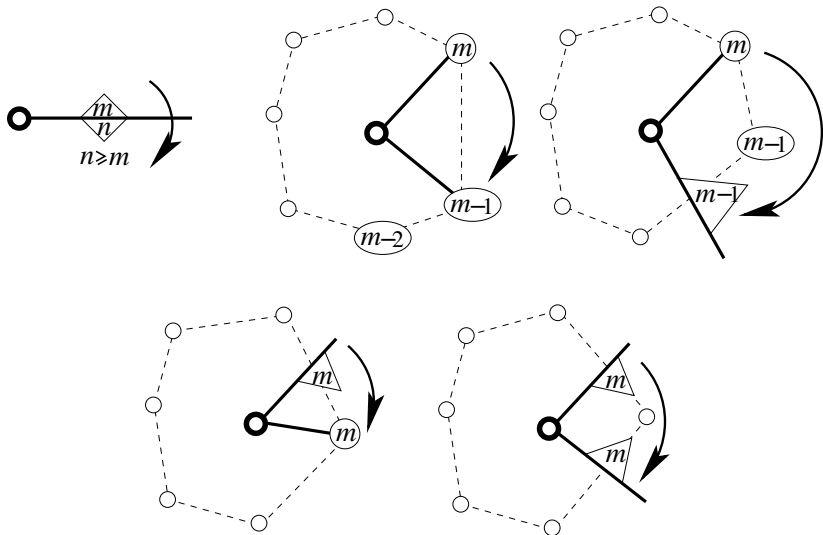
- ▶ non-étiquetées : elles relient un sommet blanc à un sommet étiqueté
- ▶ étiquetées (par un drapeau sur chaque côté) : elles relient un sommet noir à un sommet blanc.

Les étiquettes vérifient des contraintes variées mais précises.

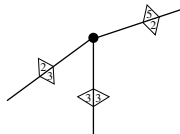
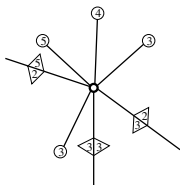
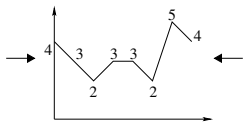
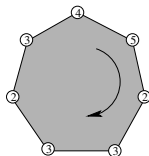
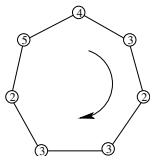
Caractérisation des mobiles eulériens : sommets noirs



Caractérisation des mobiles eulériens : sommets blancs



Caractérisation des mobiles eulériens: chemins codants



Application aux séries génératrices

Cette dernière caractérisation permet d'écrire immédiatement un système d'équation pour les séries génératrices de *demi-mobiles* (objets obtenus en coupant un mobile selon une arête d'un type précis).

Contraintes : les étiquettes des sommets sont strictement positives, celles des drapeaux sont positives. Il doit y avoir un sommet étiqueté 1 ou un drapeau étiqueté 0.

Ces contraintes peuvent être levées et fournir des équations algébriques (pour des degrés bornés) satisfaites par des séries génératrices de cartes eulériennes avec marquages.