

# Des pliages aux méandres

## *Physique statistique de modèles contraints sur réseaux réguliers et aléatoires*

Emmanuel Gitter

Service de Physique Théorique

CEA Saclay

\*\*\*

Habilitation à Diriger des Recherches

Université Paris 6

10 mai 2004

Merci à mes collaborateurs *(par ordre d'apparition)*

P. Di Francesco

M. Bowick

O. Golinelli

S. Mori

B. Eynard

C. Kristjansen

J. Nielsen

J. Jacobsen

# Plan de l'exposé

Pliages

# Plan de l'exposé

## Pliages

- du réseau triangulaire régulier

→ *vertex, spins, couleurs, boucles, hauteurs*

# Plan de l'exposé

## Pliages

- du réseau triangulaire régulier

→ *vertex, spins, couleurs, boucles, hauteurs*

- de triangulations aléatoires

→ *Pliabilité*

→ *Pb. combinatoire (cycles Hamiltoniens sur triangulations Eulériennes)*

# Plan de l'exposé

## Pliages

- du réseau triangulaire régulier
  - *vertex, spins, couleurs, boucles, hauteurs*
- de triangulations aléatoires
  - *Pliabilité*
  - *Pb. combinatoire (cycles Hamiltoniens sur triangulations Eulériennes)*

## Méandres

# Plan de l'exposé

## Pliages

- du réseau triangulaire régulier
  - *vertex, spins, couleurs, boucles, hauteurs*
- de triangulations aléatoires
  - *Pliabilité*
  - *Pb. combinatoire (cycles Hamiltoniens sur triangulations Eulériennes)*

## Méandres

- Combinatoire / Statistique
  - *Quelques résultats exacts; Analyse numérique*

# Plan de l'exposé

## Pliages

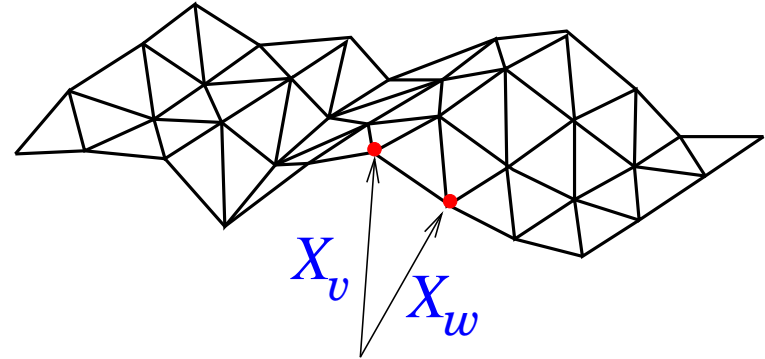
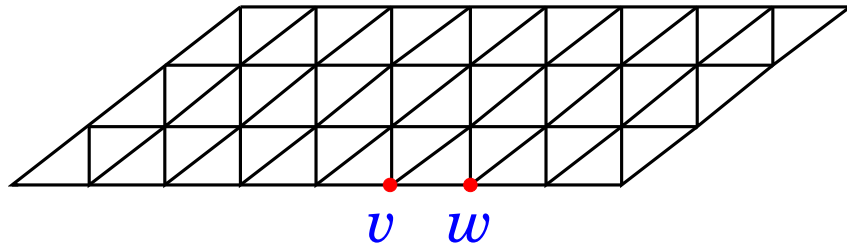
- du réseau triangulaire régulier
  - *vertex, spins, couleurs, boucles, hauteurs*
- de triangulations aléatoires
  - *Pliabilité*
  - *Pb. combinatoire (cycles Hamiltoniens sur triangulations Eulériennes)*

## Méandres

- Combinatoire / Statistique
  - *Quelques résultats exacts; Analyse numérique*
- Formulation comme gaz de boucles
  - *Exposants critiques*
  - *Pliage de quadrangulations aléatoires*



# Pliage du réseau triangulaire



On plie **le long des arêtes** du réseau  
Les **triangles** restent **indéformables** (équilatéraux de côté 1)

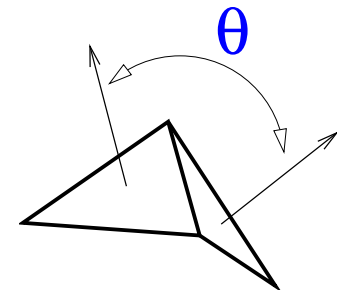
Nœud  $v$  du réseau  $\rightarrow$  position  $X_v$  avec la contrainte

$$|X_v - X_w| = 1$$

si  $v$  et  $w$  sont voisins sur le réseau

Énergie de courbure  $E = -K \cos(\theta)$

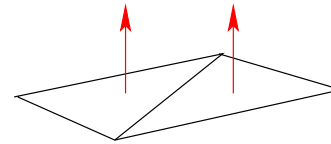
$\rightarrow$  *discrétisation de membranes polymérisées rigides*



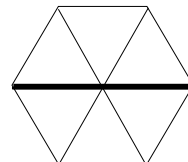
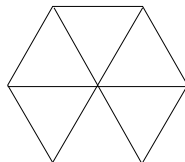
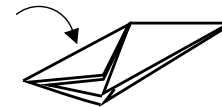
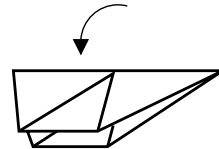
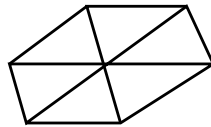
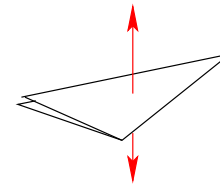
# Piage plan : un modèle à 11 vertex

Kantor, Jarić 1990

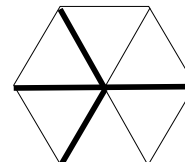
angle  $\theta = 0^\circ$  (pas de pli)



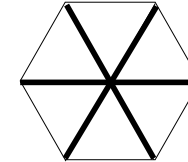
ou  $\theta = 180^\circ$  (pli)



(x3)

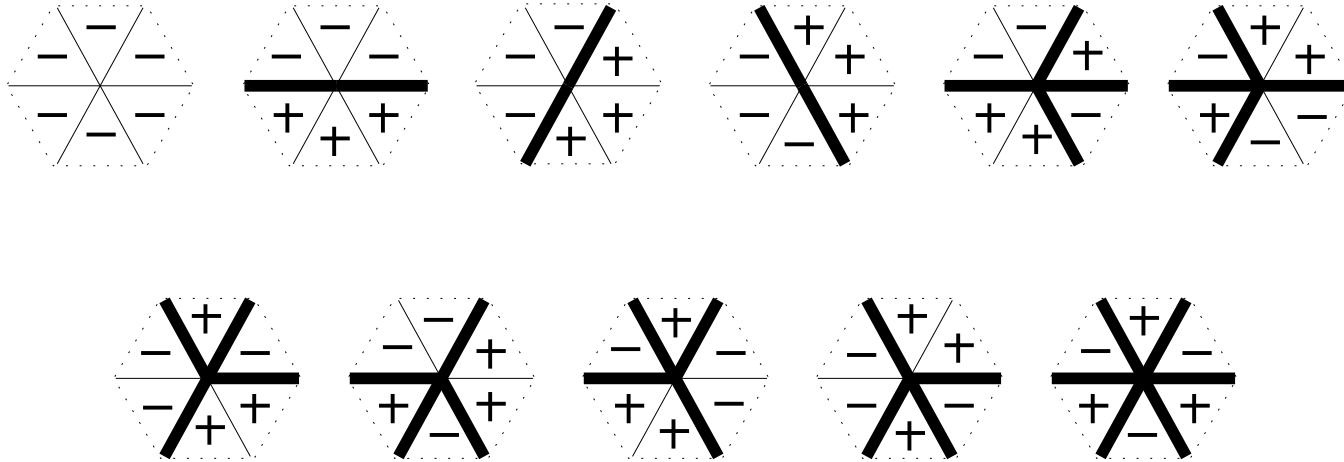


(x6)



→ 11 environnements possibles autour d'un nœud

# Version spins contraints



Spins d'Ising  $\sigma = \pm 1$

**Contrainte :** 
$$\sum_{i=1}^6 \sigma_i = 0 \pmod{3}$$

pour les six spins autour de chaque nœud

→ Permet une étude du diagramme de phase par  
matrice de transfert, Cluster Variational Method  
Cirillo, Gonnella, Pelizzola 1993, ...

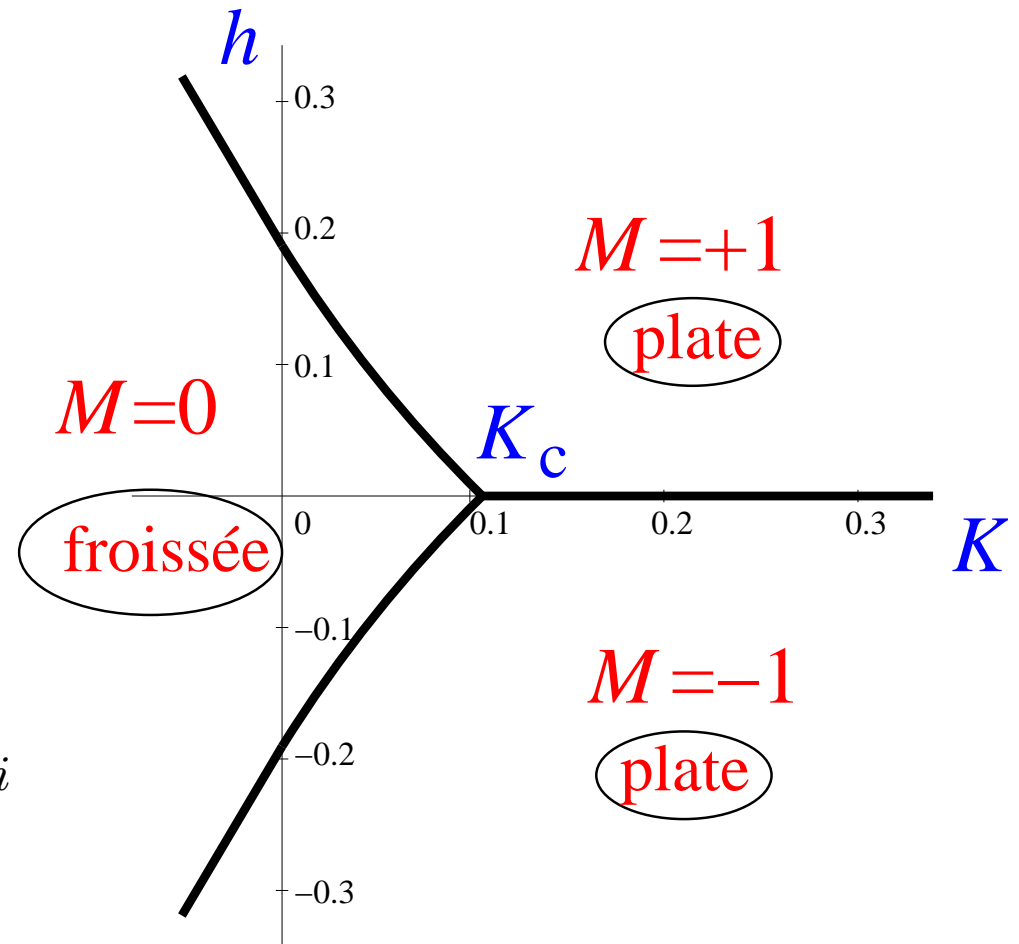
Transition de froissement **du premier ordre** entre une phase **froissée** et une phase complètement **plate** (état pur  $\sigma = +1$ )

$$M = \langle \sigma \rangle$$

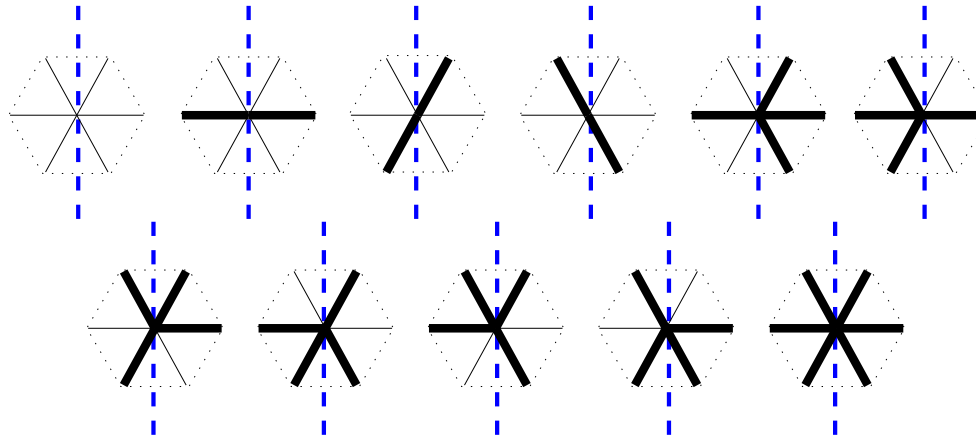
$K$  : courbure

$h$  : tension latérale

$$E = -K \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i$$



# État plat : pas d'excitations locales

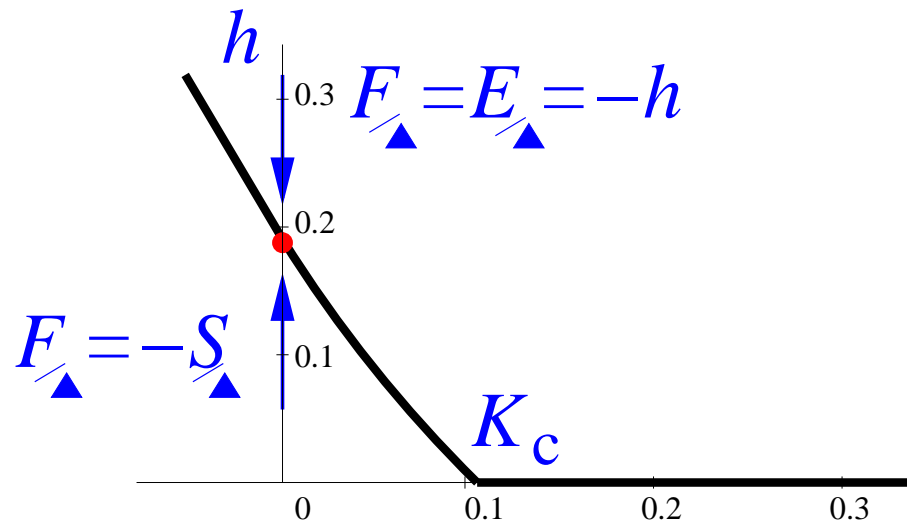


# Entropie dans la phase froissée :

Entropie de pliage

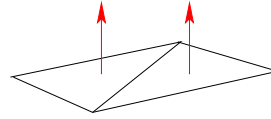
$$\text{Nb. pliages} \sim e^{N_{\blacktriangle} S_{\blacktriangle}}$$

$$S_{\blacktriangle} = h$$

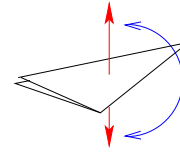


# Généralisation : Pliage sur réseau CFC

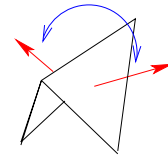
angle  $\theta = 0^\circ$  (pas de pli)



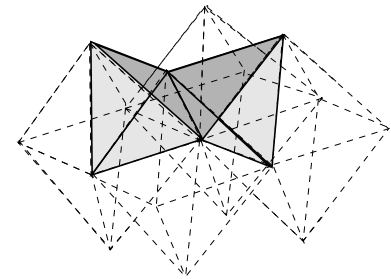
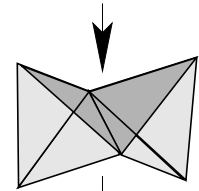
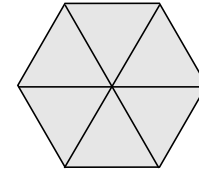
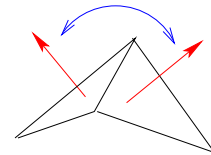
ou  $\theta = 180^\circ$  (pli)



ou  $\theta = 109^\circ 28'$  (pli aigu)



ou  $\theta = 70^\circ 32'$  (pli obtus)



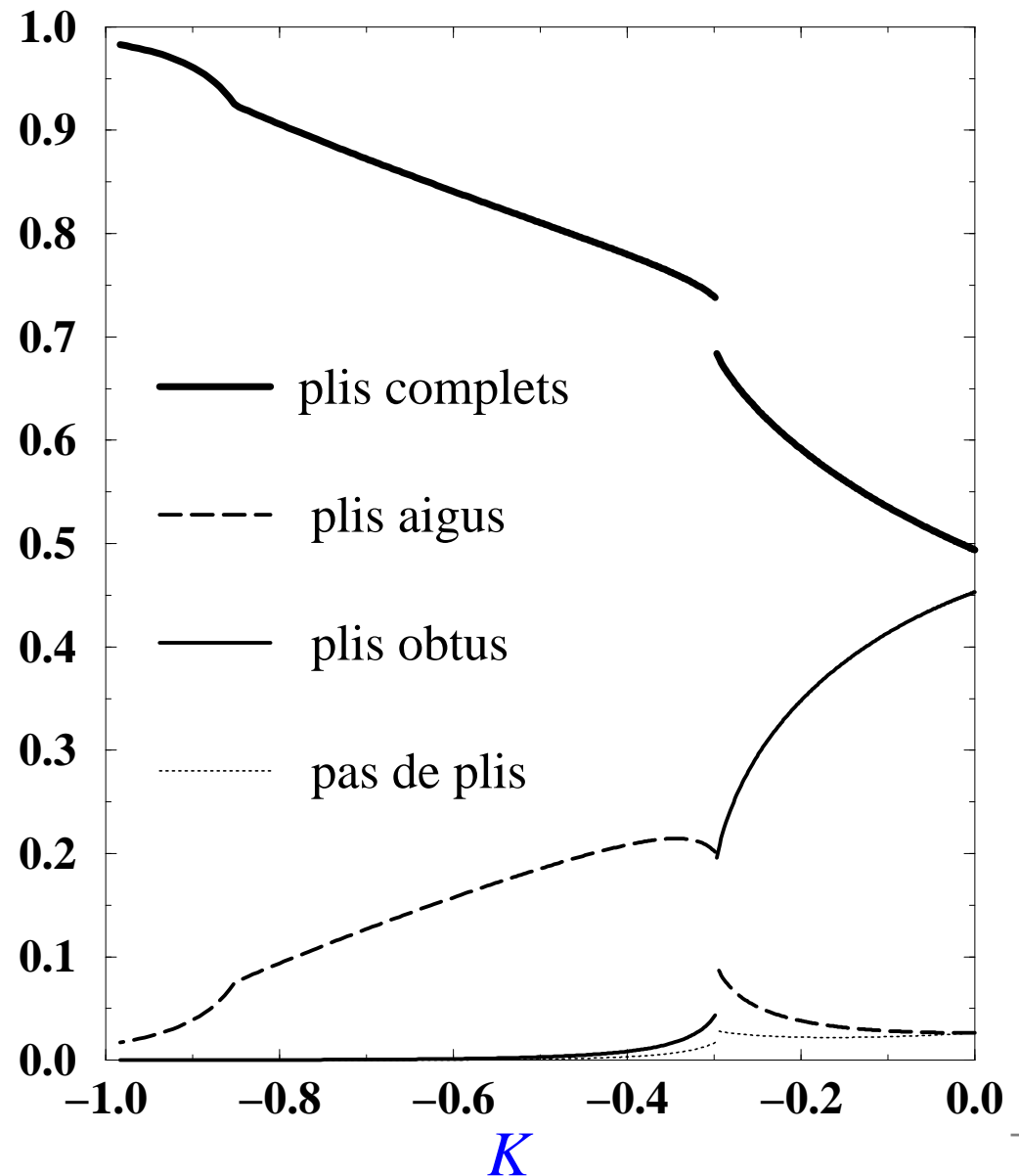
→ le réseau se plie sur un réseau Cubique Faces Centrées

- Modèle à 96 vertex
- Deux variables de spins d'Ising + **contraintes**
- Transition de froissement du premier ordre

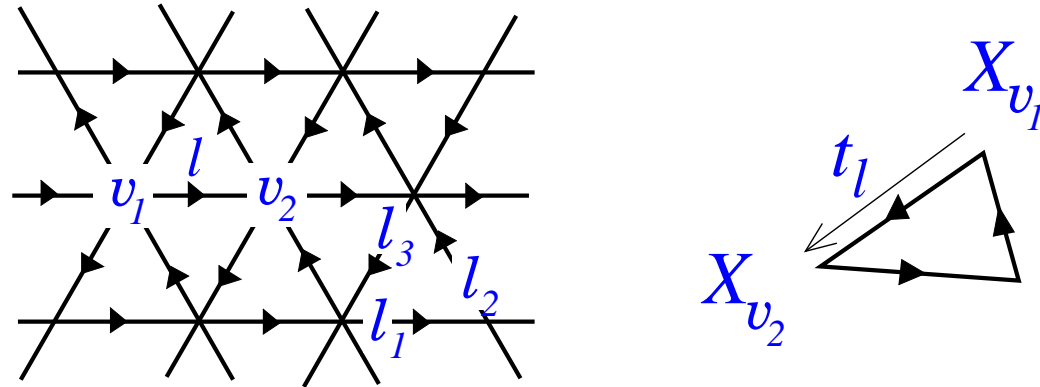
**Repliement** en deux  
temps à  $K$  négatif :

1<sup>e</sup> transition discontinue

2<sup>e</sup> transition continue



# Version couleurs



Variables de liens :  $l \equiv v_1 \rightarrow v_2$

$$t_l \equiv X_{v_2} - X_{v_1}$$

Les variables de liens sont de norme 1 et satisfont

$$t_{l_1} + t_{l_2} + t_{l_3} = 0$$

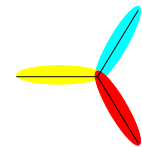
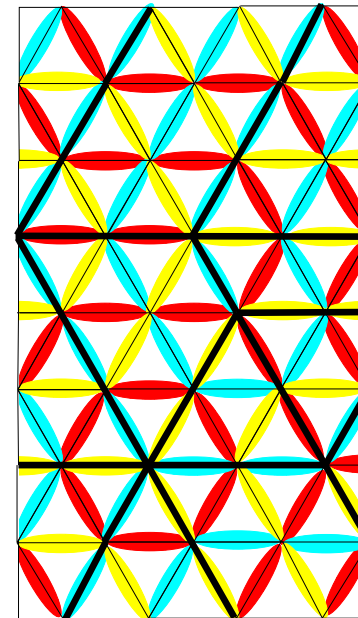
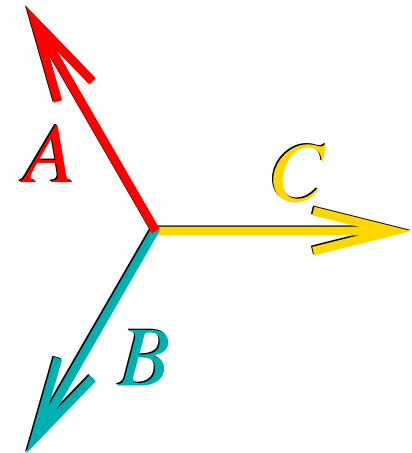
pour les trois liens autour de chaque triangle

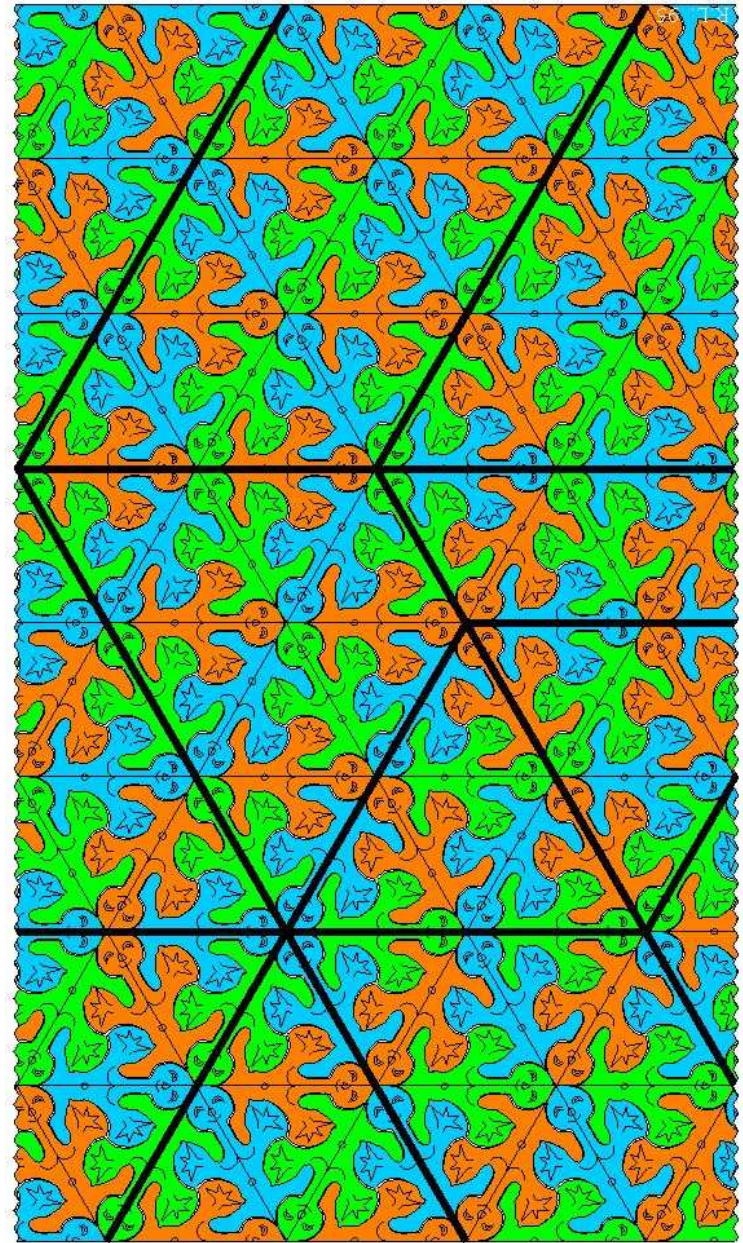
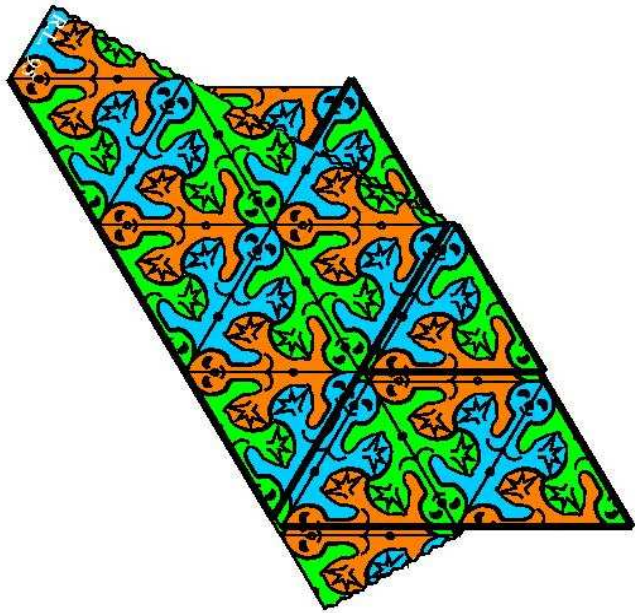


À deux dimensions, les variables de liens ne peuvent prendre que trois valeurs  
 $\{t_{l_1}, t_{l_2}, t_{l_3}\} = \{A, B, C\}$   
autour de chaque triangle.

Problème des trois couleurs :

couleur  $\equiv$  orientation du lien  
dans la config. pliée





Entropie de pliage :  $S_{/\blacktriangle} = \log(q)$

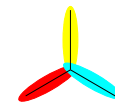
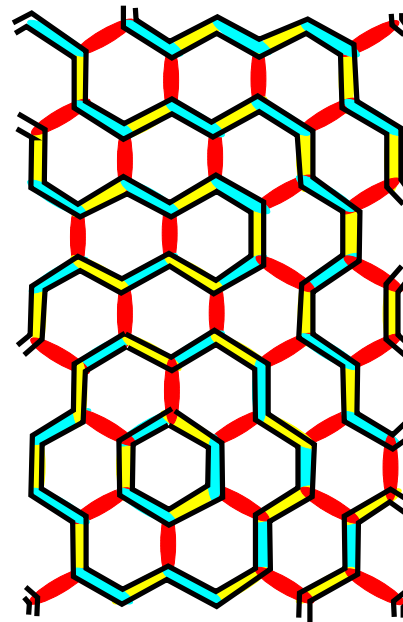
Nb. de pliages  $\sim q^{\text{Nb. de triangles}}$

$$q = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)}{\sqrt{3n(3n-2)}} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \Gamma(1/3)^{3/2} = 1,208\dots \text{ Baxter 1970}$$

Gaz de boucles compactes :

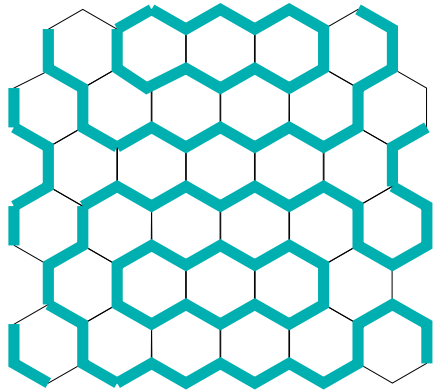
Les liens de couleur  $B$  et  $C$  forment des boucles compactes sur le réseau hexagonal

Poids 2 par boucle (échange de  $B$  et  $C$ )

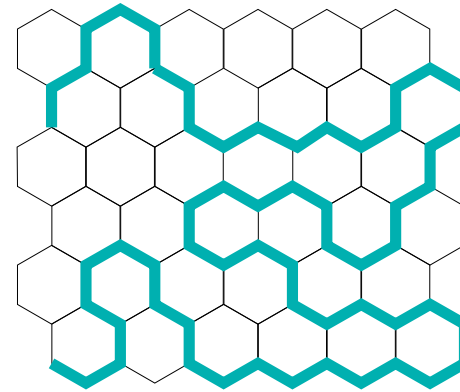


# Boucles compactes

Blöte, Nienhuis 1994; Kondev, de Gier, Nienhuis 1996

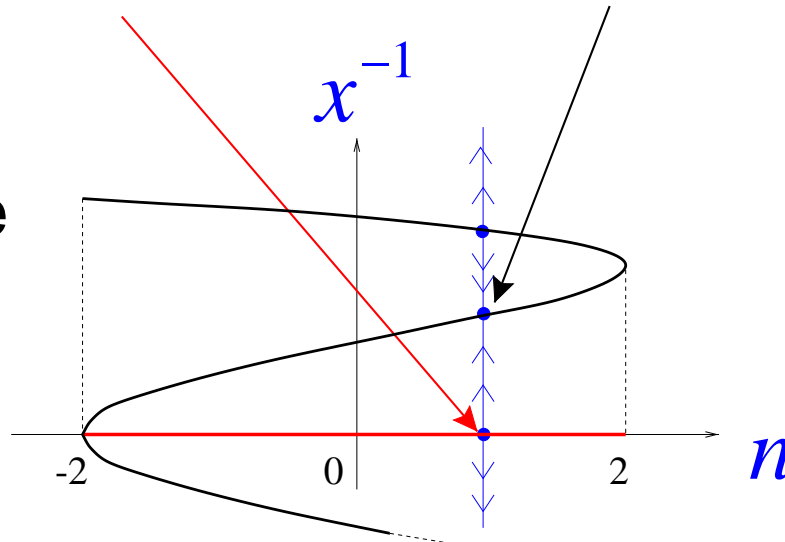


boucles compactes ( $x \rightarrow \infty$ )

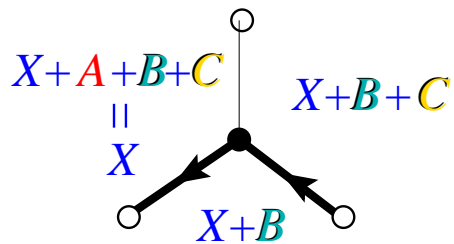
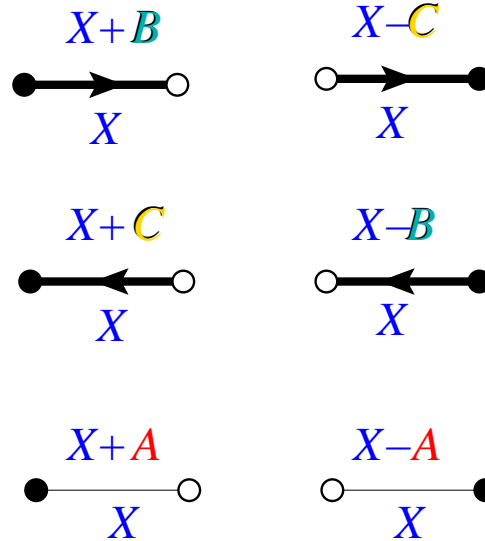
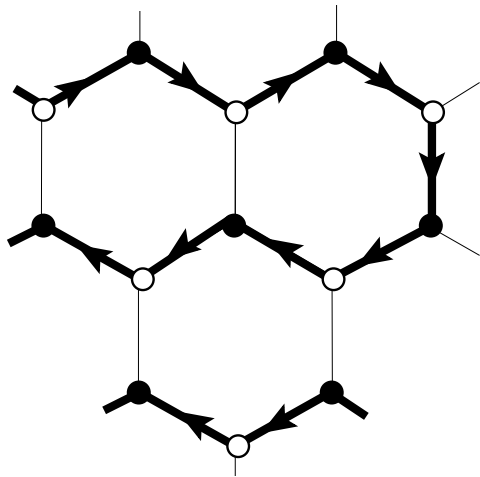


boucles denses

Poids  $x$  par lien occupé  
Poids  $n$  par boucle  
(**pliage**  $\leftrightarrow n = 2$ )

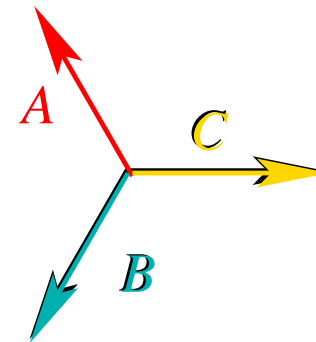


- $n = 2$  : (On oriente les boucles)  $\rightarrow$  Variables de hauteurs



$$A+B+C=0$$

2 dimensions

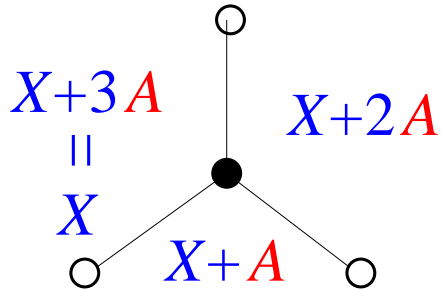


hauteur  $\equiv$  position des nœuds dans le pliage associé

Hauteur 2D  $\rightarrow c_{compact} = 2$

→ Cas dense :

$$A=0 \text{ et } B+C=0$$



1 dimension

$$A=0$$

$$B=1$$

$$C=-1$$

$$\begin{array}{c} X+1 \\ \longrightarrow \\ X \end{array}$$

$$\begin{array}{c} X-1 \\ \longleftarrow \\ X \end{array}$$

$$\frac{X}{X}$$

Hauteur 1D (*modèle SOS*) →  $c_{\text{dense}} = 1$

•  $n \leq 2$  :  $n = 2 \cos(\pi e)$

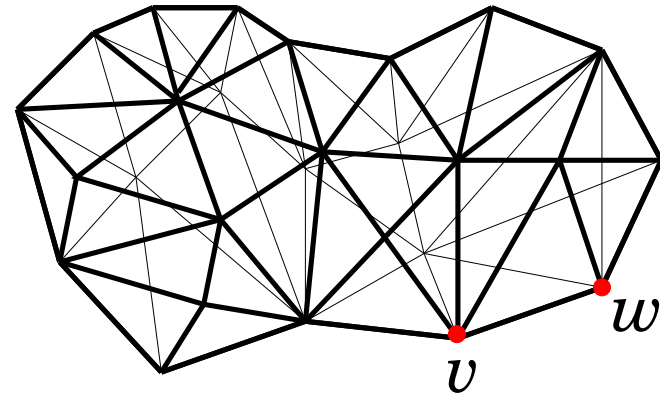
$$c_{\text{dense}} = 1 - 6 \frac{e^2}{1-e}$$

$$c_{\text{compact}} = c_{\text{dense}} + 1 = 2 - 6 \frac{e^2}{1-e}$$

# Piage de triangulations aléatoires

→ *discrétisation de membranes fluides*

Triangulation (de genre 0)



Piage :

Nœud  $v$  de la triangulation

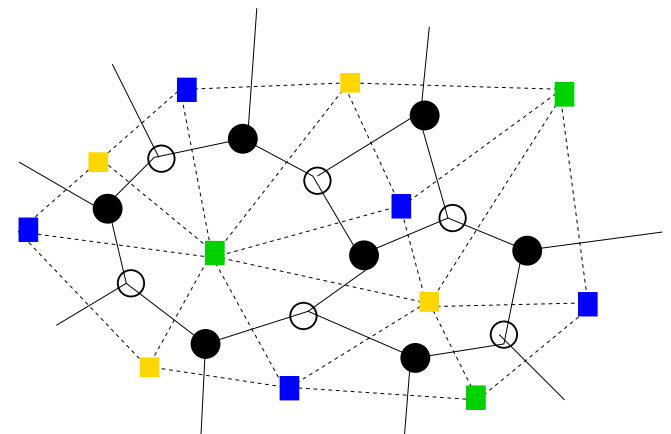
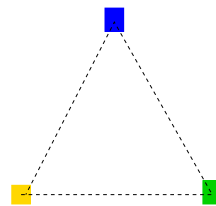
→ position  $X_v$  avec la contrainte  $|X_v - X_w| = 1$

Piage plan : Question de la **pliabilité**

Pliable

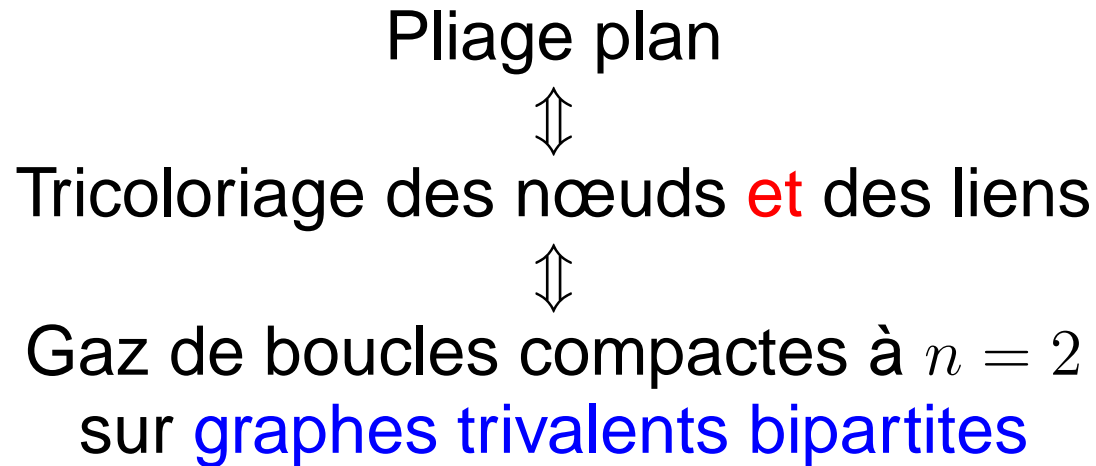


Tricoloriable des nœuds



Eulérien  $\equiv$  nombre **pair** de triangles autour de chaque face

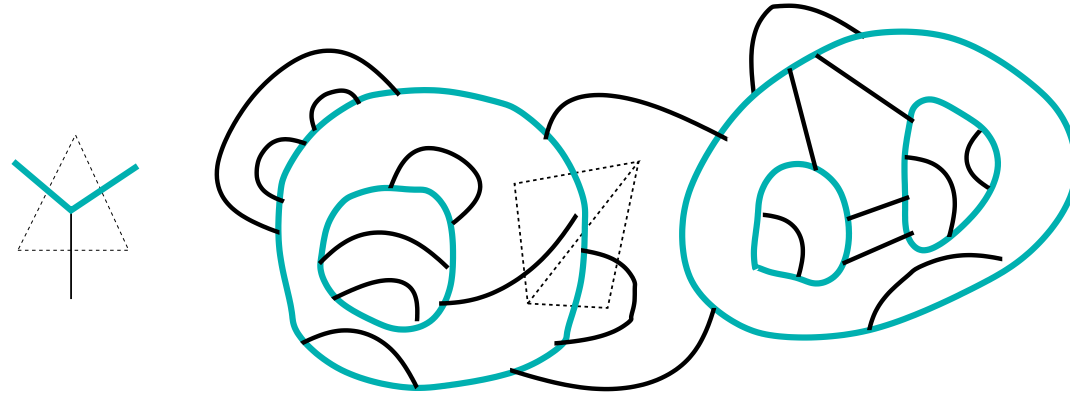
On peut bicolorier les triangles → le dual est bipartite



Le caractère **bipartite** du graphe trivalent (*i.e.* la **pliabilité** de la triangulation duale) est crucial pour pouvoir construire une hauteur 2D (*position dans le pliage associé*)

Le phénomène  $c_{\text{compact}} = c_{\text{dense}} + 1$  pour les boucles compactes sur graphes trivalents aléatoires nécessite des graphes **bipartites**





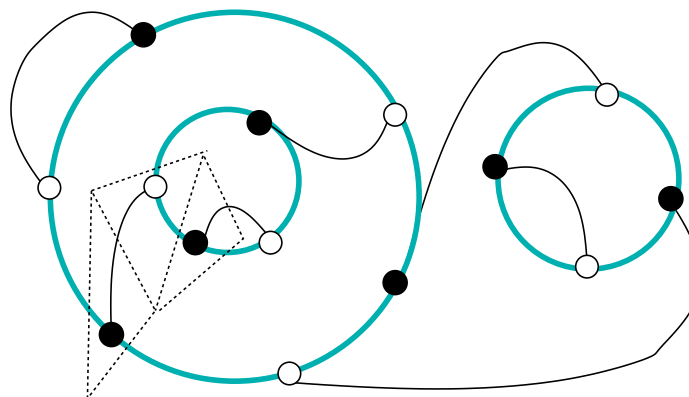
Nombre config.  $\sim q^N N^{\gamma-3}$  pour  $N$  triangles

$$c \leftrightarrow \gamma = \frac{c - 1 - \sqrt{(25 - c)(1 - c)}}{12} \quad (\text{K.P.Z.})$$

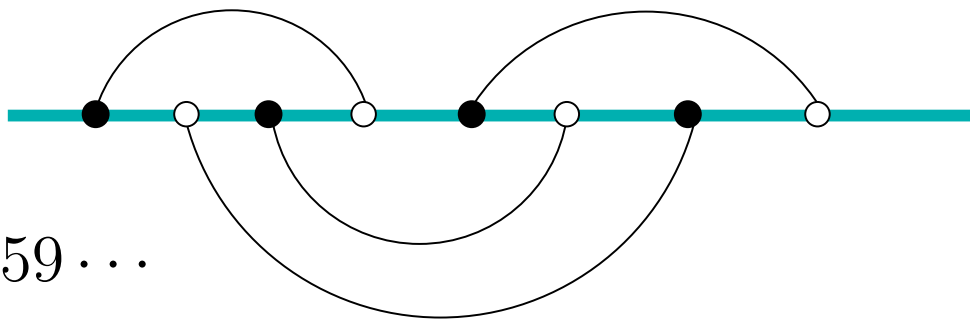
- $c = c_{\text{dense}} = 1 - 6 \frac{e^2}{1-e}$  ( $n = 2 \cos(\pi e)$ ) pour des graphes trivalents arbitraires **Kostov 1989**

- $c = c_{\text{compact}} = 2 - 6 \frac{e^2}{1-e}$  ( $n = 2 \cos(\pi e)$ ) pour des graphes trivalents **bipartites**

## Vérification :

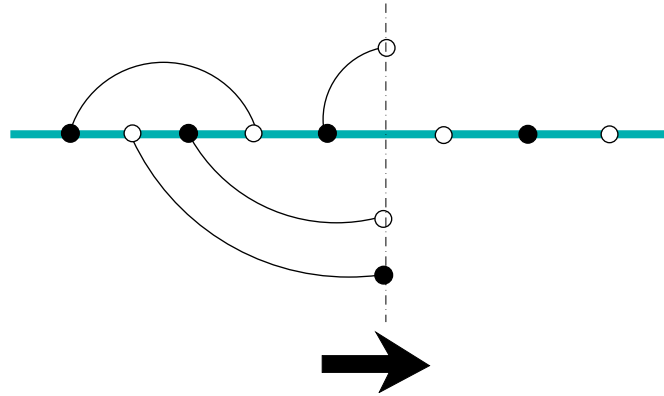


- $n = 2, c = 2$  est au delà de la barrière  $c = 1$
- $n = 1, c = 1$  prouvé par équivalence avec point critique du modèle à 6-vertex gravitationnel **Kazakov, Zinn-Justin 1999**
- limite  $n \rightarrow 0, c = -1$  : cycles Hamiltoniens sur graphes trivalents bipartites



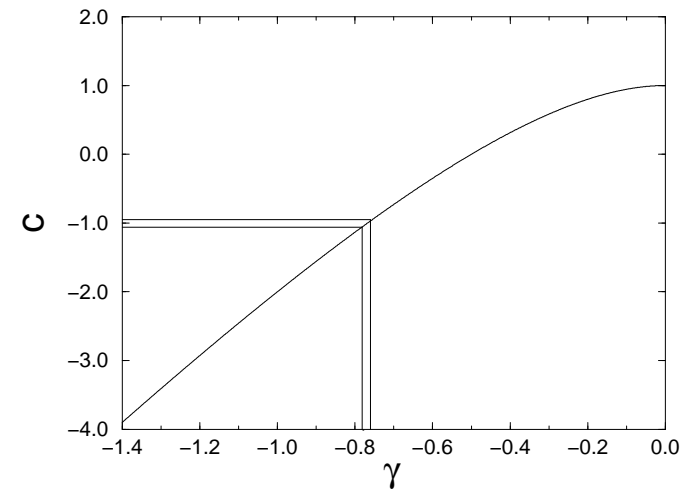
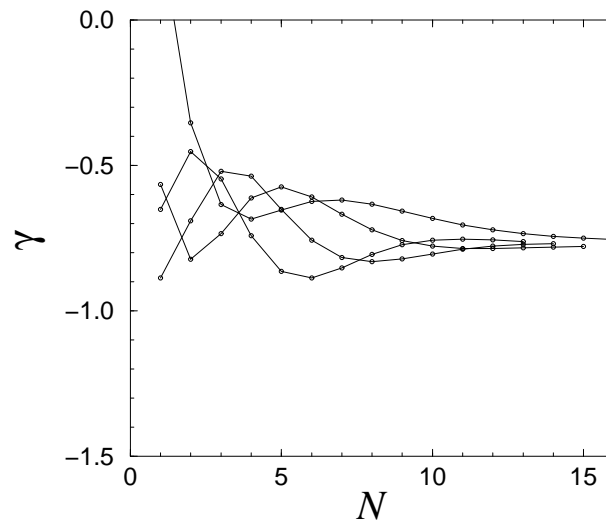
$$\gamma = -\frac{1 + \sqrt{13}}{6} = -0.76759 \dots$$

Matrice de transfert :



Résultats numériques :

1	2
2	8
3	40
4	228
5	1424
6	9520
7	67064
8	492292
9	3735112
10	29114128
11	232077344
12	1885195276
13	15562235264
14	130263211680
15	1103650297320
16	9450760284100
17	81696139565864
18	712188311673280
19	6255662512111248
20	55324571848957688
21	492328039660580784
22	4406003100524940624



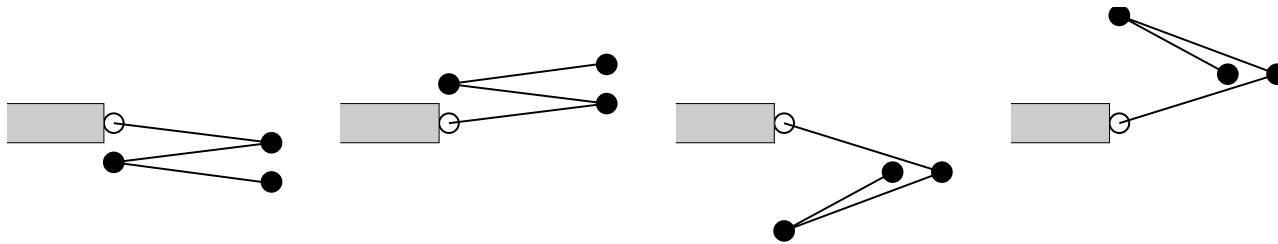
$$\gamma = -0.77 \pm 0.01 \quad c = -1 \pm 0.05$$

# Méandres

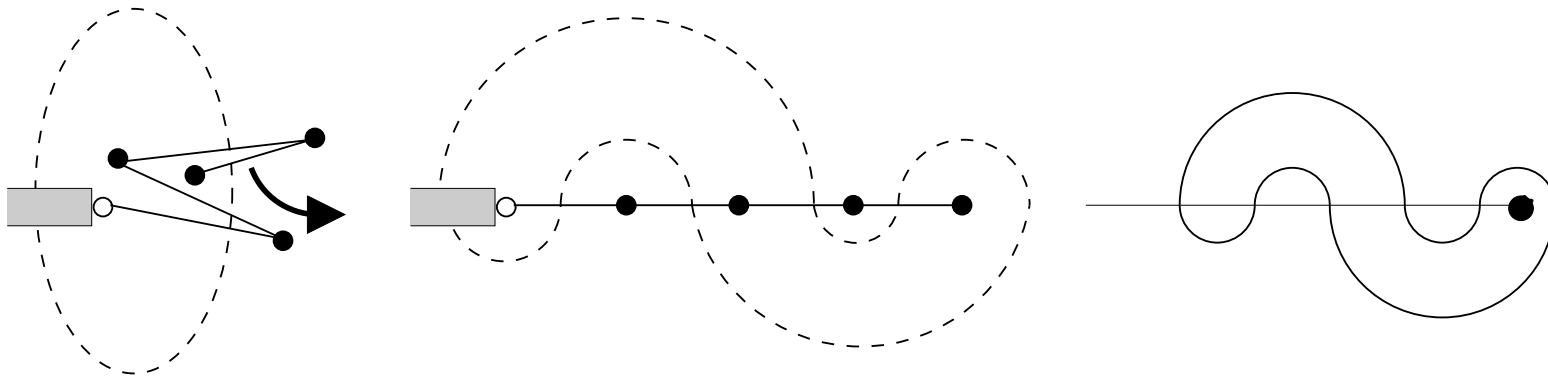
Replie ment **AUTO-ÉVITANT** d'une chaîne sur elle-même

Énumération → problème combinatoire

- "Problème des **timbres postes**" (*Replie ment sur un seul timbre*)

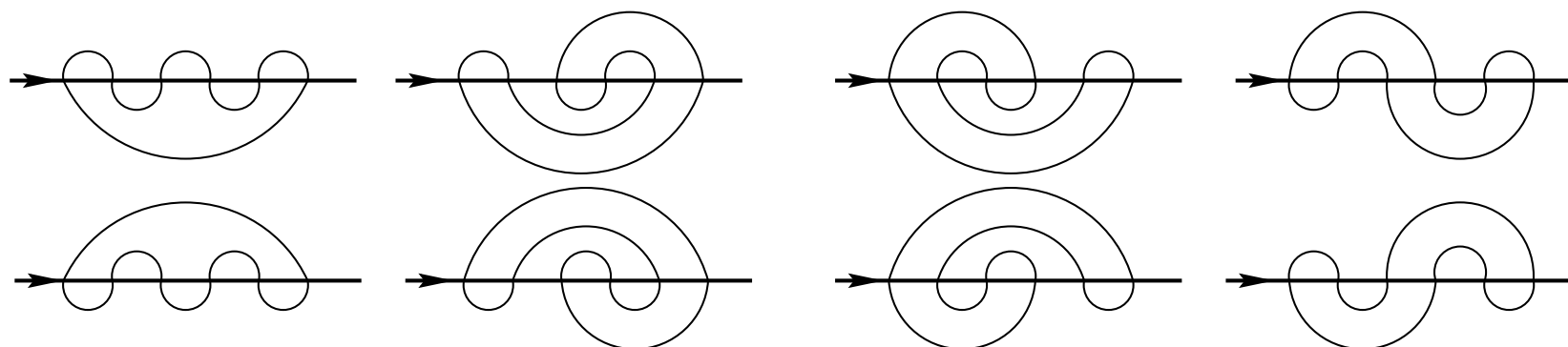


- "Problème des **méandres**"

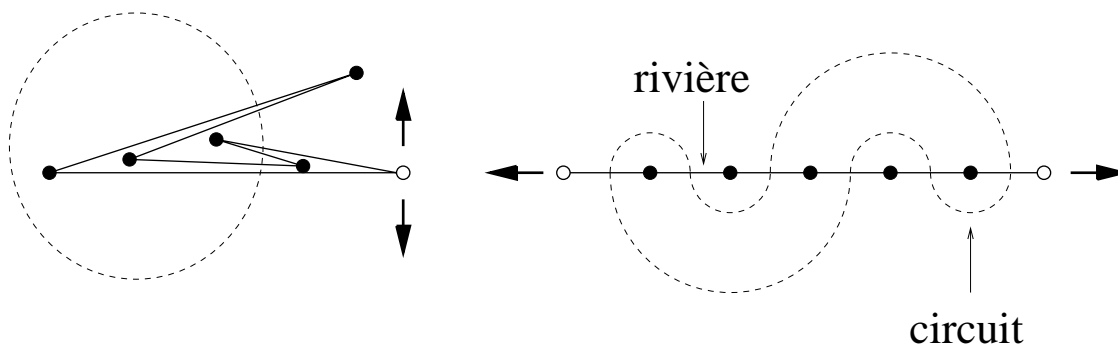


semi-méandre

Problème original : Compter le nombre de configurations  
 (topologiquement inéquivalentes) d'un circuit fermé croisant une  
 rivière (orientée) un nombre donné de ponts.



repliement d'une bande **fermée** sur un seul timbre (marqué)



# Historique

1891 Lucas énonce le problème des timbres poste

1926 Sainte Laguë

Enumération jusqu'à  $n = 10$  timbres (faux pour  $n \geq 7$ )

Corrigé dans son ouvrage de 1937 "Avec des nombres et des lignes"

1950 Touchard

1968 Lunnon  $\rightarrow n = 24$  grâce à un algorithme astucieux

1988 Arnol'd  $\rightarrow$  "Méandre"

en relation avec le 16ème problème de Hilbert

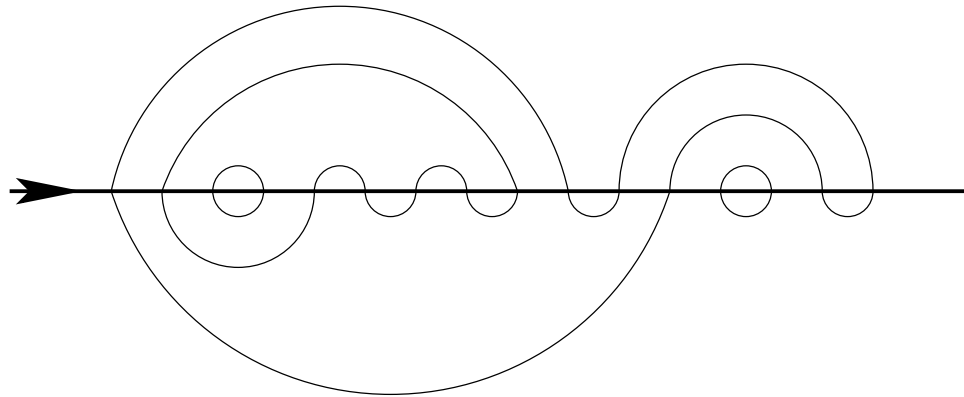
1992 Lando Zvonkin

$\rightarrow$  Méandres (2 particules-)irréductibles

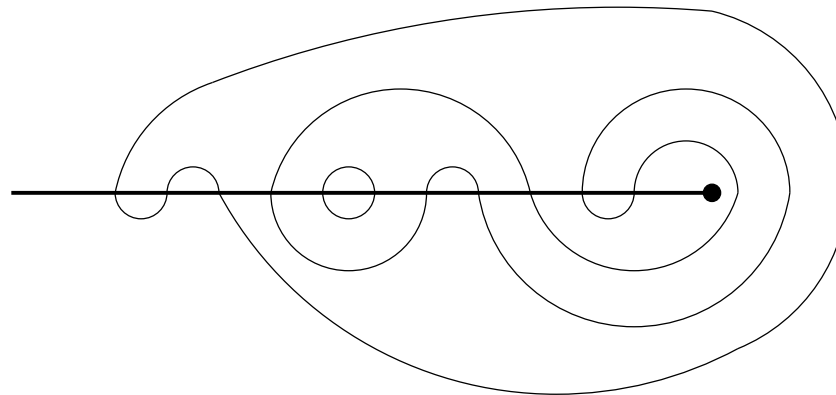
$\rightarrow$  version modèle de matrice (Kazakov/Kostov)

# Méandres généralisés

- Méandres :  $2n$  ponts,  $k$  circuits  $\rightarrow M_n^{(k)}$  configurations



- Semi-méandres :  $n$  ponts,  $k$  circuits  $\rightarrow SM_n^{(k)}$  config.



$\rightarrow$  Nombre d'enroulement  $w$

# Fonction de partition / Exposants

Poids  $q$  par circuit ( $\equiv$  boucle  $\equiv$  composante connexe)

$$M_n(q) = \sum_{k=0}^n M_n^{(k)} q^k \quad SM_n(q) = \sum_{k=0}^n SM_n^{(k)} q^k$$

Entropie/Exposants :

$$M_n(q) \sim C(q) \frac{R(q)^{2n}}{n^{\alpha(q)}} \quad SM_n(q) \sim \bar{C}(q) \frac{\bar{R}(q)^n}{n^{\bar{\alpha}(q)}}$$

$$\langle w \rangle_n(q) \sim n^{\nu(q)}$$

Clairement  $\bar{R}(q) \geq R(q)$

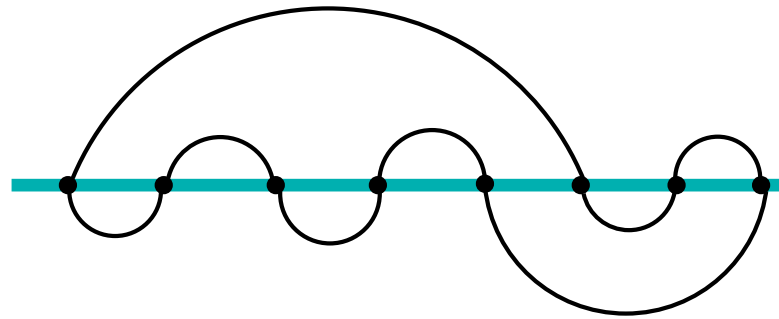
Deux possibilités :  $\nu(q) < 1$ ,  $\bar{R}(q) = R(q)$

ou  $\nu(q) = 1$ ,  $\bar{R}(q) > R(q)$



# Résultats exacts

Combinatoire élémentaire → statistique d'arches



•  $q = 1$  :

$$R(1) = \bar{R}(1) = 4$$

$$\alpha(1) = 3 \quad \bar{\alpha}(1) = 3/2$$

$$\nu(1) = 1/2$$

•  $q \rightarrow \infty$  :

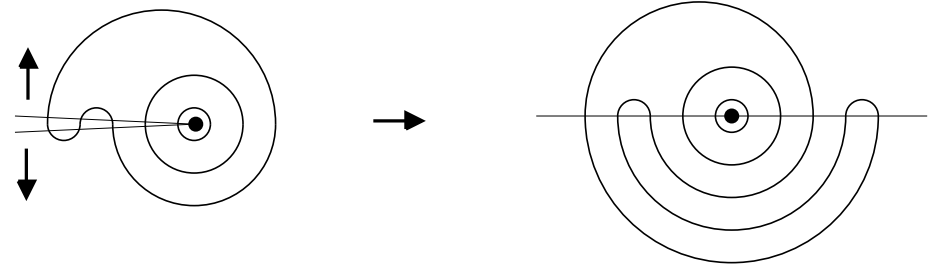
$$R(q) \sim 2\sqrt{q} < \bar{R}(q) \sim q$$

$$\alpha(\infty) = 3/2 \quad \bar{\alpha}(\infty) = 0$$

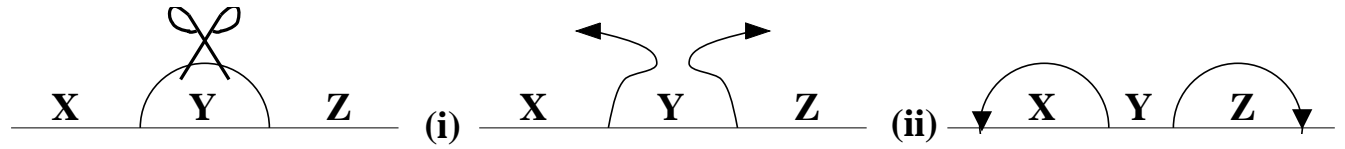
$$\nu(\infty) = 1$$

# Numérique

- Croissance d'arches



$n \rightarrow n+1$



(I)

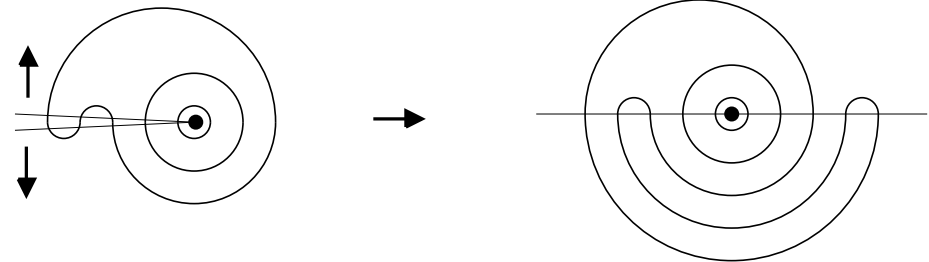
$n \rightarrow n+1$



(II)

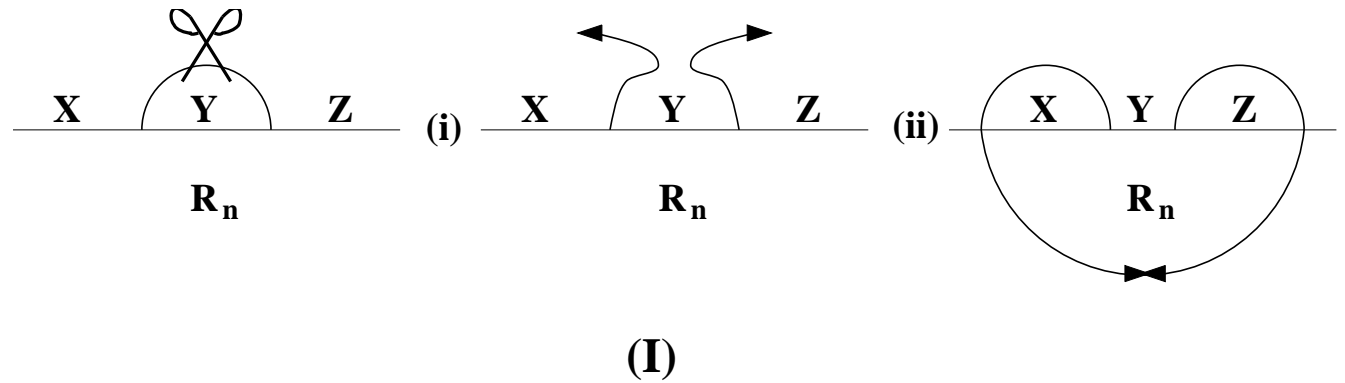
# Numérique

- Croissance d'arches



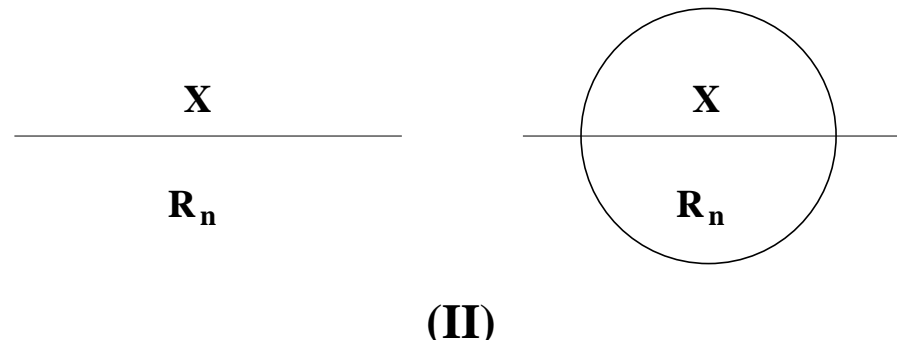
$n \rightarrow n+1$

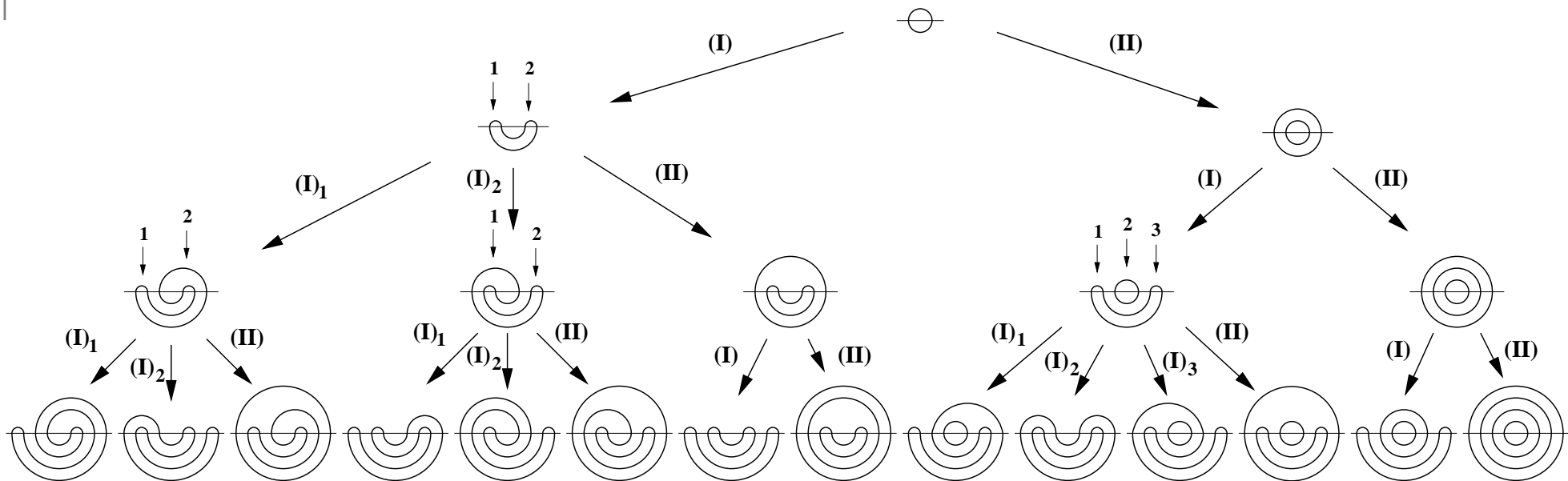
$k \rightarrow k$



$n \rightarrow n+1$

$k \rightarrow k+1$





L'opération (II) est triviale

C'est l'opération (I) qui est non triviale

Pour  $k = n - l$  (i.e.  $l$  opérations (I) parmi  $n$ )

$SM_n^{(n-l)}$  a une forme simple pour  $l$  fini et  $n$  assez grand.

- Matrice de transfert

### Opérations:

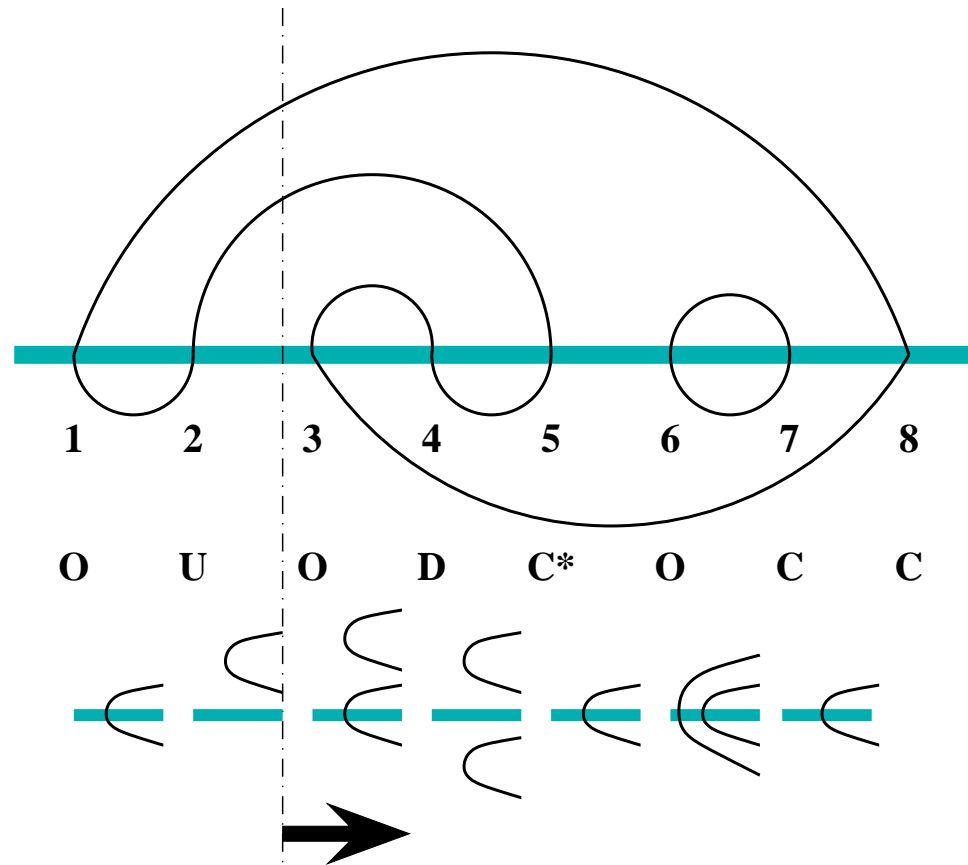
**O:** ouverture d'arche

**C:** fermeture d'arche

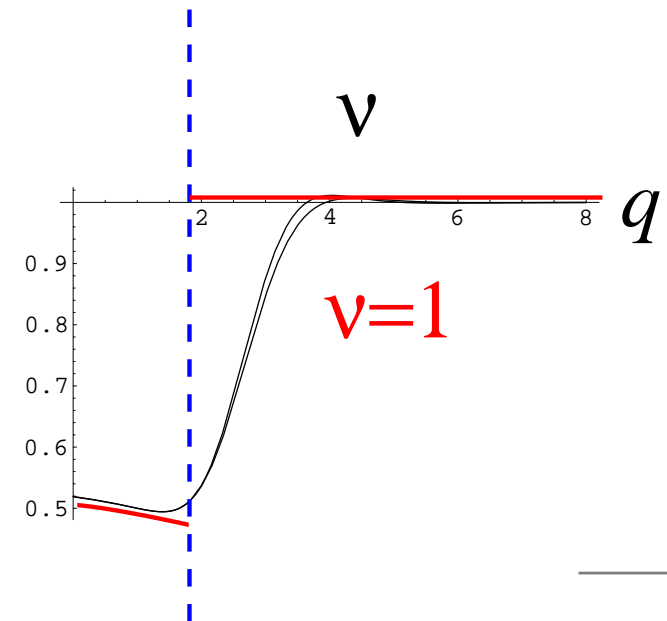
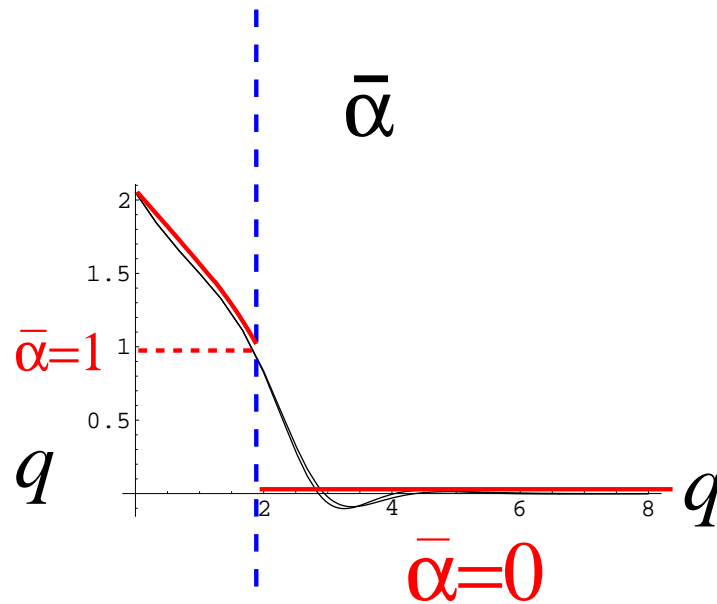
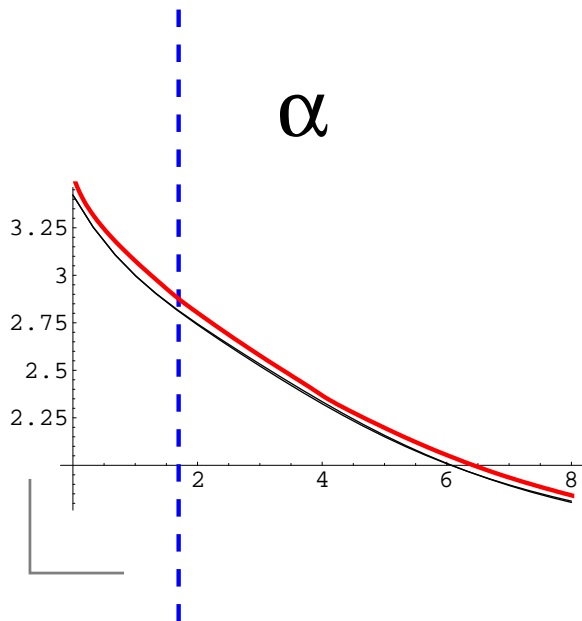
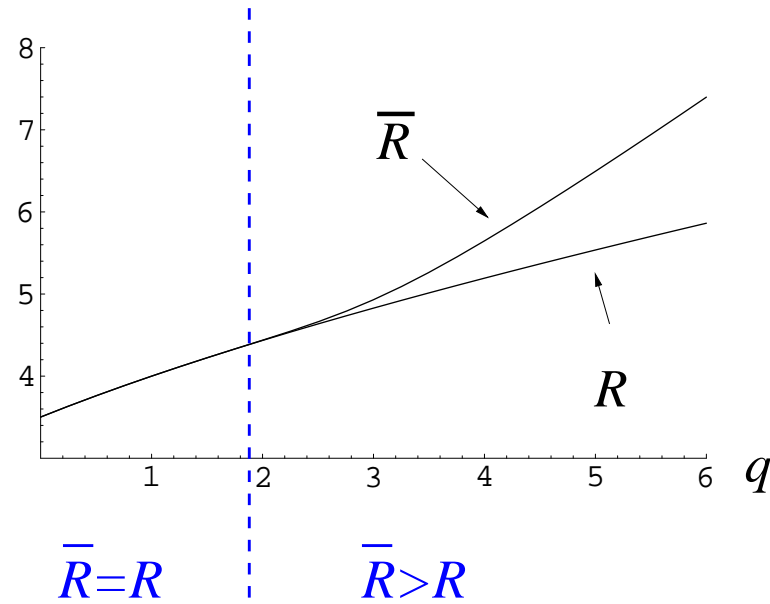
**D:** descente arches / rivière

**U:** montée arches / rivière

**Etat=** système d'arches  
+ position rivière



# Analyse des résultats



- Régime à  $q$  grand : accessible par un développement à partir de  $q = \infty$

$$\begin{aligned} \bar{R}(q) = & q + 1 + \frac{2}{q} + \frac{2}{q^2} + \frac{2}{q^3} - \frac{4}{q^5} - \frac{8}{q^6} - \frac{12}{q^7} - \frac{10}{q^8} - \frac{4}{q^9} + \frac{12}{q^{10}} \\ & + \frac{46}{q^{11}} + \frac{98}{q^{12}} + \frac{154}{q^{13}} + \frac{124}{q^{14}} + \frac{10}{q^{15}} - \frac{102}{q^{16}} + \frac{20}{q^{17}} - \frac{64}{q^{18}} + \dots \end{aligned}$$

- Limite  $q \rightarrow 0$       Golinelli 1999, Jensen 2000

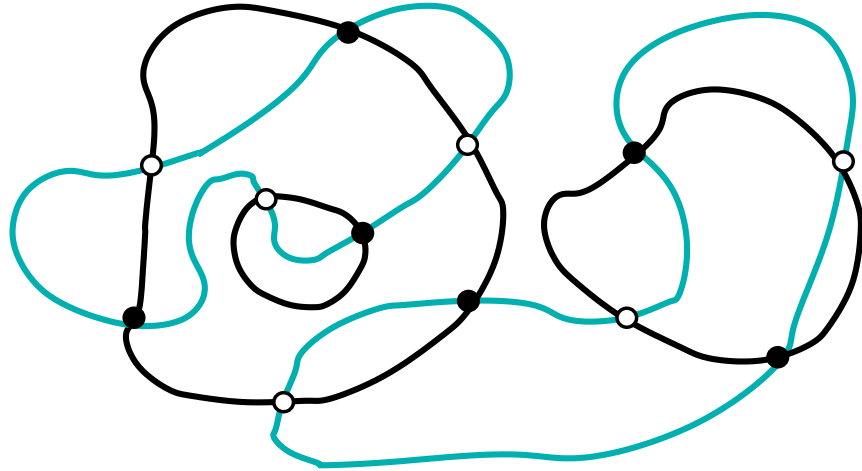
$$R(q = 0) = \bar{R}(q = 0) = 3,501837(3)$$

$$\alpha(q = 0) = 3,4208(6) \quad \bar{\alpha}(q = 0) = 2,0537(2)$$

$$\nu(q = 0) = 0,518(2)$$

# Version gaz de boucles

Méandres  $\equiv$  boucles compactes sur graphes tétravalents bipartites



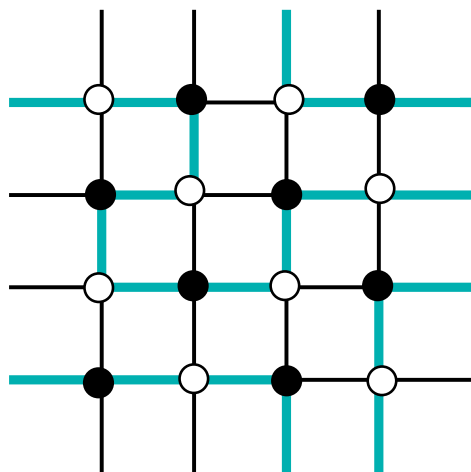
- deux systèmes de boucles compactes :  
Poids  $n_1$  par boucle de type 1  
Poids  $n_2$  par boucle de type 2
  - les boucles se croisent
- Le caractère **bipartite** est automatique

Méandres (*resp. généralisés*) :  $n_1 \rightarrow 0, n_2 \rightarrow 0$  (*resp.  $n_2 = q$* )

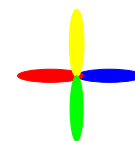


Quel modèle sur réseau régulier?

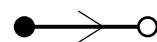
Deux systèmes de boucles compactes sur réseau carré :  
modèle FPL<sup>2</sup> **Jacobsen, Kondev 1998**



$$\underline{n_1 = n_2 = 2}$$



$X+A$



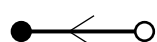
$X$

$X+C$



$X$

$X+B$

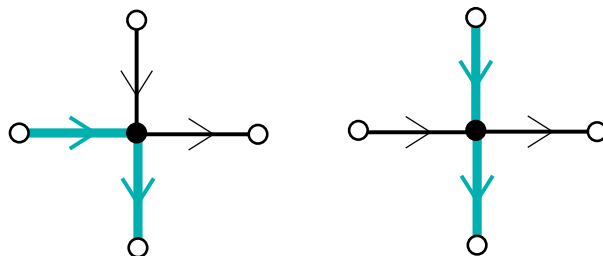


$X$

$X+D$



$X$



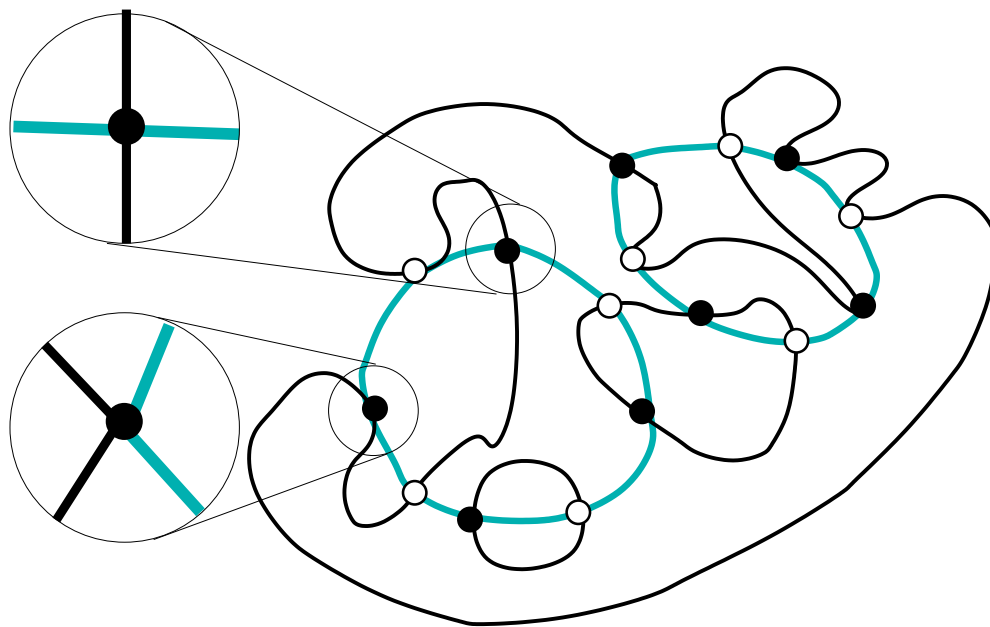
$$A+B+C+D=0$$

3 dimensions

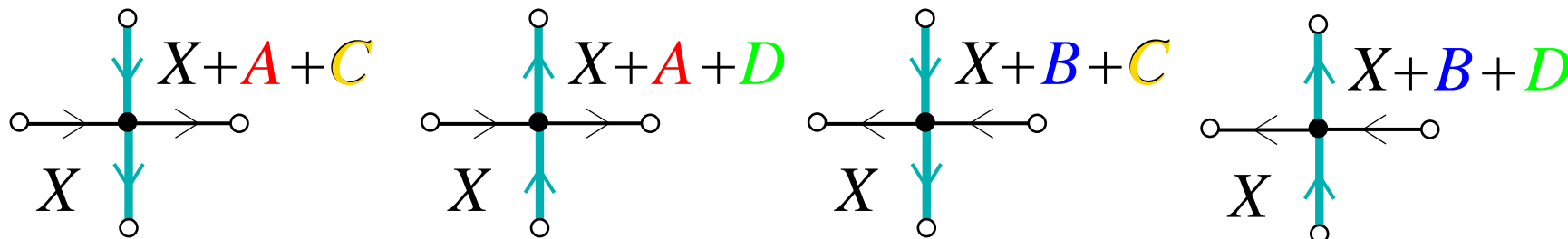
Théorie de charge centrale :  $n_1 = 2 \cos(\pi e_1)$   $n_2 = 2 \cos(\pi e_2)$

$$\begin{aligned}
 c_{\text{FPL}^2} &= 3 - 6 \frac{e_1^2}{1-e_1} - 6 \frac{e_2^2}{1-e_2} \\
 &= c_{\text{dense}}(n_1) + c_{\text{dense}}(n_2) + 1
 \end{aligned}$$

Méandres tangents :



Que se passe-t-il si on ne garde que le vertex de croisement?



$$A+B+C+D=0$$

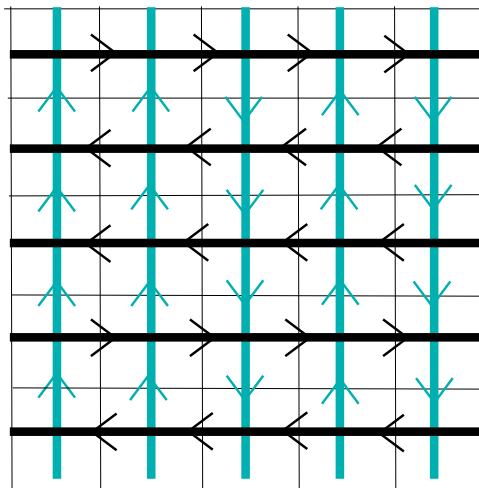
la direction  $A+B$  n'est pas explorée

2 dimensions

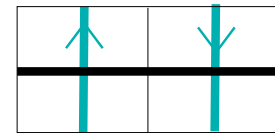
On peut poser

$$A + B = 0$$

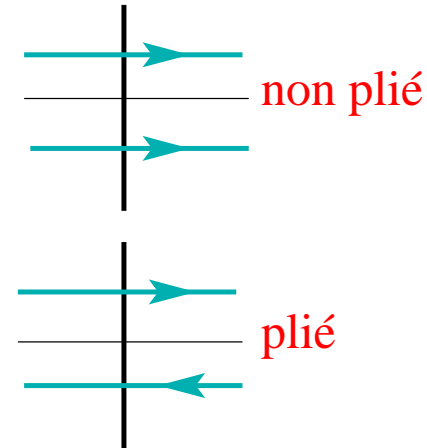
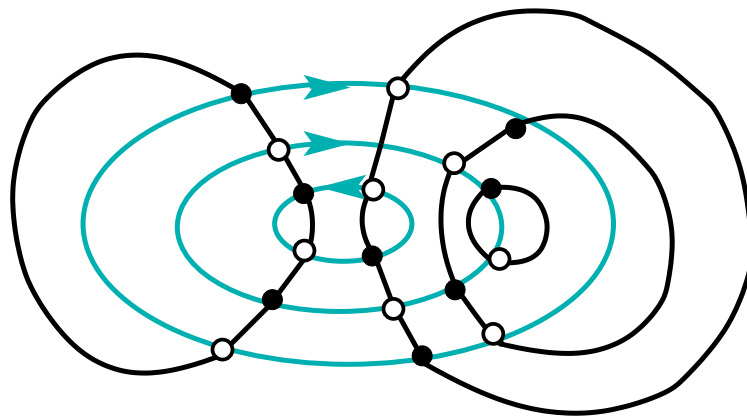
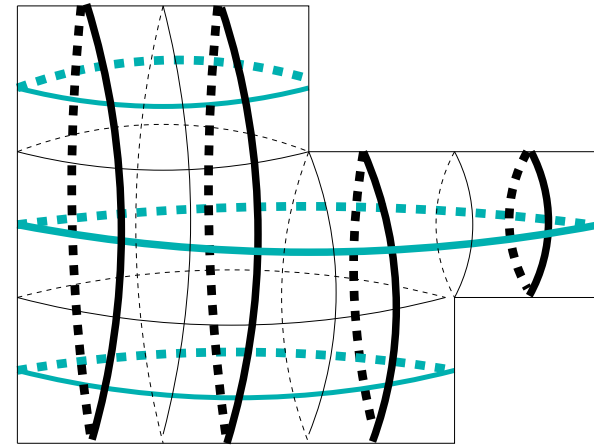
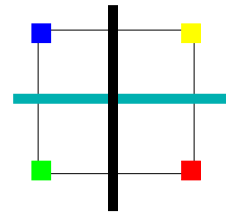
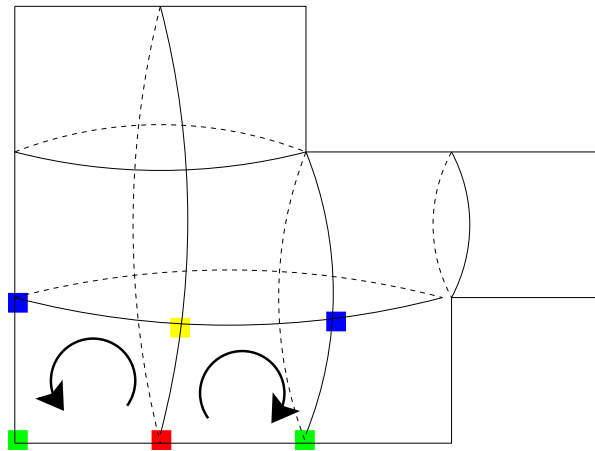
→ Pliage plan  
du réseau carré



↑  
non plié



↑  
plié



Méandres généralisés ( $n_1 = n_2 = 2$ )



Pliage plan de quadrangulations aléatoires **pliables**  
 = **Quadricoloriable** des nœuds = **Eulériennes**  
 = duales de graphes tétravalents **bipartites**

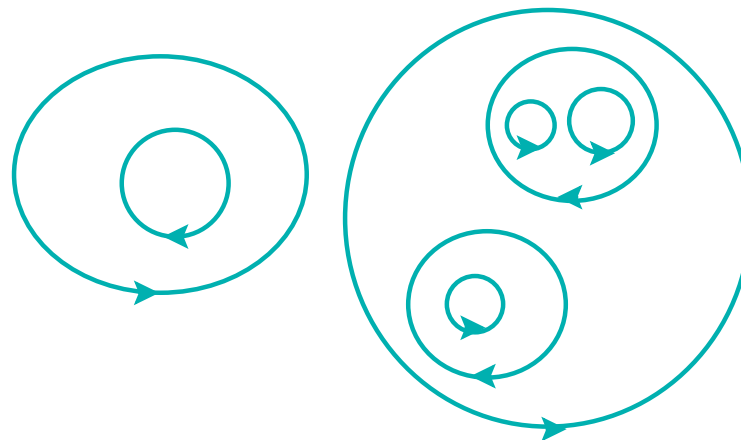
Charge centrale :  $n_1 = 2 \cos(\pi e_1)$ ,  $n_2 = 2 \cos \pi(e_2)$

$$\begin{aligned} c_{\text{méandre}} &= 2 - 6 \frac{e_1^2}{1-e_1} - 6 \frac{e_2^2}{1-e_2} \\ &= c_{\text{dense}}(n_1) + c_{\text{dense}}(n_2) \end{aligned}$$

Cas particuliers :

•  $n_1 = n_2 = 2$  :  $c = 2$  → pliage 2D

•  $n_1 = 1, n_2 = 2$  :  
 $c = 1$  → pliage 1D



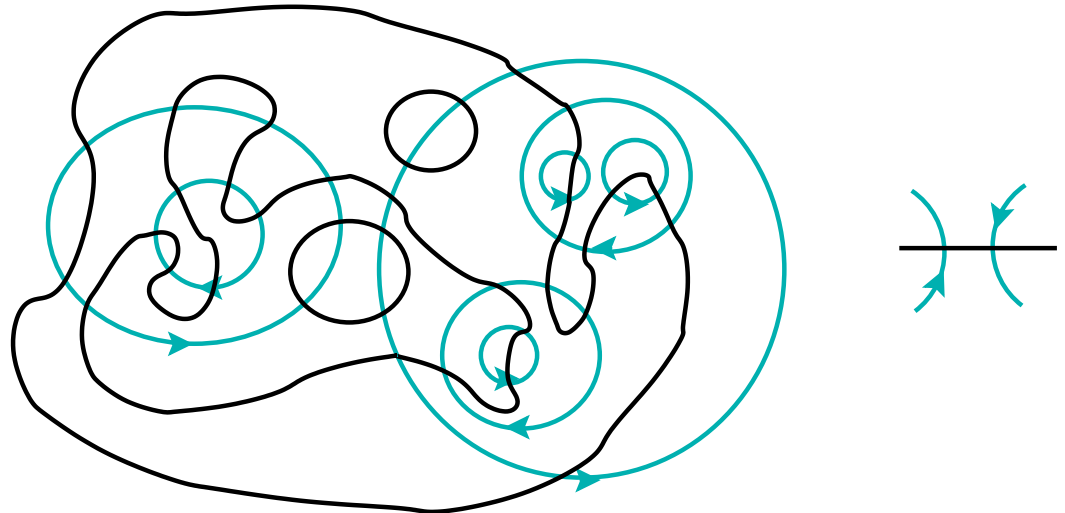
Charge centrale :  $n_1 = 2 \cos(\pi e_1)$ ,  $n_2 = 2 \cos \pi(e_2)$

$$\begin{aligned} c_{\text{méandre}} &= 2 - 6 \frac{e_1^2}{1-e_1} - 6 \frac{e_2^2}{1-e_2} \\ &= c_{\text{dense}}(n_1) + c_{\text{dense}}(n_2) \end{aligned}$$

Cas particuliers :

•  $n_1 = n_2 = 2$  :  $c = 2$  → pliage 2D

•  $n_1 = 1, n_2 = 2$  :  
 $c = 1$  → pliage 1D



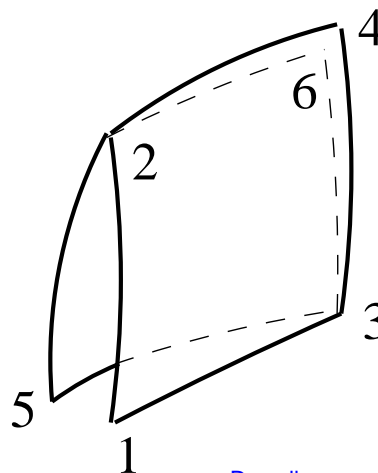
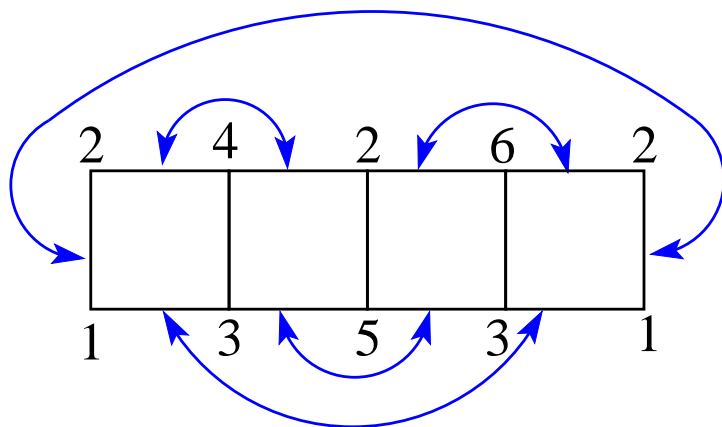
•  $n_1=n_2=1 : c=0 \rightarrow$  pliage complet (0D)

•  $n_i \rightarrow 0 :$

Une seule boucle de type  $i \Leftrightarrow$  **NON-DÉPLIABLE** dans la direction  $i$

ex :  $n_1=n_2=0 (c=-4) \rightarrow$  quadrangulations qui sont **pliables** mais **non-dépliables**

i.e. quadrangulations pour lesquelles **le pliage complet est le seul possible**



# Exposants

Vérification :

- $n_1 = 1$ ,  $n_2$  quelconque **Chekhov, Kristjansen 1996**
- $n_1 \rightarrow 0$ ,  $n_2 = q = 2 \cos(\pi e)$

Nombre config.  $\sim R(q)^{2n} n^{\gamma-3}$  pour  $2n$  ponts

$$\rightarrow \alpha(q) = 2 - \gamma [c_{\text{méandre}}(0, q)]$$

$$\alpha(q) = 2 + \frac{1 - e + 3e^2 + \sqrt{(1 - e + 3e^2)(13 - 13e + 3e^2)}}{6(1 - e)}$$

$$\alpha(q = 0) = \frac{29 + \sqrt{145}}{12} = 3,420132 \dots$$



$$\bar{\alpha}(q = 0) = 1 + \frac{1}{24} \sqrt{11} (\sqrt{29} + \sqrt{5}) = 2,053198 \dots$$

$$\bar{\alpha}(q_c) = 1 \Rightarrow q_c = 2 \cos \left( \pi \frac{\sqrt{97} - 1}{48} \right) = 1,6738 \dots$$

## Résultats numériques :

$q$	$\alpha_{\text{théor.}}$	$\alpha_{\text{num.}}$	$C_{\text{théor.}}$	$C_{\text{num.}}$
0	3,4201328...	3,4208	-4	-4,002
1	3	3,00000	-2	-2,0000
$\sqrt{2}$	2,8866175...	2,885	-3/2	-1,496
$\sqrt{3}$	2,8160084...	2,812	-6 / 5	-1,18
2	2,7675918...	2,75	-1	-0,95

# Conclusions

- Pliages et méandres sont deux facettes d'un même problème de gaz de boucles compactes
  - Quelques surprises :
    - Pliage auto-évitant à 1D  $\leftrightarrow$  pliage fantôme à 2D
    - Dépendance de la classe d'universalité dans le type (Eulérien ou non) de réseaux aléatoires
- objets durs
- Exposants irrationnels pour de problèmes (apparemment) simples de combinatoire

→ nœuds alternés

Schaeffer, Zinn-Justin 2003

