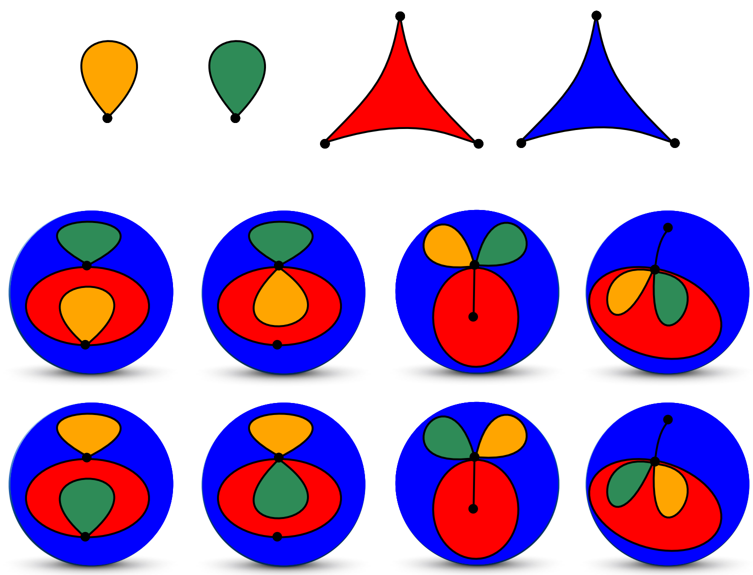
Enumération des cartes planaires: une extension de la formule de Tutte 60 ans après

Mars 2022

L'étude des cartes aléatoires constitue un des pans majeurs de l'édifice toujours en construction de la géométrie aléatoire bidimensionnelle, en particulier dans tous les domaines où apparaissent des surfaces fluctuantes. Rappelons qu'une carte, au sens mathématique, est un graphe connexe fait de sommets reliés par des arêtes et tracé sur une surface à deux dimensions, sans que les arêtes se croisent. Ces dernières découpent alors la surface en domaines élémentaires, les faces, caractérisées par leur degré, c'est-à-dire leur nombre de côtés. Une face de degré d est donc un polygone à d côtés et une carte peut être définie de façon équivalente comme le recollement de tels polygones le long d'arêtes pour fabriquer une surface donnée. Les cartes sont considérées à déformations continues près, c'est-à-dire que seul l'agencement des faces entre elles est important et on ne change pas la carte en déformant les polygones. Etant donné un jeu de faces numérotées de 1 à n dont les degrés respectifs $d_1, d_2, \ldots, d_n$ sont prescrits, il existe alors un nombre fini $N(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ de cartes dites"planaires", c'est-à-dire telles que la surface obtenue soit une sphère (la carte peut alors être tracée sans croisement d'arêtes dans le plan). L'étude des cartes aléatoires est donc d'abord un problème de combinatoire consistant à les compter. C'est le mathématicien d'origine britannique William Tutte (connu également pour sa contribution au décodage des codes secrets allemands à Bletchley Park lors de la seconde guerre mondiale) qui, dans une tentative de prouver le célèbre Théorème des 4 couleurs, a obtenu les premiers résultats marquants sur la combinatoire des cartes dans les années 60. En particulier, dans un article célèbre publié en 1962, "A census of slicings", il donne une formule explicite particulièrement simple pour le nombre $N(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ dans le cas où tous les d_i sont pairs, sauf au plus deux d'entre eux, mais ne parvient pas à conclure dans le cas où plus de deux faces ont des degrés impairs, cas qui selon son aveu même "seems to be more difficult". Depuis ces premiers travaux, la combinatoire des cartes, mais aussi l'étude de leurs propriétés métriques et de leurs limites continues, ont connu de très nombreux développements, à la fois grâce aux techniques d'intégrales matricielles chères aux physiciens et à la découverte de codages bijectifs des cartes par des objets récursifs, donc plus faciles à énumérer. Malgré tous ces efforts, donner une formule explicite pour $N(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ dans le cas de parités quelconques est resté un problème ouvert. Dans un article tout récent (pré-publication IPhT-t22/009, arXiv:2203.14796 (2022)), deux chercheurs de l'IPhT, Jérémie Bouttier et Emmanuel Guitter, en collaboration avec Grégory Miermont (ENS de Lyon) ont utilisé une méthode de découpage en tranches ("slices") le long de chemins géodésiques sur la carte, méthode qu'ils avaient développée dans les années 2010, pour enfin, soixante ans après l'article original de Tutte, donner une expression explicite pour $N(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ dans le cas de parités quelconques des degrés des faces. Même si la formule générale est, comme le pressentait W. Tutte, beaucoup plus complexe, elle reste néanmoins particulièrement élégante et recèle de nombreuses symétries cachées.



Les $N(1, 1, 3, 3) = 8$ façons d'assembler deux faces de degré 1 et deux faces de degré 3 en une sphère.