

HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

Spécialité: Mathématiques

Modèles Contraints de Mécanique Statistique sur Réseaux Fixes et Aléatoires: Objets Durs et Pliages

P. Di Francesco¹

*CEA-Saclay, Service de Physique Théorique,
F-91191 Gif sur Yvette Cedex, France*

Nous considérons des modèles de mécanique statistique à fortes contraintes géométriques, les rendant très dépendants de la structure des réseaux sur lesquels ils sont définis. Nous nous concentrons sur deux classes de tels modèles: (i) les gaz d'objets durs, c'est à dire des objets occupant arbitrairement les sites du réseau mais ne pouvant occuper simultanément deux sites voisins et (ii) le pliage des réseaux le long de leurs arêtes sans déformation de leurs faces. Nous montrons comment les propriétés critiques des modèles dans la limite de taille infinie peuvent être affectées par la structure géométrique des réseaux. Cette dépendance est exacerbée lorsque les modèles sont définis sur des réseaux aléatoires, et nous étudions là aussi l'influence de la géométrie sur les propriétés critiques.

Comme principale application, dans le cadre du pliage auto-évitant d'un réseau unidimensionnel, nous apportons une solution asymptotique au problème des méandres: "énumérer les configurations topologiquement inéquivalentes d'une courbe plane simple sans auto-intersections coupant une droite en un nombre fixé de points".

06/04

¹ philippe@spht.saclay.cea.fr

*à Claude Itzykson, qui m'a donné le goût
d'appliquer la physique aux mathématiques*

Composition du jury:

Edouard BREZIN, président
Anne BOUTET de MONVEL
Alexander ITS
Xavier VIENNOT
Jean-Bernard ZUBER

Rapporteurs:

Craig TRACY
Vadim MALYSHEV

Date de soutenance:

Vendredi, 25 Juin 2004.

1. Introduction	3
2. Réseaux fixes et aléatoires: généralités	6
2.1. Modèles sur réseaux fixes et théorie conforme	6
2.2. Réseaux semi-aléatoires et gravité Lorentzienne	9
2.3. Modèles sur réseaux aléatoires et gravité quantique	11
2.4. Application à l'énumération asymptotique	14
3. Objets durs	15
3.1. Réseaux fixes: Résultats connus et conjecture de Baxter	15
3.2. Gravité Lorentzienne et objets durs	16
3.3. Réseaux aléatoires: solutions exactes par modèles de matrices et preuve gravitationnelle de la conjecture de Baxter	18
3.4. Gravités Ordinaire et Eulérienne: leçon générale	18
4. Pliages et boucles	19
4.1. Pliage du réseau triangulaire	20
4.2. Gaz de boucles compactes sur le réseau hexagonal	20
4.3. Pliabilité des triangulations aléatoires et tricoloriages	22
4.4. Le gaz de boucles compactes à $n = 1$	23
4.5. Gravités Ordinaire et Eulérienne: leçon générale II	23
5. Méandres	25
5.1. Pliage d'une bande de timbres et méandres	26
5.2. Méandres et algèbre de Temperley-Lieb	28
5.3. Solution du problème: la stratégie gagnante	32
5.4. La théorie des champs des méandres et d'autres nombres	37
5.5. Vérifications numériques	38
6. Conclusion	40

1. Introduction

La physique théorique est une source d'inspiration féconde pour attaquer d'une manière radicalement différente des problèmes de mathématiques bien posés, en empruntant parfois des chemins surprenants, mais menant à des prédictions très précises, comme celles que nous allons présenter ici. La raison essentielle de ce décalage est que les outils employés sont souvent d'un usage délicat d'un point de vue purement mathématique, bien qu'ils soient absolument validés par l'expérience. Dans la boîte à outils du physicien, la théorie des champs est certainement le plus puissant, car il permet une description effective des propriétés et comportements essentiels des modèles qu'elle décrit. Ayant ainsi obtenu des résultats précis sur l'énumération de divers objets, nous aurons également à coeur de les vérifier numériquement, en adaptant des techniques habituellement employées en mécanique statistique sur réseaux réguliers.

Dans ce recueil, nous étudions des modèles de mécanique statistique à deux dimensions sur réseaux fixes ou aléatoires, utilisés par exemple pour décrire des interfaces bidimensionnelles (surfaces de séparation entre milieux sans inclusion de phases) ou la gravité quantique bidimensionnelle [1] (couplage des théories de matière aux fluctuations de l'espace sous-jacent). Par réseaux aléatoires nous entendons pavages aléatoires, dont par exemple les tuiles sont des polygones réguliers, compris comme des graphes aléatoires (sans métrique). D'un point de vue combinatoire, ces modèles posent de simples problèmes d'énumération de configurations, impliquant des réseaux décorés ou des graphes décorés. Plus précisément, nous nous concentrons ici sur deux classes de modèles pour lesquels le détail des réseaux sous-jacents est important: ces modèles "sentent" très fortement la géométrie de l'espace discret sur lequel ils sont définis. Ce sont les modèles d'objets durs et les modèles de gaz de boucles compactes. Notre intérêt essentiel est la compréhension du comportement critique de ces modèles, c'est à dire l'existence de transitions de phases dans l'espace des paramètres pour lesquelles des quantités thermodynamiques, i.e. caractéristiques de systèmes de taille infinie, développent des singularités. Ces singularités, une fois bien comprises, peuvent être classées en "classes d'universalité" décrites par des théories des champs, et caractérisées par un ensemble d'exposants critiques.

La première classe de modèles décrit des objets durs, ou particules dures occupant les sommets du réseau et soumises à une règle d'exclusion mutuelle (dureté), à savoir que deux sites adjacents ne peuvent être simultanément occupés. Cette contrainte purement locale permet cependant au système de "sentir" la géométrie du réseau. Par exemple, lorsqu'on

augmente la densité de ces objets, ils tendent à occuper maximale-ment les sites du réseau (un sur deux typiquement) et vont sentir si ce dernier est ou non bipartite. En construisant la solution complète de tels modèles, nous apportons une preuve “gravitationnelle” à une ancienne conjecture de Baxter (fin des années 70) sur le modèle de “carrés durs”, d’abord controversée, puis restée ouverte jusqu’à ce jour.

La seconde classe décrit des boucles occupant les arêtes du réseau, avec la contrainte que tout site est visité par une boucle. A nouveau, la géométrie du réseau est cruciale dans la structure des configurations, comme nous le verrons plus loin. Ces modèles de boucles sont en fait omniprésents dans les modèles de pliage, dont l’étude est notre véritable motivation [2]. On distingue deux sortes de pliages. Le pliage dit “auto-évitant” se rapproche le plus de la notion intuitive naturelle: on se permet de plier un réseau selon ses arêtes avec la contrainte que le réseau ne peut pas se traverser lui-même, c’est à dire avec l’idée qu’il représente un plan matériel (feuille de papier), que l’on ne peut découper pour effectuer les pliages, quitte à le recoller ensuite. A une dimension, l’exemple archétypique est celui d’une bande de timbres attachés par leurs côtés, représentant un segment d’un réseau unidimensionnel, et que l’on peut plier suivant les arêtes communes. Comme nous le verrons, l’énumération des configurations totalement repliées de ces objets est dans la classe du problème des méandres, mathématiquement défini comme suit: “énumérer les configurations topologiquement inéquivalentes d’une courbe simple sans auto-intersections coupant une droite en un nombre fixé de points”. Le résultat principal de notre travail sera la solution asymptotique de ce problème à grand nombre de points d’intersection. On considère aussi un autre type de pliage, plus simple, dit “fantôme”. La différence avec le cas précédent est que l’on ne s’intéresse qu’aux configurations finales pliées et sans prendre en compte leur réalisabilité physique. Ce type de pliage est utilisé pour modéliser les transitions de repliement de membranes biologiques. Dans ce cas, on préfère utiliser une définition qui applique les faces du réseau sur leurs configurations pliées, sous la contrainte qu’elles demeurent indéformables. Dans les cas de pliage fantôme et autoévitant, il existe des bijections entre les configurations pliées des réseaux et celles des gaz de boucles. Par exemple, et de façon tout à fait remarquable, le pliage fantôme du réseau triangulaire bidimensionnel se réexprime en termes d’un gaz de boucles compactes sur le réseau hexagonal, alors que le problème du pliage auto-évitant de la bande de timbres unidimensionnelle se réexprime comme un gaz de boucles compactes sur un réseau aléatoire.

Notre but est de rassembler ici les éléments menant à la solution de divers problèmes impliquant des objets durs, sur réseaux fixes ou aléatoires d’une part, et également à celle

de problèmes de pliage, par l'utilisation de gaz de boucles sur réseaux fixes ou aléatoires. Dans notre boîte à outils, nous utiliserons la théorie des champs conformes [3], et le cas échéant son couplage à la gravitation quantique bidimensionnelle [4], afin de décrire la limite continue de modèles statistiques critiques sur réseaux fixes ou aléatoires. Un autre outil combinatoire puissant issu de la physique est l'intégrale matricielle [1] [5] [6] [7], véritable machine à engendrer des réseaux aléatoires. Nous en ferons bon usage également.

Le mémoire est articulé autour des deux classes de modèles étudiés.

Nous commençons toutefois par des généralités sur les modèles de mécanique statistique sur réseaux réguliers et aléatoires (section 2). Pour les premiers, nous introduisons les notions de matrice de transfert, d'intégrabilité et de classe d'universalité critique (section 2.1). Nous présentons alors un modèle jouet de réseau semi-aléatoire, dit "Lorentzien" et sa solution [P1] par matrice de transfert (section 2.2). Enfin, nous présentons brièvement les éléments de gravité quantique nécessaires à notre propos, en particulier la relation remarquable entre classes d'universalité critiques sur réseau fixe et sur réseau aléatoire, pour un même modèle (section 2.3).

La section 3 traite exclusivement d'objets durs. D'abord sur réseaux fixes (section 3.1), puis en relation avec des modèles de matière couplée à la gravité Lorentzienne, i.e. sur des réseaux semi-aléatoires, le sujet de [P2] (section 3.2). Nous passons alors à la gravité quantique bidimensionnelle, pour étudier des modèles d'objets durs sur réseaux aléatoires, le sujet de [P3] (section 3.3), étude dont nous tirons les leçons (section 3.4).

Dans la section 4, nous présentons les diverses relations entre modèles de pliages et gaz de boucles. Nous commençons par le pliage du réseau triangulaire [P4] (section 4.1), puis sa reformulation en gaz de boucles compactes sur le réseau hexagonal (section 4.2). Le problème du pliage des réseaux aléatoires donne lieu à la question préliminaire de la pliabilité, qui dans le cas des triangulations nous mène à l'étude des triangulations tricoloriées des sommets [P5] (section 4.3). Après reformulation en gaz de boucles sur réseaux aléatoires, nous traitons quelques cas au moyen d'intégrales matricielles [P6] (section 4.4), et nous tirons des leçons très semblables à celles obtenues dans le cadre des objets durs (section 4.5).

La section 5 est dédiée à l'étude et à la solution asymptotique du problème des méandres. Après avoir rappelé des généralités et présenté les résultats les plus frappants (section 5.1), nous présentons un premier ensemble de résultats sur les "déterminants de méandres" [P7-P8] obtenus dans le cadre d'une reformulation purement algébrique du problème, en termes de l'algèbre de Temperley-Lieb (section 5.2). Nous détaillons

ensuite les étapes menant aux résultats de [P9], en passant par la formulation comme problème de gaz de boucles sur réseau aléatoire, la formulation du modèle sur le réseau carré, l'utilisation des résultats connus de théorie conforme appliqués à ce cas, ainsi que des leçons tirées précédemment afin d'éviter les embûches comme la possible inadéquation de la géométrie des réseaux avec le comportement critique du gaz de boucles, pour finalement aboutir à l'identification des exposants critiques des méandres (section 5.3). Les résultats sont étendus à d'autres nombres de configurations dans lesquelles la "rivière" (ligne droite) des méandres peut elle-même avoir une géométrie particulière (section 5.4). Enfin, nous présentons les techniques de simulation numérique [P10] permettant de confirmer la plupart des exposants proposés (section 5.5).

L'ensemble des résultats présentés ici sont mathématiquement rigoureux, à l'exception d'une partie de la chaîne d'arguments contenue dans [P9], qui repose sur la théorie des champs conformes couplée à la gravité quantique bidimensionnelle, et qui bien que parfaitement acceptée par les physiciens, devrait requérir certainement de meilleurs fondements mathématiques. En dehors de cette exception, nous n'utilisons que des méthodes rigoureuses, impliquant par exemple le calcul d'intégrales matricielles bien définies, ou basées sur diverses bijections entre modèles. Construire une véritable preuve de nos résultats sur l'énumération des méandres consiste en soi en un challenge formidable, et nous proposerons quelques pistes dans ce sens.

2. Réseaux fixes et aléatoires: généralités

Dans cette section, nous présentons des résultats connus sur les modèles de mécanique statistique bidimensionnelle, définis sur diverses sortes de réseaux: fixes (réguliers), semi-aléatoires (Lorentziens) et aléatoires (surfaces ou membranes réticulées), ainsi que sur leur description dans la limite continue par des théories des champs.

2.1. Modèles sur réseaux fixes et théorie conforme

En mécanique statistique bidimensionnelle, on étudie des modèles décrivant le comportement d'objets en interaction à courte portée et occupant des positions sur par exemple les sommets d'un réseau régulier plan. Une configuration de tels objets est une application d'un domaine D du réseau dans un espace cible C (e.g. $C = \{0, 1\}$), et une configuration $\nu : D \rightarrow C$ est interprétée comme un ensemble de nombres d'occupation $\{\nu(i)\}_{i \in D}$ (avec par exemple la valeur 0 si le sommet i est vacant ou 1 s'il est occupé). L'interaction entre

ces objets est incorporée dans une fonctionnelle d'énergie $E(\nu) = \sum_{(ij)} E(\nu(i), \nu(j))$ où la somme s'étend sur les arêtes de D , et la configuration est pondérée par une probabilité proportionnelle à $e^{-\beta E(\nu)}$, où $\beta = 1/(k_B T)$. L'énergie d'interaction $E(x, y)$ entre sommets voisins contient donc toute l'information sur l'attraction ou la répulsion entre les objets, ainsi que leur possible sensibilité à des conditions extérieures. L'exemple classique est celui du modèle d'Ising, avec une variable de spin $\nu = \sigma$ de cible $\{-1, 1\}$, et avec

$$E(x, y) = -Jxy - h\frac{x+y}{2} \quad (2.1)$$

où J est le couplage des spins, et h le champ magnétique extérieur. Le but de l'étude de ces modèles est de déceler les comportements collectifs de ces objets dans la limite où la taille de D tend vers l'infini. On étudie typiquement des quantités globales comme la fonction de partition

$$Z = \sum_{\nu} e^{-\beta E(\nu)} \quad (2.2)$$

qui n'est autre que la normalisation des probabilités des configurations $p(\nu) = e^{-\beta E(\nu)}/Z$, ou comme les corrélations d'observables

$$\langle O_1(\nu)O_2(\nu)\dots O_n(\nu) \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\nu} O_1(\nu)O_2(\nu)\dots O_n(\nu)e^{-\beta E(\nu)} \quad (2.3)$$

où O_i sont des fonctions locales de ν au point $i \in D$, par exemple $O_i(\nu) = \delta_{\nu(i), 1}$.

Dans la limite thermodynamique (quand la taille de D tend vers l'infini), ces fonctions peuvent développer des singularités en termes des paramètres entrant dans le détail de E (tels le couplage de spins ou le champ magnétique du modèle d'Ising). Ces singularités permettent d'identifier des phénomènes critiques bidimensionnels, qui tombent dans des classes d'universalité, caractérisées par des exposants critiques. Par exemple les fonctions de corrélation à deux points $\langle O_i O_j \rangle$ décroissent génériquement avec la distance $r = d(i, j)$ en loi de puissance $\langle O_i O_j \rangle \sim e^{-r/\xi}$ où ξ est la longueur de corrélation. A un point critique, ξ diverge, et la décroissance exponentielle est remplacée par une loi de puissance $\langle O_i O_j \rangle \sim r^{-4h}$. La collection des "exposants" h caractérise la classe d'universalité du phénomène critique. La classification de ces divers comportements est réalisée par les théories de champs invariantes conformes, qui décrivent la limite continue de ces points critiques: dans cette limite, la taille de D tend vers l'infini et la maille du réseau a tend vers 0 simultanément avec disons $aD = \text{constante}$, si bien que le modèle est alors décrit par des champs définis sur le plan. L'invariance conforme de la théorie provient de la

divergence de la longueur de corrélation qui entraîne l'invariance d'échelle, i.e. l'invariance par dilatations locales [3].

Pour simplifier la discussion, supposons que le réseau initial est carré, et que D est un rectangle $L \times M$ de ce réseau. Un outil fondamental pour l'étude d'un tel modèle est la matrice de transfert. Elle permet de synthétiser les configurations du modèle d'une manière récurrente. Prenons dans une configuration ν sur D deux lignes horizontales consécutives de L sommets, avec images $n = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_L)$ et $n' = (\nu'_1, \nu'_2, \dots, \nu'_L) \in C^L$. On introduit la matrice de transfert $T_{n,n'}$ de ligne à ligne, qui permet de décrire le poids statistique associé à cette paire de lignes consécutives, autrement dit la probabilité que la ligne n' suive la ligne n . On a

$$\begin{array}{ccccccc}
 \nu'_1 & \nu'_2 & \nu'_3 & & \nu'_i & \nu'_{i+1} & \nu'_L \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \dots & \bullet & \bullet & \dots & \bullet & \bullet \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
 \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & & \nu_i & \nu_{i+1} & & \nu_L & \nu_L
 \end{array} \tag{2.4}$$

$$T_{n,n'} = \prod_{i=1}^{L-1} e^{-\beta E(\nu'_i, \nu'_{i+1})} \prod_{i=1}^L e^{-\beta E(\nu_i, \nu'_i)}$$

La fonction de partition s'écrit alors simplement, disons en conditions de bord périodiques dans la direction verticale:

$$Z = \text{Tr} T^M \tag{2.5}$$

Le calcul de Z se réduit donc à celui des valeurs propres de T . En fait, dans la limite de taille infinie, seules les plus grandes valeurs propres de T contribuent à $Z \sim \lambda_0^M$ et également aux fonctions de corrélation $\langle O_i O_j \rangle - \langle O_i \rangle \langle O_j \rangle \sim (\lambda_1 / \lambda_0)^r$, où $\lambda_0, \lambda_1, \dots$ sont les valeurs propres de T dans l'ordre décroissant. Malgré cela, il est très rare d'obtenir une expression analytique pour ces valeurs propres en général, dont il faut ensuite prendre la limite de grand L . C'est pourtant le cas pour un grande classe de modèles dits "intégrables" dont la fonctionnelle d'énergie E satisfait des relations locales dites de "Yang-Baxter" assurant la diagonalisation de T dans une base "simple". L'idée est de décorer T par un paramètre u , tel que $[T(u), T(u')] = 0$ pour toute valeur de ce paramètre, disons dans un intervalle. Les matrices $T(u)$ se diagonalisent alors simultanément dans une base indépendante de u . La solution de ces modèles intégrables sur réseaux a permis d'identifier très précisément les classes d'universalité prédites par les théories conformes bidimensionnelles. Une sous-classe très importante de ces théories est formée des théories conformes minimales [8], de charge centrale $c(p, q) = 1 - 6(p - q)^2 / (pq) < 1$ avec p, q entiers premiers entre eux, et dont le

contenu en dimensions est donné par la “table de Kac” $h_{r,s} = ((pr - qs)^2 - (p - q)^2)/(4pq)$, $1 \leq r \leq q$ et $1 \leq s \leq p$.

Nous disposons actuellement d’une sorte de “tableau de Mendeleiev” des comportements critiques à deux dimensions. Chaque classe d’universalité est décrite par une théorie conforme de charge centrale c , et sa collection d’opérateurs primaires ϕ_n de dimensions conformes (h_n, \bar{h}_n) , gouvernant la décroissance des corrélations $\langle \phi_n(z)\phi_n(w) \rangle \sim (z - w)^{-2h_n} (\bar{z} - \bar{w})^{-2\bar{h}_n}$. Très concrètement, ces nombres peuvent être extraits du spectre de la matrice de transfert du modèle critique à grand L en se plaçant en conditions de bords périodiques (cylindre de périmètre L). On peut alors écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \text{Log}(\lambda_0) &= f_0 - \frac{\pi c}{6L^2} + o\left(\frac{1}{L^2}\right) \\ \frac{1}{L} \text{Log}(\lambda_k/\lambda_0) &= \frac{2\pi}{L^2} (h_{j_k} + \bar{h}_{j_k} + n_k + \bar{n}_k) + o\left(\frac{1}{L^2}\right) \end{aligned} \tag{2.6}$$

pour les diverses valeurs propres de T rangées dans l’ordre décroissant, où f_0 est l’énergie libre thermodynamique du modèle, et les n_i, \bar{n}_i sont des possibles décalages d’entiers, représentant des descendants d’opérateurs primaires. Il est donc possible d’identifier précisément la théorie conforme sous-jacente pour chaque modèle à partir de sa matrice de transfert.

Une autre identification directe d’exposants critiques s’obtient en regardant les singularités de l’énergie libre du modèle $F = \text{Log} Z$ lorsqu’un des paramètres du modèle disons x approche sa valeur critique x_c . On a alors $F_{\text{sing}} \sim (x_c - x)^{2-\alpha}$, où l’exposant α est relié à la dimension conforme de l’opérateur primaire couplé à cette variation: $\alpha = (1 - 2h)/(1 - h)$. Par exemple, pour le modèle d’Ising décrit plus haut, on a $c = c(4, 3) = 1/2$ et deux opérateurs primaires, l’énergie avec $h = h_{1,3} = 1/2$, couplée aux variations de température T autour de sa valeur critique T_c , et le spin avec $h = h_{1,2} = 1/16$, couplé aux variations de champ magnétique autour de sa valeur critique $h_c = 0$, donnant lieu à un exposant thermique $\alpha = 0$ et un exposant magnétique $\alpha = 14/15$.

2.2. Réseaux semi-aléatoires et gravité Lorentzienne

Dans la référence [P1], nous avons étudié des modèles de mécanique statistique sur des réseaux semi-aléatoires, censés décrire un espace-temps bidimensionnel, incluant les fluctuations d’espace [9] [10]. Autrement dit, au lieu de considérer un modèle sur un réseau régulier, on se place sur un réseau régulier dans la direction temporelle, et aléatoire

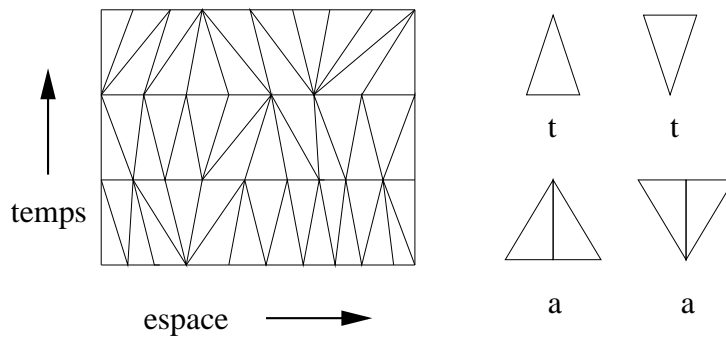


Fig. 1: Une triangulation Lorentzienne, et les poids associés: t par triangle et a par paire de triangles consécutifs pointant dans le même sens.

dans la direction spatiale. Ceci est réalisé par la triangulation Lorentzienne de la Fig. 1. La fluctuation d'espace est rendue par la succession aléatoire de triangles pointant vers le haut ou vers le bas, dans chaque tranche temporelle. Le poids statistique associé à une telle triangulation est fait de deux termes: un poids t par triangle, et un terme a de courbure par paire de triangles consécutifs pointant dans le même sens. Par construction, ce modèle a encore une matrice de transfert $T(a, t)$, même si la taille spatiale (nombre de triangles dans une bande) est elle-même aléatoire. Cette matrice en effet ne dépend que du nombre total de triangles pointe en haut i et du nombre total de triangles pointe en bas i' , avec

(2.7)

$$T(a, t)_{i, i'} = t^{i+i'-1} \sum_{r=0}^{\text{Min}(i, i')} \binom{i-1}{r-1} \binom{i'-1}{r-1} a^{i+i'-2r}$$

à condition d'imposer que la bande commence toujours avec des triangles pointe en haut. Dans [P1], nous montrons qu'une famille à un paramètre de ces modèles est intégrable au sens défini en Sect. 2.1. Plus précisément,

$$\frac{1 - t^2(1 - a^2)}{at} = \frac{1 - t'^2(1 - a'^2)}{a't'} \Rightarrow [T(a, t), T(a', t')] = 0 \quad (2.8)$$

En diagonalisant T , nous avons obtenu dans [P1] la fonction de partition et diverses corrélations. Ces dernières sont aussi étudiées dans la limite continue d'un grand nombre de triangles d'aire tendant vers 0.

Ceci ne décrit que l'espace-temps sous-jacent d'un modèle de mécanique statistique qui, pour être complet, devrait aussi inclure un modèle statistique de matière, défini sur ces réseaux semi-aléatoires. Nos tentatives de généralisation des modèles intégrables sur réseaux semi-aléatoires dans [P1] n'ont pas mené à de nouveaux points critiques, et donc ne décrivent pas de théories critiques de matière sur ces réseaux. Nous introduirons de tels modèles plus loin, après discussion des propriétés des objets durs sur réseaux.

2.3. Modèles sur réseaux aléatoires et gravité quantique

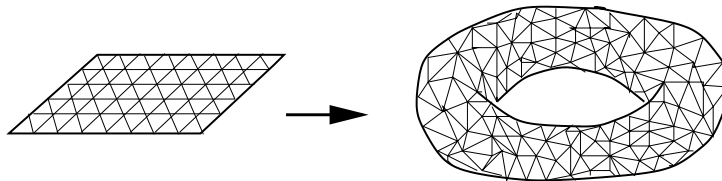


Fig. 2: Un exemple de fluctuation de l'espace plat (ici une portion du réseau triangulaire) en une triangulation aléatoire du tore (genre 1).

L'objet de la gravité quantique est de considérer l'espace sous-jacent des théories bidimensionnelles comme un objet dynamique, dont il faut inclure les fluctuations. Typiquement, le réseau régulier est remplacé par un réseau aléatoire, i.e. la connectivité des sommets n'est plus fixée, ce qui introduit de la courbure locale. On peut également jouer sur la topologie de ces surfaces réticulées, en considérant également des réseaux aléatoires de topologie arbitraire (cf. Fig.2 pour un exemple de genre 1). Mathématiquement, on se propose donc de considérer toutes les configurations à la fois d'un graphe G avec disons $A(G)$ sommets et une caractéristique d'Euler $\chi(G)$, et d'un modèle de mécanique statistique de cible C et de fonctionnelle d'énergie E , défini sur les sommets de ce graphe. On note la disparition de la notion de distances ici, au profit de la seule connectivité des sommets entre eux: ceci revient à "fixer une jauge" en ne sommant que sur les classes d'équivalences de surfaces partageant ici le même squelette réticulé. Ainsi, $A(G)$ peut être interprétée comme l'aire de la surface réticulée G^* duale de G vue comme un pavage dont toutes les tuiles ont aire unité. En introduisant un poids g par sommet du graphe (g est appelée la constante cosmologique) et un poids $N^{\chi(G)}$ pour la topologie (N est appelée constante de Newton), on obtient la fonction de partition du modèle de mécanique statistique couplé à la gravité:

$$Z = \sum_{\text{Graphes } G} g^{A(G)} N^{\chi(G)} \sum_{\nu: v(G) \rightarrow C} e^{-\beta \sum_{(ij) \in e(G)} E(\nu(i)\nu(j))} \quad (2.9)$$

où $v(G)$ et $e(G)$ représentent respectivement l'ensemble des sommets et des arêtes de G . Pour se restreindre à une somme sur des graphes connexes dans (2.9), il suffit de prendre $F = \text{Log } Z$, aussi appelée énergie libre du modèle.

Le calcul de Z ou de corrélations peut être effectué directement au moyen d'intégrales matricielles [11] [6] [7], dont le développement en séries formelles reproduit la somme (2.9), où N est la taille des matrices, et où les détails du modèle sont reproduits dans l'intégrand matriciel. Cette connection remarquable est simplement la conséquence du théorème de Wick matriciel, qui exprime l'intégrale Gaussienne sur une matrice d'un produit quelconque d'éléments comme une somme sur tous les appariements possibles d'éléments. Chaque terme dans cette somme peut alors être symbolisé par un graphe "épais" G dont les arêtes sont indexées par les indices matriciels, produisant le facteur $N^{\chi(G)}$, avec $\chi(G) = \#\text{faces} - \#\text{arêtes} + \#\text{sommets}$. Plus précisément, chaque élément de matrice intégré est représenté par une demi-arête, et l'intégrale Gaussienne consiste à appairer ces demi-arêtes en arêtes, pour former des graphes. Le modèle de mécanique statistique est déterminé quant à lui par le nombre de matrices intégrées, la partie Gaussienne de l'intégrale (qui détermine la pondération des arêtes), et sa partie non-Gaussienne (qui détermine la pondération des sommets). Ce calcul utilise toute la magie des modèles de matrices, en particulier leur solution en termes de polynômes orthogonaux lorsqu'elle existe, et donne la valeur complète de Z et des corrélations pour un grand nombre de modèles. De ces solutions exactes peuvent être extraites diverses limites continues et critiques.

A deux dimensions, pour un graphe G , $A(G)$ et $\chi(G)$, l'aire et la caractéristique d'Euler, sont les deux invariants qui entrent dans l'action d'Einstein, décrivant la limite continue de ces graphes, sous la forme de surfaces aléatoires. Une telle limite continue peut être atteinte en faisant tendre g vers une valeur critique g_c , elle-même fonction des autres paramètres du problème, en particulier de E . La contribution dominante à la somme (2.9) provient alors des surfaces de grande aire $A \rightarrow \infty$, ce qui permet comme précédemment de définir une limite continue. La limite est décrite par une théorie de champs de métriques, représentant toutes les surfaces possibles, et sur lesquelles il faut effectuer une intégrale fonctionnelle. Cette intégrale est en général divergente et nécessite la fixation d'une jauge afin de n'intégrer que sur l'espace des classes d'équivalence de métriques relatives à la jauge choisie. Ainsi, dans la jauge conforme correspondant à la relation d'équivalence des métriques $G \sim G'$ ssi $G' = Ge^\phi$ localement, on sait que les fluctuations de métriques sont décrites par une théorie des champs de Liouville pour le facteur conforme

ϕ [4]. Parallèlement, on a dû aussi prendre la limite continue du modèle de mécanique statistique: si l'on se place à un point critique de ce dernier, il est alors décrit par une théorie conforme de champs eux-même définis sur des surfaces aléatoires. Le résultat global est une description des différents points critiques par le couplage d'une théorie conforme à la théorie de Liouville, qui permet une prédiction précise des classes d'universalité gravitationnelles. L'accord remarquable avec la limite continue des solutions des modèles de matrices est une justification *a posteriori* des divers arguments physiques menant à la description en théorie des champs.

La table de Mendeleiev sus-mentionnée peut donc être complétée par une table des comportements critiques de modèles couplés à la gravité quantique bidimensionnelle, avec deux restrictions importantes: (1) seules les charges centrales $c \leq 1$ peuvent survivre (2) parmi les opérateurs de la théorie conforme, seuls ceux "sans spin" avec $h = \bar{h}$ survivent. En effet, une corrélation gravitationnelle implique grosso modo l'intégration sur toutes les positions des opérateurs et sur toutes les surfaces possibles. Une telle intégration devient oscillante pour les opérateurs avec spin, et donne un résultat nul. L'existence de la barrière à $c = 1$ est liée à la dégénérescence des surfaces portant des théories conformes avec un trop grand nombre de degrés de liberté (dont c est une mesure), en "polymères branchés", c'est à dire en objets développant de longues excroissances quasi-unidimensionnelles, qui détruisent la structure de surface au profit d'une structure d'arbre.

Enfin, mentionnons le dictionnaire permettant de faire le lien entre théorie conforme sur le plan et sur surfaces aléatoires. Les exposants gravitationnels sont définis comme suit

$$\begin{aligned}
F_h &= \text{Log } Z|_h \sim (g_c - g)^{2-\gamma_{str}(h)} \\
\langle \phi_1 \phi_2 \dots \phi_n \rangle_h &\sim (g_c - g)^{2-\gamma_{str}(h) + \sum_{i=1}^n (\Delta_i - 1)}
\end{aligned}
\tag{2.10}$$

où l'indice h indique que le genre des surfaces, connexes ici, est fixé à h (et $\chi(G) = 2 - 2h$). La dépendance dans les distances ayant totalement disparu à cause de la somme sur toutes les surfaces sous-jacentes, seule celle dans la constante cosmologique g subsiste. L'exposant $\gamma_{str}(h)$ est appelé susceptibilité de corde, en référence à l'interprétation du modèle comme une théorie de corde non critique, dont les trajectoires décrivent les surfaces aléatoires du problème, et dont l'interaction se traduit par les changements de topologie. Cet exposant $\gamma_{str}(h)$ est en quelque sorte le pendant de la charge centrale, alors que les dimensions gravitationnelles Δ_i sont les pendants des dimensions conformes h_i . Plus précisément, on

peut obtenir par les techniques de théorie conforme couplée à la théorie de Liouville les relations suivantes [4]

$$\begin{aligned}\gamma_{str}(h) &= 2 + (h - 1)(2 - \gamma_0) \\ \gamma_0 &= \frac{c - 1 - \sqrt{(1 - c)(25 - c)}}{12} \\ \Delta_i &= \frac{\sqrt{1 - c + 24h_i} - \sqrt{1 - c}}{\sqrt{25 - c} - \sqrt{1 - c}}\end{aligned}\tag{2.11}$$

2.4. Application à l'énumération asymptotique

Les formules (2.11) sont particulièrement utiles une fois retranscrites en termes de nombres de configurations à aire fixée. En effet, le coefficient de g^A dans F_h par exemple s'interprète comme la contribution des surfaces réticulées d'aire A (nombre total de sommets), si l'on considère le graphe comme le dual du pavage d'une surface de genre h , dont les tuiles polygonales régulières ont aire unité, une autre façon de fixer la jauge. On peut donc immédiatement traduire les résultats (2.11) pour les exposants (2.10) en termes de comportement asymptotique a grande aire $A \rightarrow \infty$ de l'énergie libre et des corrélations à aire fixée:

$$\begin{aligned}F_{h,A} &\sim \frac{g_c^{-A}}{A^{3-\gamma_{str}(h)}} \\ \langle \phi_1 \phi_2 \dots \phi_n \rangle_{h,A} &\sim \frac{g_c^{-A}}{A^{3-\gamma_{str}(h) + \sum_{i=1}^n (\Delta_i - 1)}}\end{aligned}\tag{2.12}$$

Pour illustrer ces formules, considérons le cas de la gravité pure, c'est à dire sans matière, ce qui correspond à prendre $c = 0$. On obtient alors $\gamma_0 = -1/2$, et donc en particulier $F_0 \sim g_c^{-A}/A^{7/2}$. Ce résultat est à rapprocher de celui par exemple pour le nombre de quadrangulations planaires enracinées avec A carrés (i.e. duaux des graphes planaires tetravalents avec une arête marquée et A sommets), calculé par Tutte [12] avec le résultat $Q_A \sim 12^A/A^{5/2}$. L'exposant $7/2$ est en accord avec ce résultat, puisque le marquage d'une arête multiplie les configurations par un facteur $2A$. D'une manière plus générale, les équations (2.12) sont une mine importante de résultats asymptotiques pour toutes sortes de problèmes de comptage de configurations sur des graphes aléatoires. Nous ferons bon usage de ces formules au cours de ce mémoire. Notons enfin que les résultats issus des solutions de modèles de matrices confirment en tous points les résultats (2.11) [13] [1] [5].

3. Objets durs

Dans cette section, nous nous concentrons sur les modèles de mécanique statistique dits d’“objets durs” [14] [15]. Sur un domaine D d’un réseau, une configuration d’objets durs sur les sommets i de D est caractérisée par des nombres d’occupation $i \rightarrow \nu(i) \in \{0, 1\}$ avec la contrainte supplémentaire que deux sommets adjacents ne peuvent être occupés simultanément, i.e. $\nu(i)\nu(j) = 0$ pour i et j voisins. Cette contrainte peut être incorporée dans la définition de la fonctionnelle E , et typiquement on pondère chaque objet dur par un facteur z .

Une notion cruciale pour ces modèles est celle d’état fondamental. Lorsque $z \rightarrow 0$, l’état où tous les nombres d’occupation sont nuls est favorisé. Par contre, lorsque $z \rightarrow \infty$, le système tend à occuper le plus grand nombre possible de sommets. On voit alors que la nature géométrique du réseau est cruciale dans l’existence et le nombre d’états fondamentaux maximalelement occupés. Si le système possède plus d’un tel état fondamental, on peut prédire une transition de cristallisation d’un état “fluide” faiblement occupé à un cristal maximalelement occupé. Nous allons voir comment, suivant la structure du réseau (fixe ou aléatoire), la classe d’universalité de cette transition critique peut changer.

3.1. Réseaux fixes: Résultats connus et conjecture de Baxter

Les cas de trois réseaux ont été particulièrement étudiés: carré, hexagonal et triangulaire. Alors que les deux premiers sont bicoloriables, le troisième ne l’est pas, mais en revanche il est tricoloriable. Donc les deux premiers cas possèdent deux états fondamentaux d’occupation maximale, alors que le troisième en possède trois.

Pour les cas du réseau carré et hexagonal [14] [15] [16] [17], il existe une conjecture ancienne et solide de Baxter, en particulier vérifiée numériquement, que la classe d’universalité du point de cristallisation est celle du modèle d’Ising critique, avec charge centrale $c = 1/2$. L’opérateur correspondant aux variations de z au voisinage de sa valeur critique z_c est l’opérateur d’énergie du modèle d’ising, de dimension conforme $h = 1/2$, donnant un exposant $\alpha = 0$, et donc en fait des corrections logarithmiques à l’énergie libre. Dans la section 3.3 ci-dessous, nous nous attaquons à cette conjecture dans le cadre de la gravité quantique: nous montrons que dans ce cas la classe d’universalité du point de cristallisation des objets durs est celle du modèle d’Ising critique couplé à la gravité. Ce résultat peut être considéré comme une preuve gravitationnelle de la conjecture de Baxter.

Pour le cas du réseau triangulaire, le modèle (appelé modèle des hexagones durs) a été résolu par Baxter [18] comme l’un des tous premiers modèles intégrables sur réseaux

bidimensionnels. La solution exacte fait apparaître un exposant $\alpha = 1/3$, caractéristique de la classe d’universalité du modèle de Potts critique à trois états [19], de charge centrale $c = 4/5$, avec un opérateur de dimension $h = 2/5$.

Dans tous les cas, il est intéressant de noter une transition non physique à une valeur négative z'_c , décrite en fait par une théorie conforme non unitaire (violant en particulier la condition de réalité de l’énergie, ou de positivité de la probabilité), la même pour les trois cas, décrivant également un point critique du modèle d’Ising en champ magnétique imaginaire, la singularité de Lee-Yang [20] [21], avec la charge centrale $c = -22/5$ et l’opérateur de dimension $h = -1/5$, c’est à dire un exposant $\alpha = 7/6$.

3.2. Gravité Lorentzienne et objets durs

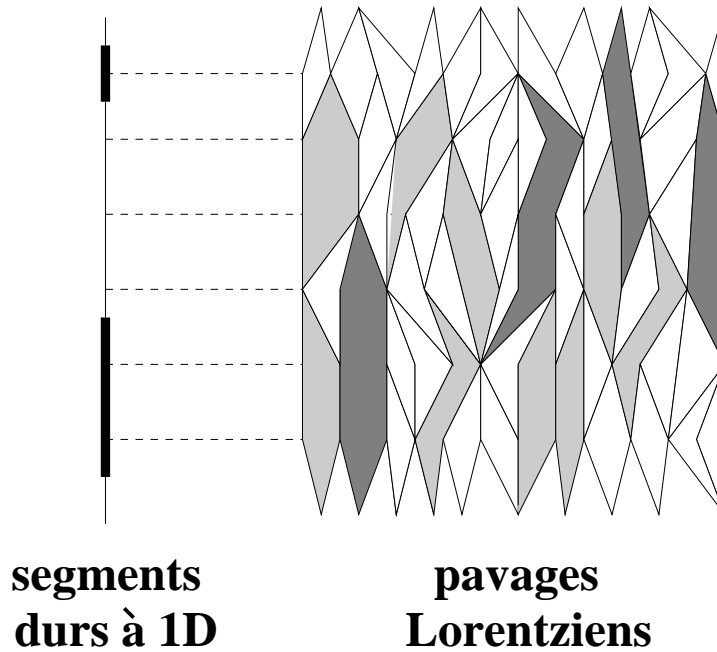


Fig. 3: La relation entre les pavages Lorentziens avec tuiles de valences 4,6,8 et les objets durs de longueur 1,2,3 sur une droite entière. Chaque configuration des premiers donne une configuration du second en isolant le “premier plan”, c’est à dire la première colonne de tuiles disjointes du pavage, remplacées par leur squelette linéaire.

Dans la référence [P2], nous avons obtenu des résultats exacts pour un certain nombre de modèles de matière couplée à la gravité Lorentzienne, c’est à dire définie sur des réseaux semi-aléatoires. Au lieu de ne regarder que des triangulations, nous avons introduit la possibilité d’avoir des tuiles polygonales plus grandes s’étendant possiblement sur plusieurs

tranches temporelles successives (cf. Fig.3). En donnant des poids différents aux tuiles de différentes tailles, nous avons atteint des points critiques différents, décrivant de la matière critique couplée à la gravité Lorentzienne.

Nous avons en fait montré que ces modèles à 1+1 dimension se réduisaient par une sorte d'effet holographique à des modèles unidimensionnels d'objets durs. Pour le comprendre, considérons une configuration d'un tel modèle, et ne retenons que le premier plan de cette configuration: celui-ci est fait d'un certain nombre de tuiles sans aucun recouvrement, que l'on peut interpréter comme des segments durs sur une droite entière (cf. Fig.3). Ensuite, on utilise une relation d'inversion qui permet d'écrire la fonction de partition Z_{Lor} du modèle avec les poids z_i par tuile $2i + 2$ -valente, $i = 1, 2, \dots$ comme

$$Z_{Lor}(z_1, z_2, \dots) = \frac{1}{Z_{Dur}(-z_1, -z_2, \dots)} \quad (3.1)$$

où Z_{Dur} est la fonction de partition des segments durs sur la droite entière, avec des poids $-z_i$ pour les segments de longueur i .

On note le renversement du signe des poids z_i : alors que la considération de $z_i < 0$ est non physique dans le contexte des modèles d'objets durs, nous voyons qu'elle prend un sens dans l'interprétation comme modèle de gravité Lorentzienne. L'exemple le plus simple est celui des triangulations Lorentziennes, pour lesquelles $z_1 = z = t^2$ par paire de triangles tête bêche (et $a = 1$), et nous avons dans la limite de grands temps τ

$$Z_{Lor}(z) = \frac{1}{Z_{Dur}(-z)} \sim \frac{1}{\lambda_{max}(-z)^\tau} = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z} \right)^\tau \quad (3.2)$$

où la fonction de partition pour les segments durs sur $[0, \tau] \cap \mathbb{Z}$ est donnée a grand τ par la τ ème puissance de la plus grande valeur propre de sa matrice de transfert $T = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{-z} \\ \sqrt{-z} & 0 \end{pmatrix}$. Le point critique non physique $z_c = -1/4$ des segments durs devient le point critique $z_c = 1/4$ des triangulations Lorentziennes (avec $t_c = 1/2$ ici).

Dans [P2], nous montrons aussi la généralité de la relation d'inversion (3.1), et son applicabilité à tout modèle $d + 1$ -dimensionnel sur réseaux aléatoires dans une direction et réguliers dans d autres, permettant de se ramener à un modèle d'objets durs en d dimensions, mais avec renversement des poids $z \rightarrow -z$. En particulier, le point critique non physique des hexagones durs de la section précédente permet de prédire le comportement critique de réseaux $2 + 1$ -Lorentziens, formés d'empilements tridimensionnels de dodécaèdres.

Remarquablement, ces problèmes de gravité Lorentzienne ou généralisée sont en relation avec d'autres problèmes de combinatoire pure comme les empilements de dimères [22] ou les animaux dirigés [23].

3.3. Réseaux aléatoires: solutions exactes par modèles de matrices et preuve gravitationnelle de la conjecture de Baxter

Dans [P3], nous résolvons exactement le problème d'objets durs sur graphes planaires tétravalents, au moyen d'une intégrale matricielle

$$Z = \int dAdB e^{-N\text{Tr}V(A,B)} \quad (3.3)$$

$$V(A, B) = -\frac{A^2}{2} + AB - g\frac{B^4}{4} - gz\frac{A^4}{4}$$

où A, B sont des matrices Hermitiennes de taille $N \times N$ et $dAdB$ la mesure de Haar sur cet ensemble, normalisée pour que $Z = 1$ quand $g = 0$. Comme nous l'avons déjà expliqué, les matrices A et B décrivent les demi-arêtes des configurations, reliées respectivement à un sommet occupé et vacant. La partie quadratique de V incorpore, dans son inverse, les arêtes permises ($A - B$ et $B - B$ seulement), quant à la partie quartique, elle incorpore les deux types de sommets tétravalents A^4 occupé et B^4 vacant. La solution par polynômes orthogonaux contient cependant une surprise: seule une valeur négative critique z_c de z subsiste: la transition de cristallisation est effacée par la gravité! Il ne reste que la transition non physique, facilement identifiée comme la singularité de Lee-Yang couplée à la gravité [24].

Ce n'est pas pour nous surprendre, puisque nous avons justement insisté sur le fait que la structure géométrique du réseau sous-jacent est cruciale. En particulier, nous avons considéré des graphes tétravalents arbitraires, non nécessairement bicoloriables. L'effet est qu'il n'y a plus d'états fondamentaux maximalement occupés privilégiés, ce qui efface la transition.

Pour réparer cela, nous devons considérer des objets durs sur des graphes bicoloriables, afin de simuler au mieux la situation des réseaux carré et hexagonal. L'intégrale matricielle correspondante fait intervenir 4 matrices, pour les deux couleurs de sommets, et les deux états d'occupation, et avec une intégrale du même type que (3.3). La solution du modèle montre alors deux points critiques de signes opposés, tous deux avec $\gamma_0 = -1/3$, et il est aisé d'identifier le négatif avec la singularité de Lee-Yang et le positif avec le point critique du modèle d'Ising. Ceci apporte une *preuve gravitationnelle* à la conjecture de Baxter, et permet de l'étendre à tout réseau bicoloriable des sommets.

Les techniques d'intégrales matricielles permettent aussi de résoudre des modèles à plusieurs types d'objets durs [P3], donnant accès en principe à toutes les classes

d'universalité des théories conformes minimales de charges centrales $c(p, q) = 1 - 6(p - q)^2/(pq)$. Les points multicritiques correspondants sont atteints en faisant tendre les divers poids par objet dur vers des valeurs critiques. Là encore, il faut toujours considérer des graphes dont les propriétés de colorabilité garantissent l'existence de tous les états fondamentaux maximales occupés.

3.4. Gravités Ordinaire et Eulérienne: leçon générale

Nous voyons avec l'exemple des objets durs sur réseaux aléatoires que la notion de gravité elle-même peut devenir cruciale dans l'identification des classes d'universalité critiques.

Ainsi, nous avons observé que la gravité ordinaire a effacé certains points critiques du modèle d'objets durs, et qu'il a fallu explicitement réduire l'ensemble statistique des réseaux aléatoires pour ne considérer que ceux qui sont bicoloriables des sommets. Les fluctuations de réseaux engendrées par ces derniers forment la gravité Eulérienne (car le dual de graphes bicoloriables des sommets a un nombre pair de faces autour de chaque sommet, une condition qui garantit l'existence d'un chemin Eulérien sur le pavage).

D'une manière plus générale, lorsque le modèle de mécanique statistique sur réseau dépend crucialement de propriétés ou de contraintes géométriques, il est important de considérer une version gravitationnelle appropriée, qui laisse place à tous les degrés de liberté du modèle, possiblement en restreignant la classe des réseaux aléatoires.

4. Pliages et boucles

Dans cette section, nous considérons un autre type de modèle, également à fortes contraintes géométriques: le pliage [2]. A deux dimensions, nous pensons ainsi modéliser le pliage de membranes dites réticulées (pliage de réseaux) ou fluides (pliage de réseaux aléatoires). Un ingrédient important ici est que nous considérons seulement le pliage "fantôme" de ces réseaux, c'est à dire que nous ne considérons que les configurations pliées du réseau, sans se soucier de la réalisabilité physique d'un tel pliage en trois dimensions (comme on pourrait le faire avec une feuille de papier). En particulier, un tel pliage pourrait requérir quelques coups de ciseaux dans l'espace réel.

4.1. Pliage du réseau triangulaire

Le pliage d'un réseau est défini comme un modèle de mécanique statistique pour les arêtes du réseau. Pour le réseau triangulaire [P4], on remplace chaque arête par un "vecteur tangent" de longueur unité, de telle manière que la somme des vecteurs tangents autour de chaque face soit nul. Une configuration pliée est simplement une application de ces vecteurs tangents $\sigma : \vec{t} \rightarrow \sigma(\vec{t}) \in \mathbb{R}^2$ dans un espace-cible tel que la condition de vecteur tangent soit préservée, à savoir:

$$\sum_{\text{face}} \sigma(\vec{t}) = \vec{0} \quad (4.1)$$

A une rotation globale près, la cible est donc réduite à trois vecteurs unité de somme nulle, formant des angles de $2\pi/3$, disons $C = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Une configuration pliée n'est autre qu'une tricoloration des arêtes du réseau triangulaire telle que les trois arêtes autour de chaque face aient des couleurs 1, 2, 3 différentes.

Le modèle dual a été en fait résolu par Baxter [25], qui entre autres a obtenu la fonction de partition thermodynamique par site $\zeta = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \Gamma(\frac{1}{3})^{\frac{3}{2}} = \lim_{N \rightarrow \infty} Z_N^{1/N}$, où N est le nombre de triangles dans le domaine D plié.

4.2. Gaz de boucles compactes sur le réseau hexagonal

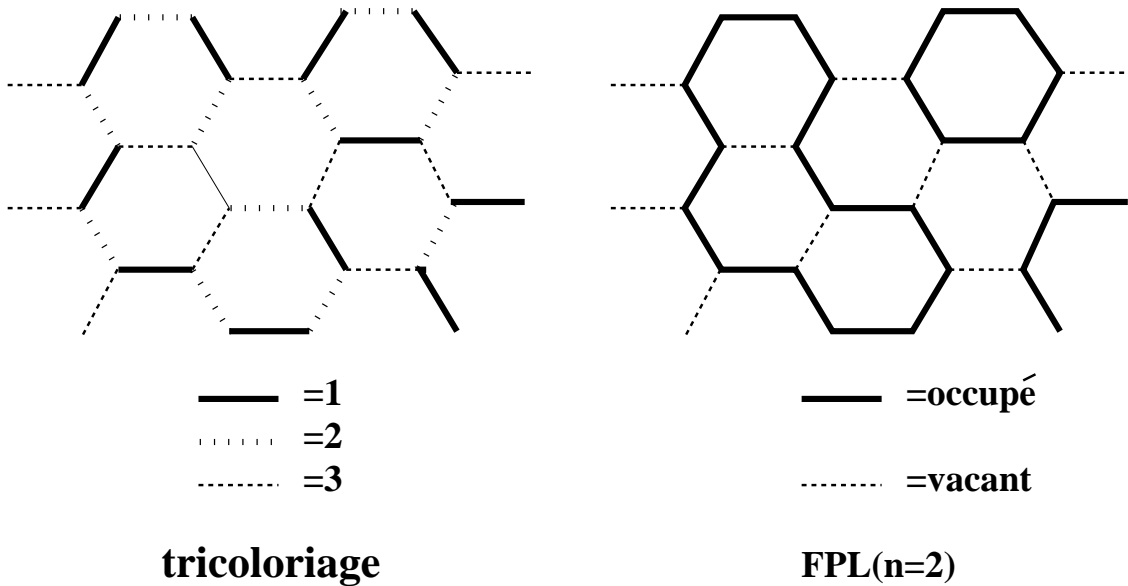


Fig. 4: Du tricoloriage des arêtes au gaz de boucles compactes: on remplace les boucles de successions d'arêtes de couleurs 1,2,1,2... par des boucles monochromes, avec un poids 2 par boucle pour les deux façons de les bicolorier.

Il se trouve que ce modèle sans paramètre est directement critique. Il fait partie d'une classe beaucoup plus grande de modèles dits de gaz de boucles sur réseaux [26]. Pour le voir, considérons les configurations duales de notre réseau triangulaire tricolorié des arêtes. On a alors le réseau hexagonal, dont les arêtes sont coloriées 1, 2, 3 et telles que à chaque sommet les couleurs des arêtes soient distinctes (cf. Fig.4). Concentrons-nous sur les couleurs 1 et 2. Les arêtes de couleur 1 et 2 forment des boucles le long desquelles la couleur alterne 1, 2, 1, 2, Oubliant la couleur 3 et ne distinguant pas les couleurs 1 et 2, on peut voir cette configuration comme une configuration de boucles auto- et mutuellement évitantes tracées sur les arêtes du réseau hexagonal (cf. Fig.4). Si l'on rétablit les couleurs, on voit qu'un autre tricoloriage peut être obtenu en échangeant les couleurs 1 et 2 le long de l'une quelconque de ces boucles. On obtient en fait toutes les tricolorations en tirant d'abord au hasard les liens de couleur 3 qui forment des configurations maximales occupées d'arêtes dures sur le réseau hexagonal, puis en choisissant arbitrairement les successions 1, 2, 1, 2... indépendamment le long de chaque boucle. Le résultat est équivalent au choix de configurations du gaz de boucles, et revient à affecter un poids 2 à chaque boucle.

Ce gaz de boucles est très particulier, car les boucles visitent tous les sommets du réseau, il porte le nom de gaz de boucles compactes (Fully-Packed Loop model) pour cette raison. Généralement, un poids n est affecté à chaque boucle, et le modèle correspondant porte l'acronyme $FPL(n)$.

Les modèles $FPL(n)$ sont en fait tous critiques pour $-2 \leq n \leq 2$, et décrits dans la limite continue par des théories conformes de charges centrales [27] [28]

$$c_{FPL}(n) = 2 - 6 \frac{e^2}{1 - e}, \quad n = 2 \cos \pi e, \quad e \in [0, 1) \quad (4.2)$$

Une autre phase intéressante du modèle de gaz de boucles est la phase dense, dans laquelle les boucles ne sont plus astreintes à visiter tous les sommets, mais où la densité thermodynamique de sommets visités demeure non nulle. Cette phase dense $DL(n)$ est aussi décrite par des théories conformes de charges centrales [29]

$$c_{DL}(n) = 1 - 6 \frac{e^2}{1 - e}, \quad n = 2 \cos \pi e, \quad e \in [0, 1) \quad (4.3)$$

On remarque que $c_{FPL}(n) = 1 + c_{DL}(n)$. Nous avons déjà mentionné que la charge centrale d'une théorie mesure son nombre de degrés de liberté. En fait, alors que la théorie $DL(n)$ peut être décrite par un champ libre bosonique (gaz Coulombien), la théorie $FPL(n)$ en nécessite deux. Dans le cas du pliage du réseau triangulaire, qui a donc $n = 2$ et

$c_{FPL}(2) = 2$, il est aisé d'identifier la version discrète du champ à deux composantes: c'est tout simplement la position des sommets du réseau initial après pliage, qui prend ses valeurs dans \mathbb{R}^2 . Pour $DL(n)$, la version discrète du champ est obtenue en orientant les boucles arbitrairement et en leur affectant un poids $e^{\pm i\pi e}$ suivant l'orientation, et en considérant celles-ci comme les courbes de niveau d'une carte plane: le champ est alors simplement la hauteur sur cette carte. Les corrections aux valeurs 2 et 1 de la charge centrale pour $FPL(n)$ et $DL(n)$ dans (4.2) et (4.3) respectivement proviennent de la nécessité de placer des charges électriques de fond afin de donner les bons poids n aux boucles, y compris dans les situations où celles-ci auraient une homologie non-triviale (par exemple sur un cylindre).

4.3. Pliabilité des triangulations aléatoires et tricoloriages

Le problème de pliage des réseaux aléatoires peut se formuler très simplement si l'on remplace le réseau triangulaire par une triangulation aléatoire, duale d'un graphe aléatoire trivalent, disons planaire pour plus de simplicité.

Un premier problème se pose: la triangulation est-elle toujours pliable, c'est à dire: existe-t-il toujours des configurations pliées au sens de la section 4.4? La réponse est non. Une triangulation n'est pliable que si chacun de ses sommets a une valence paire, c'est à dire si elle est Eulérienne. De manière équivalente, si une triangulation est pliée sur une portion du réseau triangulaire, choisissons une tricoloration fondamentale des sommets du réseau triangulaire. Par image réciproque, cette tricoloration des sommets se traduit par une tricoloration des sommets de la triangulation de départ. La parité des valences est alors évidente, puisque des sommets de deux couleurs doivent alterner autour de chaque sommet de la troisième.

L'énumération des triangulations tricoloriées des sommets avec des poids p, q, z pour chacune des trois couleurs est l'objet de la référence [P5]. Nous y obtenons des résultats exacts au moyen d'une intégrale sur deux matrices.

Le véritable modèle de pliage des triangulations Eulériennes reste ouvert: il faut pouvoir énumérer les tricoloriages des arêtes sur les graphes trivalent bicoloriables des sommets, et bien qu'un modèle de matrice existe pour cela, sa solution reste encore à trouver.

D'un point de vue gravitationnel, la limite continue d'un tel modèle est certainement problématique, puisque la charge centrale du modèle sur réseau régulier est $c_{FPL}(2) = 2 > 1$. On s'attend alors à une dégénérescence de la surface en polymère branché.

4.4. Le gaz de boucles compactes à $n = 1$

Un autre cas de gaz de boucles compactes sur réseau aléatoire peut se résoudre exactement. C'est lorsque $n = 1$, autrement dit en n'introduisant aucune pondération sur les boucles, que l'on se contente donc de compter. Dans la référence [P6], nous vérifions la validité de (4.2) sur un réseau aléatoire, pour $n = 1$.

Si l'on n'y prend garde, on peut considérer le modèle $FPL(1)$ sur des réseaux trivalents arbitraires. La fonction de partition s'écrit alors comme une intégrale matricielle simple

$$Z_1 = \int dA dB e^{-N \text{Tr} V(A,B)} \quad (4.4)$$

$$V(A,B) = \frac{A^2}{2} + \frac{B^2}{2} - g A^2 B$$

où A, B symbolisent les demi-arêtes respectivement occupées par des boucles et vacantes. En intégrant explicitement sur B , on obtient

$$Z_1 = \int dA e^{-N \text{Tr} (\frac{A^2}{2} - 2g^2 \frac{A^4}{4})} \quad (4.5)$$

qui n'est autre que la fonction de partition d'un modèle de graphes tétravalents avec poids $2g^2$ par sommet: c'est donc un modèle de la gravité pure, sans matière, avec charge centrale $c = 0$. Or $c_{FPL}(n = 1) = 1$ d'après (4.2). On observe ici un phénomène semblable à celui observé à la section 3.3 avec les objets durs: la gravité ordinaire a supprimé le point critique du modèle $FPL(n = 1)$, pour le remplacer par celui de $DL(n = 1)$, qui a une charge centrale nulle. En considérant des graphes trivalents arbitraires ou, dualement, des triangulations arbitraires (au lieu d'Eulériennes), on a éliminé le degré de liberté supplémentaire du modèle $FPL(1)$, ce qui l'a ramené effectivement à $DL(1)$: une façon de le comprendre est de voir que la distinction entre couleurs 1 et 2 n'est plus possible, à cause de la possibilité d'avoir des boucles de longueur impaire. Après avoir rendu les boucles monochromes, on est ramené à la situation de $DL(n)$, où les boucles orientées sont les courbes de niveau d'un champ à une seule composante, i.e. à valeurs dans \mathbb{R} et non \mathbb{R}^2 .

Nous avons vu à $n = 2$ qu'il était crucial que la triangulation soit Eulérienne pour une bonne définition du champ. Ceci doit être vrai a fortiori pour tout $n \in [-2, 2]$. Donc il nous faut donc finalement vérifier que sur des graphes trivalents bicoloriables, le modèle a bien la charge centrale 1. Dans [P6], nous montrons que ce modèle se décrit par un modèle de matrices complexes, qui s'interprète comme un point particulier du modèle à 6 vertex sur graphes tétravalents. Ce dernier, résolu dans [30] a bien une charge centrale 1.

4.5. Gravités Ordinaire et Eulérienne: leçon générale II

Les résultats des sections précédentes nous permettent maintenant de formuler une leçon générale sur la classe d'universalité des modèles de boucles compactes sur réseaux aléatoires.

Le modèle $FPL(n)$ couplé à la gravité ordinaire voit se réduire ses degrés de liberté à ceux de $DL(n)$. Les exposants gravitationnels sont donc donnés par les formules (2.11) mais avec la valeur $c = c_{DL}(n)$

Le modèle $FPL(n)$ couplé à la gravité Eulérienne voit ses degrés de liberté préservés, et donc les exposants gravitationnels sont toujours donnés par les formules (2.11) mais cette fois avec la valeur $c = c_{FPL}(n) = c_{DL}(n) + 1$. Les exposants Δ_i dépendent évidemment du contenu en opérateurs des deux théories, qui est légèrement différent [29].

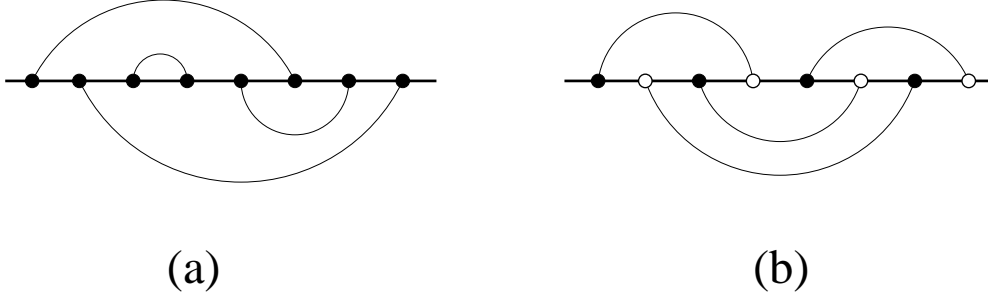


Fig. 5: Configurations typiques du modèle $FPL(0)$ en gravité ordinaire (a) et Eulérienne (b). La boucle unique est représentée comme une droite, au prix du marquage d'une arête. Les arêtes fines sont vacantes.

Illustrons ces affirmations dans le cas $n \rightarrow 0$. Faire la limite $n \rightarrow 0$ dans un gaz de boucles revient à ne garder que les configurations où il ne subsiste qu'une seule boucle. Donc $FPL(0)$ sur graphes trivalents est le modèle d'une boucle Hamiltonienne (qui visite tous les sites) [31]. Si l'on marque la boucle, on peut la représenter comme une droite, et le reste du graphe est formé des arêtes vacantes reliant des sommets le long de cette droite (voir Fig.5 pour un exemple avec gravité ordinaire (a) et Eulérienne (b)). Il est facile de compter les configurations avec $A = 2N$ sommets le long de la droite dans le cas de la gravité ordinaire: on doit d'abord choisir $2p$ sommets parmi les $2N$, que l'on connecte dans le demi-plan supérieur délimité par la droite, alors que l'on connecte les sommets restants dans le demi-plan inférieur. De telles connections de $2p$ points sans intersections entre les arêtes sont au nombre de $c_p = \frac{1}{p+1} \binom{2p}{p}$, le p ème nombre de Catalan. On a donc

$$Z_N = \sum_{p=0}^N \binom{2N}{2p} c_p c_{N-p} = c_N c_{N+1} \sim \frac{16^N}{\pi N^3} \quad (4.6)$$

Comme Z_N énumère les configurations avec un point marqué sur la boucle, l'énergie libre est $F_{0,2N} \sim 16^N/N^4$, donc en comparant ce comportement à la formule (2.10)(2.11) pour le cas planaire $h = 0$, on trouve $\gamma_0 = -1$ qui correspond bien à $c = c_{DL}(0) = -2$. Dans le cas de la gravité Eulérienne, le graphe doit en plus être bicoloriable, donc sommets noirs et blanc doivent alterner le long de la droite, et les arêtes vacantes ne peuvent connecter que des sommets de couleur opposée (voir Fig.eultri (b)). La prédiction est qu'alors [31]

$$Z_N^E \sim \frac{g_c^{-2N}}{N^{\frac{13+\sqrt{13}}{6}}} \quad (4.7)$$

obtenue en utilisant $c = c_{FPL}(0) = -1$. L'exposant correspondant à $c = -1$ semble être également omniprésent dans les problèmes d'énumération de noeuds [32] [33].

5. Méandres

Cette dernière section est consacrée à l'étude et à la solution asymptotique du problème des méandres. Le problème physique correspondant est celui du pliage véritable (et non fantôme comme à la section 4.1) des réseaux unidimensionnels, i.e. des polymères.

Le problème des méandres existe depuis très longtemps en mathématiques. On en retrouve des traces aussi loin que dans les travaux de Poincaré au début du XXème siècle ou, sous la houlette d'Arnold, dans le 16ème problème de Hilbert [34]. Il a été proposé comme récréation mathématique par Sainte Lagüe dans les années 30 [35] puis comme problème de pliage dans les années 50-60 [36]. Une version plus récente des années 90 porte des relations avec la théorie des variétés tridimensionnelles [37], une autre avec des questions de tri de suites de Jordan [38], une dernière avec l'algèbre [39]. Les premiers travaux d'énumération sur ordinateur [36] [40] ont suggéré un comportement du type g_c^{-2N}/N^α pour le nombre de méandres avec $2N$ points d'intersection, $N \rightarrow \infty$, avec une détermination numérique approchée de g_c et α . Notre résultat final sera la valeur exacte de l'exposant critique α . Comme physiciens, nous avons attaqué le problème par le biais du pliage auto-évitant compact à une dimension [41], et utilisé comme dans [40] un modèle de matrices, qui donne accès directement aux méandres mais via des expressions faisant intervenir les caractères du groupe symétrique. Toutefois, une version avec nombre multiple de courbes simples de deux couleurs, sans auto-intersections, et ne coupant que les courbes de la couleur opposée, a été résolue dans [42]. La formulation par intégrale matricielle a également permis de redémontrer dans [43] les règles de somme sur les nombres de méandres prouvées combinatoirement dans [41].

Dans cette section, nous rappelons d'abord la relation entre les modèles de pliage et les méandres, puis nous exposons les résultats obtenus pour les déterminants de méandres en mettant à profit une formulation purement algébrique en termes de l'algèbre de Temperley-Lieb dans [P7] et [P8]. Enfin, nous expliquons les arcanes de la stratégie menant à la solution de [P9] qui tranche véritablement par la précision de ses prédictions avec tous les travaux antérieurs, et pour finir nous présentons la vérification numérique de nos exposants.

5.1. Pliage d'une bande de timbres et méandres

Nous nous proposons d'étudier un modèle statistique décrivant le pliage auto-évitant d'un objet unidimensionnel. On peut penser à une bande de N timbres attachés les uns aux autres par le côté, que l'on peut plier à volonté. On s'intéresse aux configurations complètement pliées, qui occupent au terme du pliage l'espace d'un seul timbre (en négligeant l'épaisseur des timbres). Le pliage étant auto-évitant et non fantôme, les timbres ne peuvent s'interpénétrer.

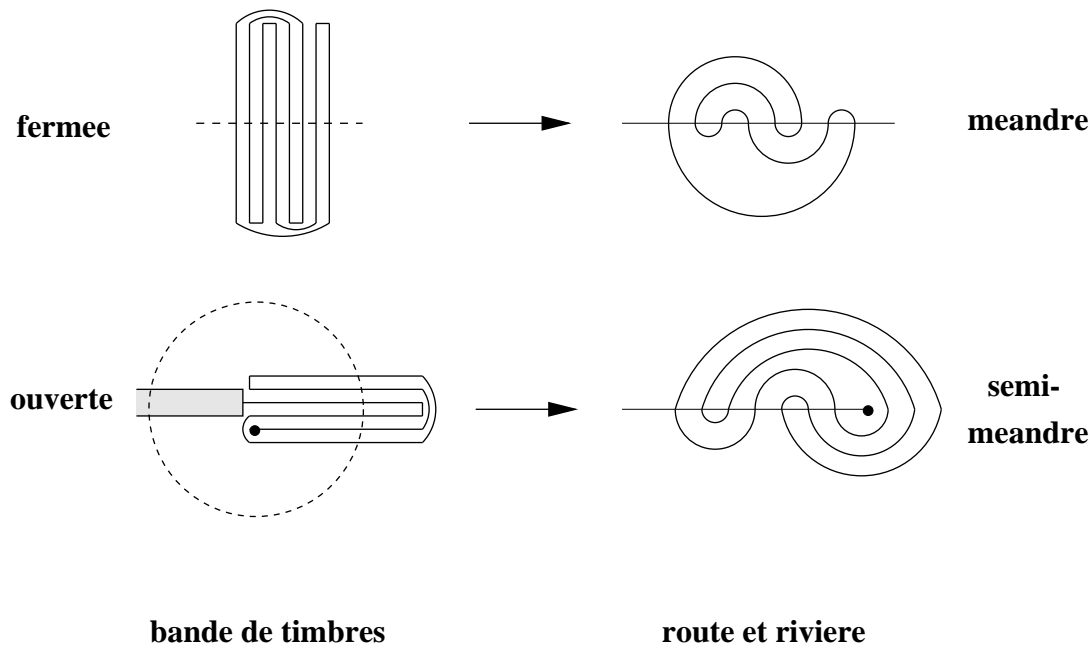


Fig. 6: Configurations typiques de bandes de timbres, fermée et ouverte. Nous avons représenté en pointillés le fil qui traverse les configurations complètement pliées. Les configurations de rivières et de routes correspondantes ont une rivière formant une droite (méandres) ou une demi-droite (semi-méandres). On note que la route du semi-méandre peut s'enrouler non-trivialement autour de l'origine de la rivière.

Dans un premier temps nous considérons le cas d'une bande fermée de $2N$ timbres, i.e. formant une boucle (voir Fig.6). Pour décrire une configuration pliée de la boucle, on imagine avoir transpercé la bande complètement pliée par une aiguille et du fil, que l'on représente comme une droite dans le plan. En détachant légèrement les timbres les uns des autres, on forme une image topologiquement équivalente à celle d'une courbe fermée (la boucle de timbres), ne s'intersectant pas elle-même, et coupant la droite précédente en $2N$ points. Cette configuration est appelée un *méandre*. On peut par exemple voir la droite comme une rivière et la courbe comme un circuit routier, qui traverse la rivière en $2N$ ponts (l'image duale, où la route est droite et la rivière courbe correspondrait mieux à la terminologie de méandre!). Soit M_{2N} le nombre de telles configurations topologiquement inéquivalentes avec $2N$ ponts.

On peut également étudier le problème du pliage d'une bande ouverte de $N - 1$ timbres, disons attachée à un carnet à une extrémité, autour de laquelle la bande ne peut pas s'enrouler (voir Fig.6). Partant d'une configuration complètement repliée sur un seul timbre, on perce à nouveau les timbres avec une aiguille et du fil, ainsi que le support du carnet, et l'on forme une boucle (en faisant un noeud au fil par exemple). On déplie alors la bande de timbres, qui, avec son support, forme une demi-droite, d'origine l'extrémité libre de la bande. L'image obtenue est similaire à un méandre, mais la rivière est maintenant formée d'une demi-droite, alors que la route forme toujours un circuit, cette fois traversant la rivière en N ponts. Cette configuration est appelée *semi-méandre*. On peut alors définir l'enroulement du semi-méandre comme le nombre minimal d'intersections entre un chemin issu de l'origine de la rivière et partant à l'infini et la route. Soit \bar{M}_N le nombre de telles configurations topologiquement inéquivalentes.

Une généralisation naturelle consiste à permettre plusieurs composantes connexes de route, et mène à la définition des nombres $M_{2N}^{(k)}$ et $\bar{M}_N^{(k)}$ de méandres et semi-méandres avec k routes, et aux polynômes des méandres et des semi-méandres $m_{2N}(q) = \sum_k q^k M_{2N}^{(k)}$ et $\bar{m}_N(q) = \sum_k q^k \bar{M}_N^{(k)}$.

Dans une série de publications, nous avons attaqué le problème d'énumération sous divers angles, combinatoire, algébrique, et finalement comme une théorie critique d'un gaz de boucles couplé à la gravité [41] [44] [P7] [P8] [P9]. Nous avons sélectionné les références [P7] [P8] qui reformulent le problème algébriquement (section 5.2 ci-dessous) et calculent entre autres un déterminant des méandres et des semi-méandres. Finalement nous utilisons dans [P9] l'approche utilisant les gaz de boucles compactes et la gravité quantique, menant

aux résultats les plus spectaculaires, en particulier sur le comportement asymptotique des nombres de méandres et de semi-méandres à grands nombres de ponts:

$$\begin{aligned} M_{2N} &\propto \frac{g_c^{-2N}}{N^\alpha} & \alpha &= \frac{29 + \sqrt{145}}{12} \\ \bar{M}_N &\propto \frac{g_c^{-N}}{N^{\bar{\alpha}}} & \bar{\alpha} &= 1 + \frac{\sqrt{11}}{24}(\sqrt{5} + \sqrt{29}) \end{aligned} \tag{5.1}$$

où g_c est une constante connue seulement numériquement. Pour conclure, [P10] est consacrée à la vérification numérique des résultats de [P9], basée sur des techniques de matrice de transfert.

5.2. Méandres et algèbre de Temperley-Lieb

La relation entre méandres et algèbre de Temperley-Lieb provient de la remarque qu'un méandre (avec possiblement plusieurs routes) a une partie supérieure et inférieure, délimitées par la rivière, appartenant au même ensemble (à une réflexion près). Ces "moitiés de méandre" sont appelées configurations d'arches, et connectent par N demi-cercles les $2N$ ponts par paires. Il y a exactement $c_N = \frac{1}{N+1} \binom{2N}{N}$ telles configurations inéquivalentes pour $2N$ ponts. On en déduit immédiatement que $m_{2N}(q=1) = \sum_k M_{2N}^{(k)} = c_N^2$, puisque les méandres sont obtenus par superposition de deux configurations d'arche arbitraires.

Pour les semi-méandres, une remarque analogue permet de montrer qu'une configuration d'arches sur $2N$ ponts correspond à une configuration de semi-méandre avec N ponts, en prenant une configuration d'arche inférieure fixe formée de N demi-cercles concentriques, qui connecte les ponts $i \leftrightarrow 2N+1-i$, $i=1, 2, \dots, N$. Il suffit alors, en gardant fixe le centre des demi-cercles, de refermer ceux-ci en faisant tourner les deux demi-droites issues de ce point, jusqu'à ce qu'elles se recollent le long de leurs N ponts respectifs en une demi-droite. Le résultat est bien un semi-méandre avec N ponts, avec possiblement plusieurs routes. On note que l'enroulement du semi-méandre est le nombre d'arches enjambant son milieu dans la formulation à $2N$ ponts. Comme plus haut, on a aussi la relation $\bar{m}_N(q=1) = c_N$.

Les configurations d'arches sont des objets naturels dans l'étude des représentations de l'algèbre de Temperley-Lieb $TL_p(q)$ [45]. Cette dernière est définie par des générateurs $1, e_1, e_2, \dots, e_{p-1}$ satisfaisant les relations

$$e_i^2 = qe_i, \quad e_i e_{i\pm 1} e_i = e_i, \quad [e_i, e_j] = 0 \text{ si } |i-j| > 1 \tag{5.2}$$

pour toutes les valeurs possibles de i, j . Une représentation très utile utilise des dominos, sortes de boîtes noires avec p entrées et p sorties, et que l'on multiplie en les concaténant, i.e. en identifiant les sorties du premier facteur avec les entrées du second. Les générateurs sont:

$$1 = \begin{array}{|c|} \hline \text{ } \\ \hline \vdots \\ \hline \text{ } \\ \hline \vdots \\ \hline \text{ } \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ \vdots \\ i \\ i+1 \\ \vdots \\ n \end{array} \quad e_i = \begin{array}{|c|} \hline \text{ } \\ \hline \vdots \\ \hline \text{ } \\ \hline \vdots \\ \hline \text{ } \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} i \\ i+1 \end{array} \quad (5.3)$$

avec les entrées à droite et les sorties à gauche, et les relations s'écrivent:

$$\begin{aligned} e_i^2 &= \begin{array}{|c|} \hline \text{ } \\ \hline \vdots \\ \hline \text{ } \\ \hline \vdots \\ \hline \text{ } \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} i \\ i+1 \end{array} = q \begin{array}{|c|} \hline \text{ } \\ \hline \vdots \\ \hline \text{ } \\ \hline \vdots \\ \hline \text{ } \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} i \\ i+1 \end{array} = q e_i \\ e_i e_{i+1} e_i &= \begin{array}{|c|} \hline \text{ } \\ \hline \vdots \\ \hline \text{ } \\ \hline \vdots \\ \hline \text{ } \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} i \\ i+1 \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \text{ } \\ \hline \vdots \\ \hline \text{ } \\ \hline \vdots \\ \hline \text{ } \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} i \\ i+1 \end{array} = e_i \end{aligned} \quad (5.4)$$

On voit que le facteur q correspond à un poids par boucle éliminée.

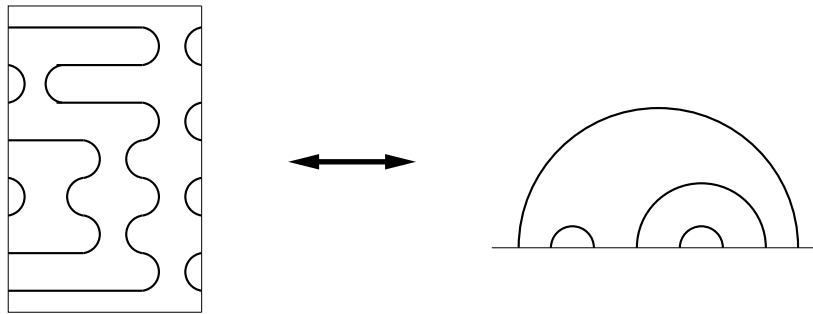


Fig. 7: Le domino d'un élément réduit typique de l'idéal $H_{2N}(q)$ avec $N = 4$ ici. Les entrées (à droite du domino) sont connectées par paires consécutives. Les sorties sont connectées par un système d'arches.

On se place alors à $p = 2N$, dans l'idéal à gauche $H_{2N}(q)$ engendré par $e_1 e_3 \dots e_{2N-1}$. Les éléments de cet idéal ont tous la particularité que leurs dominos ne connectent que les entrées entre elles et de même pour les sorties (cf. Fig.7). Plus précisément, les entrées sont connectées consécutivement par paires de voisines, alors que la connection entre les sorties est topologiquement équivalente à une configuration de N arches entre $2N$ ponts (identifiés aux sorties, voir Fig.7 pour une illustration). L'idéal $H_{2N}(q)$ peut être vu comme espace vectoriel en prenant des combinaisons linéaires de dominos, et sa dimension est donc

c_N , car une base est formée des dominos “réduits”, c’est à dire sans boucles internes. On utilise indifféremment la notation a pour une configuration d’arche ou le domino de $H_{2N}(q)$ correspondant. Il existe sur cet espace un produit scalaire naturel $a \cdot b = q^{c(a,b)}$ où $c(a,b)$ est le nombre de routes du méandre obtenu avec les configurations d’arches a (supérieure) et b (inférieure, après réflexion). Ce produit scalaire est induit par la trace $a \cdot b = \text{Tr}(b^\dagger a)$ où b^\dagger désigne le domino réfléchi (avec entrées et sorties échangées), et la trace identifie les entrées et les sorties du domino, puis remplace chaque boucle par un facteur q , et porte un facteur global de normalisation $1/q^N$. En particulier, on a

$$m_{2N}(q) = \sum_{a,b \in H_{2N}(q)} a \cdot b \tag{5.5}$$

et donc le polynôme des méandres n’est autre que la somme des éléments de la matrice de Gram de la base de dominos réduits de $H_{2N}(q)$.

Dans la référence [P7], cette connection est utilisée pour représenter les méandres (multiroutes) comme des marches aléatoires dans un quart de plan. En effet, chacune des deux configurations d’arches s’interprète comme une marche aléatoire sur une demi-droite, que l’on peut prendre comme coordonnées d’une marche à deux dimensions. Plus précisément, lorsqu’on décrit une configuration d’arche a de gauche à droite on voit la succession des ponts, avec des départs ou des arrivées d’arches, auxquels on associe des pas $+1$ ou -1 dans une marche W_a sur une droite entière, mais il y a toujours au moins autant de départs que d’arrivées, donc au moins autant de pas $+1$ que de -1 , et la marche se fait donc sur une demi-droite entière, et commence et finit à l’origine. L’expression (5.5) pour le polynôme des méandres se réinterprète donc comme la fonction de partition d’un modèle de mécanique statistique dont les configurations sont des marches du quart de plan commençant et terminant à l’origine, et dont la fonctionnelle d’énergie est à nouveau locale. En effet, cette dernière doit produire les poids q par composante connexe de route, inclus dans la définition de l’algèbre de Temperley-Lieb, donc en choisissant une bonne représentation [46] des a, b , le poids $q^{c(a,b)}$ s’écrit comme un produit de facteurs locaux le long du chemin (W_a, W_b) dans le quart de plan défini par a, b , qui ne dépend en fait que de la courbure locale des chemins composantes W_a, W_b . Une telle expression suggère que la limite thermodynamique $N \rightarrow \infty$ pourrait être décrite par une théorie des champs, ou tout au moins par une intégrale de chemins dans le plan avec une action locale. Une relation analogue est aussi observée pour les semi-méandres.

La connection avec $H_{2N}(q)$ nous a amenés également à nous intéresser au déterminant des méandres $D_{2N}(q)$, simplement défini comme le déterminant de la matrice de Gram de la base des dominos réduits de $H_{2N}(q)$. En utilisant la théorie des représentations de $TL_{2N}(q)$, nous avons calculé exactement ce déterminant:

$$D_{2N}(q) = \det (a \cdot b)_{a,b \in H_{2N}(q)} = \prod_{i=1}^N U_i(q)^{a_{N,i}} \quad (5.6)$$

$$a_{N,i} = \binom{2N}{N-i} - 2 \binom{2N}{N-i-1} + \binom{2N}{N-i-2}$$

où les $U_i(q)$ sont les polynômes de Chebishev de première espèce. Ce calcul repose sur l'orthogonalisation de Schmidt explicite de la matrice de Gram.

Dans la référence [P8], ce résultat est étendu aux déterminants des semi-méandres. Ce dernier est obtenu en introduisant la notion de configurations d'arches ouvertes, avec disons m points le long d'une droite, parmi lesquels r ($r = m \bmod 2$) sont connectés à l'infini, ce que l'on représente par r demi-droites verticales issues de ces points, les $m - r = 2N$ points restants étant connectés par des arches ne coupant pas ces demi-droites. Le nombre de telles configurations est simplement $c_{m,r} = \binom{m}{N} - \binom{m}{N-1}$, avec $m = 2N + r$. Ces arches correspondent en fait à un autre idéal de l'algèbre de Temperley-Lieb, à savoir $H_m^{(r)}(q)$, idéal à gauche de $TL_m(q)$ engendré par $e_1 e_3 \dots e_{2N-1}$. Un semi-méandre avec enroulement r peut être vu comme une superposition de deux configurations d'arches ouvertes a, b avec le même nombre r de demi-droites connectées à l'infini: celles-ci ne sont autres que les parties supérieure et inférieure délimitées par la rivière et son prolongement en une droite. Cette dernière coupe alors la route en exactement r endroits supplémentaires, qui ne sont pas des ponts de l'image originale. Les portions de route ainsi coupées créent autant d'arches "ouvertes", que l'on connecte à l'infini. Le déterminant des semi-méandres à N ponts avec enroulement r prend alors la forme:

$$D_N^{(r)}(q) = \det (a \cdot b)_{a,b \in H_m^{(r)}(q)} = \prod_{i=1}^N [U_i(q)]^{a_{N,i}^{(r)}} \quad (5.7)$$

$$a_{N,i}^{(r)} = c_{m,2i+r} - c_{m,2i+2+r} + r(c_{m,2i+r-2} - c_{m,2i+r})$$

avec toujours $m = 2N + r$. On retrouve (5.6) en prenant $r = 0$ dans (5.7).

Ce résultat a finalement été généralisé aux méandres associés à $SU(N)$ dans le contexte des idéaux des quotients correspondants de l'algèbre de Hecke [47] et aux méandres coloriés dans le contexte de la généralisation coloriée de l'algèbre de Temperley-Lieb connue sous le nom d'algèbre de Fuss-Catalan [2].

La solution asymptotique (thermodynamique pour les physiciens) du problème des méandres est l'objet de la référence [P9]. La stratégie menant au résultat utilise peu ou prou l'ensemble des résultats ou leçons obtenus jusqu'ici. Nous avons décomposé le raisonnement en plusieurs étapes.

Etape 1: Gaz de boucles et gravité

On observe qu'une configuration de méandre n'est autre qu'un graphe tétravalent planaire sur lequel sont dessinées une rivière et une route. Dans le cas multiroutes, on aurait une seule rivière et possiblement plusieurs routes. On note aussi que tous les sommets ont la même configuration de croisement entre route et rivière.

Ceci suggère de voir le méandre comme un modèle de boucles compactes de deux types, disons des rivières (couleur 1) et des routes (couleur 2), couplé à la gravité, c'est à dire défini sur des graphes tétravalents planaires arbitraires. Cette formulation explique déjà la forme des comportements asymptotiques (5.1), par comparaison aux formules générales (2.12).

Etape 2: La version réseau régulier

Pour capturer le comportement du nombre de méandres à grand N , il nous suffirait donc, en utilisant les formules (2.11), de connaître la classe d'universalité du modèle correspondant sur réseau régulier.

Cet exercice est toutefois mal défini, car par exemple on pourrait prendre un modèle de routes et de rivières qui se croisent et qui visitent tous les sites du réseau carré, avec un poids n_1 par rivière et n_2 par route. Ce choix est malheureusement inintéressant, car les configurations sur un domaine D seraient entièrement déterminées par la donnée des arêtes de sa frontière, puisqu'une rivière ou une route doit toujours suivre une ligne droite. De la trivialité du modèle sur réseau, on concluerait immédiatement que $c = 0$, et via (2.11) que $\alpha = 5/2$, grossièrement faux au vu des simulations numériques connues pour lesquelles $\alpha \sim 3.5\dots$ [36] [40] [48].

La version correcte doit permettre aux routes et rivières de former des boucles sur le réseau carré et pas seulement en prenant avantage d'éventuelles conditions de bords périodiques. Il faut donc que les routes et rivières puissent "tourner" à droite ou à gauche sur des sommets. On introduit donc des configurations supplémentaires de sommets, où route et rivière sont tangentes, et font chacune un quart de tour, plutôt que de se croiser. Ce modèle est bien connu sous le nom de "gaz de boucles compactes à deux saveurs" aussi

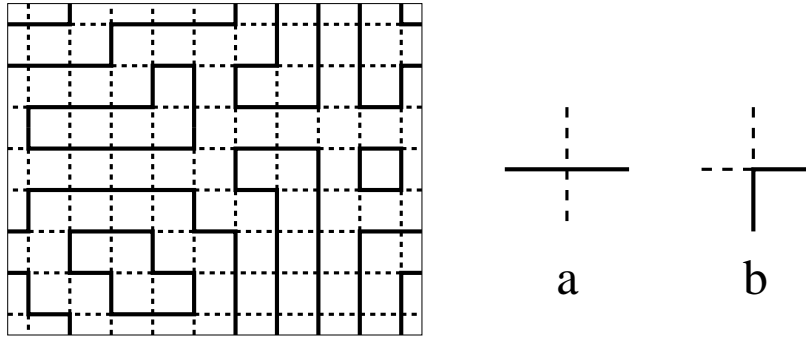


Fig. 8: Configuration typique du modèle $FPL(n_1, n_2)$. Les rivières sont représentées en trait plein, les routes en pointillés. Nous avons représenté en exergue les deux configurations de sommets à rotation près, où la rivière et la route se croisent (a) ou sont tangentes (b).

noté $FPL(n_1, n_2)$ pour lequel chaque rivière (route) reçoit un poids n_1 (n_2). Nous avons représenté une configuration typique de ce modèle en Fig.8, avec les deux configurations de croisement et de tangence aux sommets, à rotation près.

Ce modèle a par chance été déjà très étudié [49] et son diagramme de phases fait apparaître la criticité du modèle dans tout le domaine $n_1, n_2 \in [-2, 2]$. La limite continue est alors décrite par une théorie conforme de charge centrale

$$c_{FPL}(n_1, n_2) = 3 - 6 \frac{e_1^2}{1 - e_1} - 6 \frac{e_2^2}{1 - e_2}, \quad n_1 = 2 \cos \pi e_1, \quad n_2 = 2 \cos \pi e_2, \quad e_1, e_2 \in [0, 1) \quad (5.8)$$

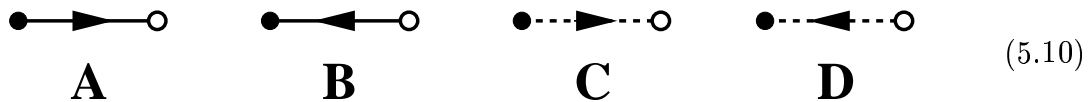
Il est intéressant de faire le parallèle avec le cas du réseau hexagonal déjà rencontré en section 4.2. Tout comme dans ce cas, une autre phase dite dense et appelée $DL(n_1, n_2)$ forme un autre point critique: elle correspond à inclure la possibilité que les boucles ne visitent pas tous les sommets, et qu'il y ait donc des arêtes vacantes. Remarquablement, $DL(n_1, n_2)$ est aussi décrit dans la limite continue par une théorie conforme de charge centrale

$$c_{DL}(n_1, n_2) = 2 - 6 \frac{e_1^2}{1 - e_1} - 6 \frac{e_2^2}{1 - e_2}, \quad n_1 = 2 \cos \pi e_1, \quad n_2 = 2 \cos \pi e_2, \quad e_1, e_2 \in [0, 1) \quad (5.9)$$

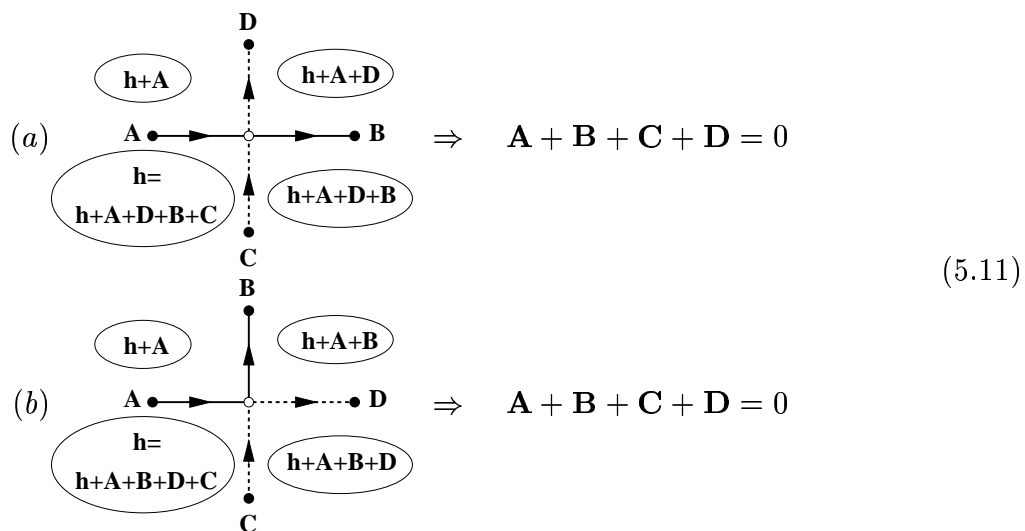
donc on observe la même relation $c_{FPL} = c_{DL} + 1$ qu'à la section 4.2.

Pour mieux comprendre les valeurs $c = 3$ et $c = 2$ des modèles compact et dense à $n_1 = n_2 = 2$, construisons dans les deux cas la version discrète du champ. On commence comme dans le cas hexagonal par orienter les boucles de couleur 1, 2 de manière arbitraire: en sommant sur cette orientation on produit les facteurs $n_1 = n_2 = 2$ par boucle. Ensuite,

on bicolore les sommets du réseau carré, noir et blanc en alternance. On peut alors faire un dictionnaire des 4 configurations d'arête possibles, appelées maintenant **A**, **B**, **C**, **D**, selon la couleur de la boucle qui l'occupe et son orientation relative au sommet noir par exemple:



où nous avons représenté en traits pleins la couleur 1 (rivières) et en pointillés la couleur 2 (routes). On définit ensuite une variable de hauteur h sur chaque face du réseau, avec la contrainte que $h' - h = X \in \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$ pour les hauteurs h, h' des faces séparées par une arête de configuration X , si l'on va de h à h' en gardant le sommet blanc à droite. Pour que la hauteur soit bien définie, elle doit satisfaire une relation de compatibilité autour de chaque sommet, à savoir:



Dans tous les cas, on n'obtient qu'une relation $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D} = 0$. L'objet le plus général satisfaisant cette contrainte est un quadruplet de vecteurs en 3 dimensions. Donc la variable de hauteur est tridimensionnelle, et le champ correspondant a 3 composantes, ce qui explique $c_{FPL}(2, 2) = 3$.

Pour le modèle dense, il faut ajouter au dictionnaire (5.10) un cinquième état **E** correspondant à une arête vacante. La hauteur est toujours définie de la même façon. En plus des deux sommets (5.11), nous devons vérifier la compatibilité de h autour d'un sommet dont toutes les arêtes sont vacantes, ce qui donne $4\mathbf{E} = 0$, donc $\mathbf{E} = 0$, puis autour d'un sommet dont deux arêtes sont vacantes, ce qui donne $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} + \mathbf{D} = 0$. L'objet le plus général satisfaisant ces deux relations est une paire de vecteurs \mathbf{A}, \mathbf{C} en

deux dimensions et leurs opposés $\mathbf{B} = -\mathbf{A}$ et $\mathbf{D} = -\mathbf{C}$. Donc la hauteur correspondante est maintenant bidimensionnelle, et $c_{DL}(2, 2) = 2$. A nouveau, les soustractions effectuées à partir des valeurs 3 et 2 de c dans (5.8) et (5.9) correspondent à la présence de charges électriques de fond destinées à donner les bons poids n_1, n_2 aux boucles d'homologie non triviale.

Etape 3: Couplage à la gravité, mais quelle gravité?

Nous avons vu au cours de la construction du champ pour le modèle $FPL(n_1, n_2)$ que la définition des degrés de liberté passait par l'étape indispensable de bicoloration des sommets du réseau. Donc pour bien coupler tous les degrés de liberté du modèle $FPL(n_1, n_2)$ à la gravité, nous devons utiliser la gravité Eulérienne, sous la forme de graphes planaires tétravalents bicoloriés des sommets. Le modèle correspondant a les exposants gravitationnels donnés par (2.11) avec c donnée par (5.8). Pour réduire les nombres de routes et de rivières à un, on fait comme à la section 4.5 tendre $n_1, n_2 \rightarrow 0$, avec le résultat $c_{FPL}(0, 0) = -3$. Les objets correspondants sont des graphes planaires bicoloriés sur lesquels sont tracées une routes et une rivière, qui peuvent soit se croiser, soit être tangentes. Au prix de marquer une arête de rivière, on peut ouvrir celle-ci et la représenter comme une droite. L'objet correspondant est un méandre avec points de tangence entre route et rivière, et bicoloration des sommets, dont les couleurs doivent alterner à la fois le long de la rivière et de la route. La prédiction de la théorie de la gravité quantique (2.11) donne le comportement du nombre de méandres à points de tangence μ_N en fonction du nombre total de ponts et de points de tangence N , pour $N \rightarrow \infty$:

$$\mu_N \propto \frac{g_c^{-N}}{N^\beta}, \quad \beta = 2 - \gamma_0(c = -3) = \frac{7 + \sqrt{7}}{3} \quad (5.12)$$

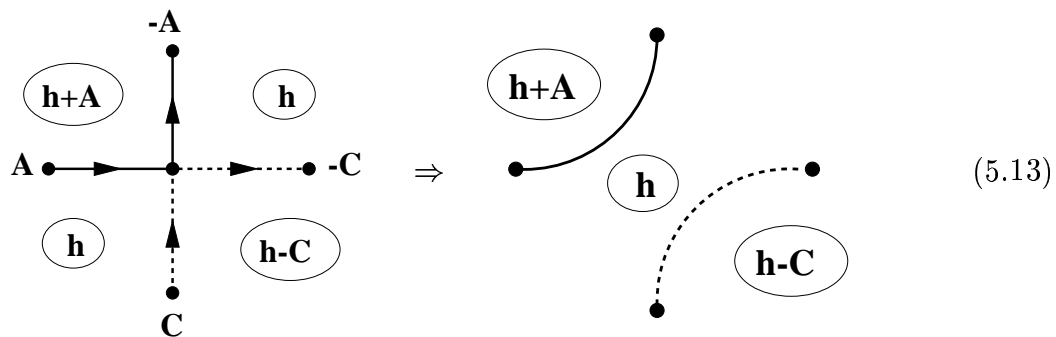
où l'on a pris en compte un facteur global N pour le marquage d'une arête de rivière.

Etape 4: La charge centrale $c = -4$

La fonction de comptage μ_{2N} n'a pas de raisons d'être comparable à M_{2N} , puisque les points de tangence peuvent modifier profondément la classe d'universalité. Pour finalement comprendre les méandres dans ce cadre, il faut comprendre l'effet de la suppression des points de tangence. En revenant aux valeurs de la hauteur autour d'un sommet tangent (ligne (b) de l'équation (5.11)), on se convainc aisément que sur un sommet tangent, la hauteur de deux faces diagonalement opposées extérieures aux boucles ne diffère que d'un vecteur dans la direction $\pm(\mathbf{A} + \mathbf{B})$. Ceci est à contraster des sommets de croisement (a), pour lesquels la hauteur peut en diagonale varier de quantités $\pm(\mathbf{A} - \mathbf{C})$ ou $\pm(\mathbf{B} + \mathbf{C})$

On peut voir les trois directions comme les trois degrés de liberté du champ. Supprimer le sommet (b) revient donc à réduire ces degrés de liberté, de 3 à 2. De ce fait, la suppression des points de tangence a pour effet de réduire la valeur de la charge centrale d'une unité, donc $c = -4$ est la valeur attendue pour les méandres sans les points de tangence.

Nous aurions pu suivre une approche différente et coupler le modèle $FPL(n_1, n_2)$ à la gravité ordinaire. Dans ce cas, comme nous perdons la bicoloration des sommets, le dictionnaire (5.10) ne tient plus. Plus précisément, il devient impossible de distinguer les configurations \mathbf{B} de $-\mathbf{A}$, ni \mathbf{D} de $-\mathbf{C}$. Donc tout se passe pour les hauteurs comme si nous considérions le modèle $DL(n_1, n_2)$. Les méandres avec points de tangence sur graphes planaires tétravalents arbitraires sont donc dans la classe d'universalité du modèle $DL(0, 0)$ couplé à la gravité. La charge centrale correspondante est $c = c_{DL}(0, 0) = -4$. On voit ici que la bicolorabilité de la surface sous-jacente est à nouveau cruciale, puisqu'elle modifie la classe d'universalité (on passe de $c = -4$ en gravité ordinaire à $c + 1 = -3$ en gravité Eulérienne). En toute rigueur, nous n'avons pas encore identifié les méandres, puisqu'il y a toujours des points de tangence possibles. Considérons à nouveau les hauteurs autour du sommet tangent. Cette fois, les boucles de couleur 1 sont les courbes de niveau de la première composante du champ (selon \mathbf{A}), alors que les boucles de couleur 2 sont les courbes de niveau de la seconde (selon \mathbf{B}). On voit immédiatement que les hauteurs des faces diagonalement opposées et extérieures aux deux boucles ont maintenant la même hauteur. Tout se passe donc du point de vue des hauteurs comme si ce sommet n'existait pas, et on peut l'effacer comme suit:



Le sommet (b) est non-pertinent au sens du groupe de renormalisation en physique, en ce sens que sa présence n'affecte pas la classe d'universalité des objets étudiés. En d'autres termes, le nombre ν_{2N} de méandres avec points de tangence sur des graphes non nécessairement bicoloriables se comporte comme $\nu_{2N} \sim f_c^{-2N}/n^\alpha$ avec une constante f_c différente de g_c , mais avec le même exposant α que les méandres (5.1).

En conclusion, les deux approches proposées donnent toutes deux la même réponse pour la classe d'universalité des méandres: une théorie conforme de type $DL(0,0)$, de charge centrale $c = -4$, couplée à la gravité. Cette valeur de c donne via (2.11) l'exposant de susceptibilité de corde

$$\gamma_0(c = -4) = -\frac{5 + \sqrt{145}}{12} \quad (5.14)$$

On en déduit le comportement asymptotique (5.1) en utilisant (2.12) et en notant que le marquage de la rivière donne un facteur global $4N$, donc $\alpha = 2 - \gamma_0$.

5.4. La théorie des champs des méandres et d'autres nombres

Une fois identifiée la théorie conforme décrivant les grands méandres, nous pouvons aussi utiliser le contenu en opérateurs pour prédire d'autres quantités. Par exemple, les semi-méandres correspondent à des méandres dont la rivière est un segment, et dont une extrémité est envoyée à l'infini. En termes d'opérateurs, la fonction génératrice des semi-méandres est la corrélation à deux points d'un opérateur de création d'une rivière en un point. Plus précisément, on se souvient que les boucles (rivière ou route) sont orientées, on a donc en réalité une corrélation faisant intervenir un opérateur de création de rivière (source) et un opérateur d'annihilation de rivière (puits). Dans le langage du champ, cet opérateur crée une discontinuité du champ le long d'une ligne de type rivière, i.e. une discontinuité de h dans la direction \mathbf{A} . Comme opérateur créant un défaut (de type magnétique au sens du gaz de Coulomb), il porte une charge magnétique $+1$. L'opérateur d'annihilation du défaut porte la charge magnétique -1 . D'une manière générale, l'opérateur de création de k rivières, de charge $+k$, noté ψ_k , a la dimension conforme $h_k = (k^2 - 4)/32$ [49]. Comme on identifie

$$\sum_{N \geq 0} \bar{M}_N g^N = \langle \psi_1 \psi_{-1} \rangle \quad (5.15)$$


comme une corrélation gravitationnelle, en utilisant les formules (2.12) et (2.11), on en déduit le comportement à grand $N = A$ ici du nombre de semi-méandres, avec

$$\Delta_k = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{8 + 3k^2} - \sqrt{5}}{\sqrt{29} - \sqrt{5}} \quad (5.16)$$

donc $\Delta_1 = \frac{1}{48}(\sqrt{11} - 2\sqrt{5})(\sqrt{29} + \sqrt{5})$, et finalement on en déduit

$$\bar{\alpha} = 1 + 2\Delta_1 - \gamma_0 = 1 + \frac{\sqrt{11}}{24}(\sqrt{29} + \sqrt{5}) \quad (5.17)$$

Pour $k = 2$, on note que $h_2 = 0$ et $\Delta_2 = 0$ aussi. L'opérateur ψ_2 est en effet simplement un opérateur de marquage de rivière. Sa présence peut toutefois être requise afin de réaliser la neutralité magnétique dans les fonctions de corrélation plus générales, c'est à dire la cohérence globale des orientations des portions de rivière. Certaines corrélations multiples des opérateurs ψ s'interprètent directement en termes de nombres de configurations de méandres généralisés, typiquement des méandres dont la ou les rivières ont une géométrie particulière. Citons trois exemples pour conclure:

$$\begin{aligned}
 \text{cerise : } & \langle \psi_2 \psi_1 \psi_{-3} \rangle = \text{ 

où l'on note les insertions de ψ_2 nécessaires pour respecter la neutralité magnétique. Dans les trois cas le nombre de configurations à $2N$ ponts se comporte comme g_c^{-2N}/n^{α_i} , $i = c, h, e$):$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_c &= \frac{1}{48}(\sqrt{5} + \sqrt{29})(\sqrt{11} + \sqrt{35}) \\
 \alpha_h &= \frac{1}{24}(\sqrt{5} + \sqrt{29})(\sqrt{5} + \sqrt{14}) \\
 \alpha_e &= \frac{1}{24}(\sqrt{5} + \sqrt{29})\left(\frac{k}{2}\sqrt{11} + \frac{1}{2}\sqrt{3k^2 + 8} - \sqrt{5} - (k-2)\sqrt{29}\right)
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

5.5. Vérifications numériques

Le calcul explicite des premiers nombres de méandres est dû à Sainte Lagüe [35]. Depuis, diverses techniques d'énumération directe ont permis d'allonger la liste des nombres connus [36] [40] [48] [44], jusqu'à des nombres de ponts de l'ordre de 30. La vraie révolution est apparue avec la technique de matrice de transfert de Jensen [50]. Nous

avons utilisé et adapté cette technique pour la détermination de plusieurs nombres reliés aux méandres dans [P10], comme les semi-méandres, et les rivières à géométries plus exotiques de la section 5.4 ci-dessus. Cette technique, appliquée aux nombres de méandres permet d'atteindre $2N = 48$ en un temps calcul raisonnable, mais avec une forte consommation de mémoire.

La technique repose sur une formulation des méandres en termes d'une matrice de transfert. Pour bien la comprendre, faisons un exercice très simple avec les configurations d'arches sur $2N$ ponts. Le nombre total de configurations est connu, c'est le nombre de Catalan c_N . Une façon d'engendrer ces configurations est de procéder en allant de gauche à droite le long de la rivière. On part du vide, dénoté $|0\rangle$. On rencontre alors les ponts successivement en se déplaçant vers la droite. Entre deux ponts consécutifs, on caractérise l'état du système par le nombre n d'arches enjambant ce segment de rivière; cet état est symbolisé par un vecteur $|n\rangle$. Sur un pont générique, deux situations peuvent se produire: (i) une nouvelle arche commence (ii) une arche déjà commencée à une étape précédente se finit. On symbolise ces deux situations par deux opérateurs de création C et d'annihilation A d'arches, agissant sur les états $|n\rangle$. On a

$$C|n\rangle = |n+1\rangle, \quad A|n\rangle = (1 - \delta_{n,0})|n-1\rangle \quad (5.20)$$

La matrice de transfert du système d'arches est donc $T = C + A$, et le nombre total de configurations d'arches à $2N$ ponts est

$$c_N = \langle 0|(C + A)^{2N}|0\rangle \quad (5.21)$$

où l'on utilise la notation $\langle n|m\rangle = \delta_{n,m}$. Lorsqu'on applique le même traitement aux méandres, on voit qu'il faut utiliser deux entiers pour caractériser chaque état $|n,m\rangle$, où n, m sont les nombres d'arches enjambant le segment de rivière dans les demi-plans supérieur et inférieur, et l'on peut prendre $|n,m\rangle = |n\rangle \otimes |m\rangle$. La matrice de transfert est formée de quatre opérateurs $T = (A + C) \otimes (A + C)$ suivant l'état d'ouverture ou de fermeture des arches vers le haut ou le bas, et l'on obtient $\langle 0,0|T^{2N}|0,0\rangle = c_N^2 = m_{2N}(q = 1)$. La matrice de transfert naive a donc simplement énuméré tous les méandres multiroute, sans se soucier de leur nombre de routes. Pour garder en mémoire le nombre de routes, les états intermédiaires doivent porter plus d'information sur la connectivité des arches qui le précèdent, donc typiquement l'état est une configuration d'arches, marquée à l'endroit où

passer la rivière. Donc au prix de cette complication, il est aisé de dénombrer les méandres par itération de la matrice de transfert.

Après l'énumération exacte, il faut extraire les exposants, une tâche assez délicate car on ne connaît pas *a priori* la forme des corrections à l'ordre dominant en N . Toutefois, des approximations de type Padé ou différentielles donnent d'excellents résultats, en particulier

$$\alpha = 3.42\dots, \quad \bar{\alpha} = 2.053\dots \quad (5.22)$$

avec une polémique sur la 4ème décimale de $\bar{\alpha}$ [51], qui confirme tout de même les trois premières!

Dans [P10], nous testons aussi numériquement le fait que les méandres en gravité ordinaire sont insensibles à la présence des points de tangence route-rivière, c'est à dire la robustesse de l'exposant α même en présence d'une densité finie de ces points, alors que g_c , lui, est affecté. Nous vérifions aussi d'autres prédictions, telles les méandres dont la rivière fait un huit (section 5.4), en adaptant la méthode au cas de deux rivières parallèles.

6. Conclusion

Ce mémoire résume le sujet de plusieurs années de travail, dont chaque petit progrès semble avoir contribué à la solution asymptotique finale du problème des méandres. Soulignons que certaines de ces étapes ne sont pas mathématiquement rigoureuses et que *stricto sensu* ces derniers résultats doivent être appelés conjectures. Au vu du cheminement tout de même assez compliqué qui a mené aux prédictions (5.1), on peut se demander si une preuve mathématiquement solide est ne serait-ce qu'à portée.

Une piste possible utiliserait la toute dernière section 5.5 pour reformuler le problème d'énumération pure en termes d'une matrice de transfert agissant sur un espace vectoriel d'états. La matrice de transfert et les états sont bien définis dans [P10], et il semble que le résultat (5.1) se résume à certaines propriétés de la matrice de transfert et des ses vecteurs et valeurs propres. On pourrait probablement s'échauffer en essayant de démontrer la prédiction (4.7) pour le modèle $FPL(0)$ couplé à la gravité Eulérienne, et dont la matrice de transfert est sensiblement plus simple. Le problème en tout cas est ouvert, et certainement intéressant.

Finalement, il existe un assez grand nombre d'à-côtés de notre travail, par exemple des prédictions concernant les réseaux aléatoires de genre plus élevé. Ainsi, la formule (2.11) une fois transcrite dans notre problème avec $c = -4$ donne accès au comportement

asymptotique du nombre de méandres sur une surface de genre h . Nous avons également des prédictions pour toutes valeurs des poids n_1, n_2 par rivière et route, et pas seulement pour $n_1 = n_2 = 0$.

Du point de vue de la physique, nous avons identifié la classe d'universalité des objets unidimensionnels repliés compactement et de manière auto-évitante. On pourrait se poser la même question en dimension plus élevée: qu'en est-il du pliage auto-évitant à deux dimensions par exemple? du pliage auto-évitant du réseau triangulaire? Cette question est ouverte et difficile, comme on s'en convainc facilement en essayant de dénombrer les pliages auto-évitants de petits systèmes, comme un rectangle 3×4 du réseau carré: le plus simple est encore de prendre une feuille de papier et d'expérimenter par soi-même. Dans une autre direction, le sujet des gaz de boucles compactes couplées à la gravité est très riche et encore tout de même assez peu exploré. D'autres problèmes combinatoires seront probablement résolus asymptotiquement par les méthodes du présent recueil, comme par exemple le problème suivant: "énumérer les configurations topologiquement inéquivalentes d'une courbe simple se croisant elle-même en $2N$ points (i.e. une courbe fermée que l'on dessine sans lever le stylo)", pour lequel il est raisonnable de penser qu'une théorie conforme avec $c = -1$ couplée à la gravité fournit la bonne classe d'universalité [33].

Plus généralement, les retombées mathématiques d'un sujet de physique comme celui de la gravité quantique bidimensionnelle sont extrêmement variées. L'une des plus marquantes est sans doute la renaissance de la géométrie énumérative, sous l'impulsion de Kontsevich et Manin [52] [53]. Le sujet n'a sans aucun doute pas encore épuisé toutes ses ressources, et il nous appartient de les développer.

Remerciements

Je tiens à remercier avant tout mon principal collaborateur durant toutes ces années, Emmanuel Guitter, sans qui rien de tout cela n'aurait été possible. Je remercie également Jérémie Bouttier, Mark Bowick, Bertrand Eynard, Olivier Golinelli, Jesper Jacobsen et Charlotte Kristjansen pour leur participation directe à ce long projet. Une grande partie de ce travail a été effectuée au Service de Physique Théorique de Saclay, et j'y ai entre autres eu de nombreuses discussions riches et stimulantes, avec en particulier Denis Bernard, François David, Claude Itzykson, Ivan Kostov, Jean Zinn-Justin et Jean-Bernard Zuber. Une partie de ce travail s'est aussi effectuée pendant mon séjour au département de mathématiques de l'Université de Caroline du Nord, UNC Chapel Hill, où j'ai bénéficié

des encouragements constants de Jim Stasheff, ainsi que de son extrême ouverture vers les problèmes de physique en général. Je remercie aussi John Cardy, Ivan Cherednik, Deepak Dhar, Tony Guttman, Volodya Kazakov, David Kutasov, Rodica Simion, Xavier Viennot, Paul Wiegmann, Paul Zinn-Justin, Alexandre Zvonkine pour de nombreuses discussions. Je remercie également les membres du jury, Edouard Brézin, Anne Boutet de Monvel, Alexander Its, Xavier Viennot et Jean-Bernard Zuber ainsi que les rapporteurs Craig Tracy et Vadim Malyshev. Enfin, je remercie particulièrement Anne Boutet de Monvel et Jean-Jacques Sansuc pour leur accueil à l'Université Paris VII, et pour leur intérêt pour la physique mathématique, et en particulier pour les sujets que je représente.

- [P1] P. Di Francesco, E. Guitter and C. Kristjansen, *Integrable 2D Lorentzian Gravity and Random Walks*, Nucl. Phys. **B567** (2000) 515-553, hep-th/9907084.
- [P2] P. Di Francesco and E. Guitter, *Critical and Multicritical Semi-Random $(1 + d)$ -Dimensional Lattices and Hard Objects in d Dimensions*, J. Phys. A: Math. Gen. **35** (2002) 897-927, cond-mat/0104383.
- [P3] J. Bouttier, P. Di Francesco and E. Guitter, *Critical and Tricritical Hard objects on Bicolorable Random Lattices: Exact Solutions*, J. Phys. A: Math. Gen. **35** (2002) 3821-3854, cond-mat/0201213.
- [P4] P. Di Francesco and E. Guitter, *Entropy of Folding of the Triangular Lattice*, Europhys. Lett. **26** (1994) 455-460, cond-mat/9402058.
- [P5] P. Di Francesco, B. Eynard and E. Guitter, *Coloring Random Triangulations*, Nucl. Phys. **B516** [FS] (1998) 543-587, cond-mat/9711050.
- [P6] P. Di Francesco, E. Guitter and C. Kristjansen, *Fully Packed $O(n=1)$ Model on Random Eulerian Triangulations*, Nucl. Phys. **B549** [FS] (1999) 657-667, cond-mat/9902082.
- [P7] P. Di Francesco, O. Golinelli and E. Guitter, *Meanders and the Temperley-Lieb algebra*, Comm. Math. Phys. **186** (1997), 1-59, hep-th/9602025.
- [P8] P. Di Francesco, *Meander Determinants*, Commun. Math. Phys. **191** (1998) 543-583, hep-th/9612026.
- [P9] P. Di Francesco, O. Golinelli and E. Guitter, *Meanders: Exact Asymptotics*, Nucl. Phys. **B570** (2000) 699-712, cond-mat/9910453.
- [P10] P. Di Francesco, E. Guitter and J. Jacobsen, *Exact meander asymptotics: a numerical check* Nucl. Phys. **B580**[FS] (2000) 757-795, cond-mat/0003008.

References

- [1] P. Di Francesco, P. Ginsparg and J. Zinn-Justin, *2D Gravity and Random Matrices*, Physics Reports **254** (1995) 1-131.
- [2] P. Di Francesco, *Folding and Coloring Problems in Mathematics and Physics*, Bulletin of the AMS, Vol. **37**, No. **3** (2000) 251-307.
- [3] P. Di Francesco, P. Mathieu and D. Sénéchal, *Conformal Field Theory*, Graduate Texts in Contemporary Physics, Springer (1996) 1-890 (1st ed.) and Springer (1999) 1-890 (2nd ed.).
- [4] V.G. Knizhnik, A.M. Polyakov and A.B. Zamolodchikov, *Fractal Structure of 2D Quantum Gravity*, Mod. Phys. Lett. **A3** (1988) 819-826; F. David, *Conformal Field Theories Coupled to 2D Gravity in the Conformal Gauge*, Mod. Phys. Lett. **A3** (1988) 1651-1656; J. Distler and H. Kawai, *Conformal Field Theory and 2D Quantum Gravity*, Nucl. Phys. **B321** (1989) 509-527.
- [5] P. Di Francesco, *2D quantum and topological gravities, matrix models, and integrable differential systems*, P. Di Francesco, in *The Painlevé Property, One Century Later*, CRM series in Mathematical Physics, R. Conte editor, Springer (1999) 229-285.
- [6] P. Di Francesco, *Matrix Model Combinatorics: Applications to Folding and Coloring*, in *Random Matrix Models and their Applications*, Bleher and Its Eds., MSRI Publications Vol. **40**, Cambridge University Press (2001) 111-170.
- [7] B. Eynard, *Random Matrices*, Saclay Lecture Notes (2000), available at http://www-spht.cea.fr/lectures_notes.shtml
- [8] A. Cappelli, C. Itzykson and J.-B. Zuber, *The A-D-E classification of minimal and $A_1^{(1)}$ conformal invariant theories*, Comm. Math. Phys. **113** (1997), 1-26.
- [9] J. Ambjørn and R. Loll, *Non-perturbative Lorentzian Quantum Gravity, Causality and Topology Change*, Nucl. Phys. B536 (1998) 407-434.
- [10] J. Ambjørn, J. Nielsen, J. Rolf and R. Loll, *Euclidean and Lorentzian Quantum Gravity - Lessons from Two Dimensions*, Chaos Solitons Fractals **10** (1999) 177-195
- [11] E. Brézin, C. Itzykson, G. Parisi and J.-B. Zuber, *Planar Diagrams*, Comm. Math. Phys. **59** (1978) 35-51.
- [12] W. Tutte, *A Census of Planar Maps*, Canad. Jour. of Math. **15** (1963) 249-271.
- [13] P. Di Francesco and D. Kutasov, *Unitary minimal models coupled to 2d quantum gravity*, Nucl. Phys. **B342** (1990) 589-624 ; *Correlation functions in 2D string theory*, Phys. Lett. **B261** (1991) 385-390 and *World Sheet and Space Time Physics in Two Dimensional (Super) String Theory*, Nucl. Phys. **B375** (1992) 119-170.
- [14] D. Gaunt and M. Fisher, *Hard-Sphere Lattice Gases.I.Plane-Square Lattice*, J. Chem. Phys. **43** (1965) 2840-2863.
- [15] L. Runnels, L. Combs and J. Salvant, *Exact Finite Methods of Lattice Statistics. II. Honeycomb-Lattice Gas of Hard Molecules*, J. Chem. Phys. **47** (1967) 4015-4020.

- [16] R. J. Baxter, I. G. Enting and S.K. Tsang, *Hard Square Lattice Gas*, J. Stat. Phys. **22** (1980) 465-489.
- [17] R. J. Baxter, *Planar Lattice Gases with Nearest-neighbour Exclusion*, Annals of Combin. No. **3** (1999) 191-203.
- [18] R. J. Baxter, *Hard Hexagons: Exact Solution*, J. Phys. **A 13** (1980) L61-L70; R. J. Baxter and S.K. Tsang, *Entropy of Hard Hexagons*, J. Phys. **A 13** (1980) 1023-1030; see also R. J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, Academic Press, London (1984).
- [19] V.A. Fateev and A.B. Zamolodchikov, *Seldual Solutions of the Star-triangle Relations in \mathbb{Z}_N Models*, Phys. Lett. **A92** (1982) 37-39; A.B. Zamolodchikov and V.A. Fateev, *Nonlocal (Parafermion) Currents in Two-dimensional Conformal Quantum Field Theory and Self-dual Critical Points in \mathbb{Z}_n -symmetric Statistical Systems*, Sov. Phys. J.E.T.P. **62** (1985) 215-225.
- [20] D. Kurze and M. Fisher, *Yang-Lee Edge Singularities at High Temperatures*, Phys. Rev. **B20** (1979) 2785-2796.
- [21] J. Cardy, *Conformal Invariance and the Yang-Lee Edge Singularity in Two Dimensions*, Phys. Rev. Lett. **54**, No. 13 (1985) 1354-1356.
- [22] X. Viennot, *Heaps of pieces I: Basic definitions and combinatorial lemmas*, in *Combinatoire énumérative*, G. Labelle and P. Leroux eds., Lecture Notes in Mathematics **1234** (1986) 321-350 and M. Bousquet-Mélou and X. Viennot, *Empilements de segments et q -umation de polyominos convexes dirig*, J. Combin. Theory Ser. A, vol. **60** (1992) 196-224.
- [23] D. Dhar, *Exact solution of a directed-site animals-enumeration problem in three dimensions*, Phys. Rev. Lett. **51** (1983) 853-856.
- [24] M. Staudacher, *The Yang-Lee Edge Singularity on a Dynamical Planar Random Surface*, Nucl. Phys. **B336** (1990) 349-362.
- [25] R. Baxter, *Colorings of a hexagonal lattice*, J. Math. Phys. **11** (1970) 784-789.
- [26] B. Nienhuis in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, Vol. 11, eds. C. Domb and J.L. Lebowitz, Academic Press 1987.
- [27] H.W.J. Blöte and B. Nienhuis, *Fully-packed loop model on the honeycomb lattice*, Phys. Rev. Lett. **72** (1994) 1372-1375 and Phys. Rev. Lett. **73** (1994) 2787.
- [28] M.T. Batchelor, J. Suzuki and C.M. Yung, *Exact Results for Hamiltonian Walks from the Solution of the Fully Packed Loop Model on the Honeycomb Lattice*, Phys. Rev. Lett. **73** (1994) 2646-2649.
- [29] J. Kondev, J. de Gier, and B. Nienhuis, *Operator Spectrum and Exact Exponents of the Fully Packed Loop Model*, J. Phys. A: Math. Gen. **29** (1996), 6489-6504.
- [30] V. Kazakov and P. Zinn-Justin, *Two-Matrix model with ABAB interaction*, Nucl.Phys. **B546** (1999) 647-668.

- [31] E. Guitter, C. Kristjansen, and J. Nielsen, *Hamiltonian Cycles on Random Eulerian Triangulations*, Nucl.Phys. B546 (1999) 731-750.
- [32] J. Jacobsen and P. Zinn-Justin, *A Transfer Matrix approach to the Enumeration of Knots*, preprint math-ph/0102015 (2001).
- [33] N. Read and H. Saleur, *Exact spectra of conformal supersymmetric nonlinear sigma models in two dimensions*, Nucl.Phys. **B613** (2001) 409-444; and J.L. Jacobsen, N. Read and H. Saleur, *Dense loops, supersymmetry, and Goldstone phases in two dimensions*, Phys.Rev.Lett. **90** (2003) 090601.
- [34] V. Arnold, *The branched covering of $CP_2 \rightarrow S_4$, hyperbolicity and projective topology*, Siberian Math. Jour. **29** (1988) 717-726.
- [35] A. Sainte-Laguë, *Avec des nombres et des lignes (Récréations Mathématiques)*, Vuibert, Paris (1937).
- [36] J. Touchard, *Contributions à l'étude du problème des timbres poste*, Canad. J. Math. **2** (1950) 385-398; W. Lunnon, *A map-folding problem*, Math. of Computation **22** (1968) 193-199.
- [37] K.H. Ko, L. Smolinsky, *A combinatorial matrix in 3-manifold theory*, Pacific. J. Math **149** (1991) 319-336.
- [38] K. Hoffman, K. Mehlhorn, P. Rosenstiehl and R. Tarjan, *Sorting Jordan sequences in linear time using level-linked search trees*, Information and Control **68** (1986) 170-184.
- [39] R. Bacher, *Meander Algebras*, prépublication de l'Institut Fourier n° 478 (1999).
- [40] S. Lando and A. Zvonkin, *Plane and Projective Meanders*, Theor. Comp. Science **117** (1993) 227-241, and *Meanders*, Selecta Math. Sov. **11** (1992) 117-144.
- [41] P. Di Francesco, O. Golinelli and E. Guitter, *Meander, folding and arch statistics*, Mathl. Comput. Modelling **26** (1997) 97-147.
- [42] L. Chekhov and C. Kristjansen, *Hermitian Matrix Model with Plaquette Interaction*, Nucl.Phys. **B479** (1996) 683-696.
- [43] Y. Makeenko *Strings, Matrix Models, and Meanders*, Nucl.Phys.Proc.Suppl. **49** (1996) 226-237; G. Semenoff and R. Szabo *Fermionic Matrix Models* Int.J.Mod.Phys. **A12** (1997) 2135-2292.
- [44] P. Di Francesco, O. Golinelli and E. Guitter, *Meanders: a direct enumeration approach*, Nucl. Phys. **B 482** [FS] (1996) 497-535.
- [45] H. Temperley and E. Lieb, *Relations between the percolation and coloring problem and other graph-theoretical problems associated with regular planar lattices: some exact results for the percolation problem*, Proc. Roy. Soc. **A322** (1971) 251-280.
- [46] P. Martin, *Potts models and related problems in statistical mechanics*, World Scientific (1991).
- [47] P. Di Francesco, *$SU(N)$ Meander Determinants*, J. Math. Phys. **38** (1997) 5905-5943.
- [48] O. Golinelli, *A Monte-Carlo study of meanders*, Eur. Phys. J. **B14** (2000) 145-155.

- [49] J. Jacobsen and J. Kondev, *Field theory of compact polymers on the square lattice*, Nucl. Phys. **B 532** [FS], (1998) 635-688, *Transition from the compact to the dense phase of two-dimensional polymers*, J. Stat. Phys. **96**, (1999) 21-48.
- [50] I. Jensen, *A transfer matrix approach to the enumeration of plane meanders*, J. Phys. **A 33** (2000), 5953-5963.
- [51] I. Jensen and A. Guttmann, *Critical exponents of plane meanders*, J. Phys. **A33** (2000) L187-L192.
- [52] M. Kontsevich and Yu. Manin, *Gromov-Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry*, Commun.Math.Phys. **164** (1994) 525-562.
- [53] P. Di Francesco and C. Itzykson, *Quantum intersection rings*, in *The moduli space of curves*, R. Dijkgraaf, C. Faber and G. van de Geer eds., Birkhäuser (1995) 81-148.