

Le modèle des dipôles en QCD perturbative

Rapport de stage de DEA de Julien Salomez

Table des matières

Remerciements	2
Introduction	3
1 Dérivation du modèle des dipôles de la QCD	4
1.1 Fonction d'onde de l'onium	4
1.1.1 Coordonnées du cône de lumière	5
1.1.2 Fonction d'onde de l'onium à l'ordre 0	6
1.1.3 Fonction d'onde de l'onium à l'ordre 1	6
1.1.4 Fonctionnelle génératrice et fonction d'onde de l'onium à tous les ordres	11
1.2 Distribution des dipôles dans un onium	14
1.3 Formulation et solution du modèle des dipôles en transformée de Mellin	18
2 Confrontation du modèle aux paramétrisations des données	24
2.1 Existence et détermination des dimensions a- normales	25
2.2 Relations entre Mer et Glue dans le modèle des dipôles	27
2.3 Etude du noyau BFKL	27
2.3.1 Approximation BFKL à l'ordre des logarithmes de $1/x$ dominants (LO)	28
2.3.2 Schémas BFKL de correction à l'ordre des logarithmes de $1/x$ sous dominants (NLO)	28
Conclusion	33
Annexe: convergence de l'intégrale (1.91)	34
Bibliographie	36

Remerciements

Je remercie Robert Peschanski pour sa disponibilité tout au long de mon stage.

Je remercie le service, dont le directeur est Jean-Paul Blaizot, pour son accueil au SPHT.

Je remercie en particulier les secrétaires du SPHT pour leur aide dans la résolution de divers problèmes administratifs.

Enfin, je remercie tous ceux qui m'ont emmené dans leur voiture pour aller manger à la cantine.

Introduction

Dans ce rapport de stage, nous nous intéresserons au modèle des dipôles. Ce modèle permet de calculer la fonction d'onde de l'onium, une paire quark-antiquark lourde. A partir de là, on peut formuler un modèle pour les fonctions de structure du proton. Le modèle des dipôles est basé sur l'application de méthodes de QCD perturbative au calcul de corrections à la fonction d'onde décrivant les caractéristiques de l'onium relevant de la QCD non perturbative. Ces corrections sont liées à l'émission de gluons mous par les constituants de l'onium.

Après avoir développé le modèle des dipôles, nous chercherons à comparer ses prédictions pour les transformées de Mellin des distributions de partons dans le proton avec les transformées de Mellin des paramétrisations des données expérimentales relatives à ces distributions (paramétrisations GRV). L'intérêt de prendre des transformées de Mellin est que sous cette forme, les fonctions que nous aurons à étudier sont particulièrement simples.

Concernant le rapport des distributions de la mer de quarks et de la glue, les prédictions du modèle des dipôles à l'ordre des logarithmes dominants suffisent pour avoir compatibilité avec les transformées de Mellin des paramétrisations GRV.

Nous constaterons en revanche que pour obtenir un accord entre modèle des dipôles et transformée de Mellin de la paramétrisation GRV de la mer de quarks, il faut tenir compte de corrections à l'ordre des logarithmes sous-dominants au modèle des dipôles (alors que le modèle développé ci-dessous se base sur des calculs menés à l'ordre des logarithmes dominants).

Partie 1

Dérivation du modèle des dipôles de la QCD

1.1 Fonction d'onde de l'onium

Dans cette section, nous allons décrire l'état lié quark-antiquark lourds, appelé onium. Pour cela, nous allons utiliser les coordonnées du cône de lumière $(x_+, x_-, \underline{x})$, qui sont définies au paragraphe (1.1.1). La fraction d'impulsion longitudinale z du quark de l'onium est définie par $z = \frac{p_{1+}}{p_+}$, p_1 étant la quadri-impulsion du quark et p étant la quadri-impulsion de l'onium. Nous chercherons à calculer la densité de probabilité $\Phi(\underline{k}_1, z_1)$ du quark de l'onium, donnée dans la représentation d'impulsion (\underline{k}_1 est l'impulsion transverse de l'antiquark et z_1 est sa fraction d'impulsion longitudinale, la direction longitudinale étant choisie comme étant la direction de l'impulsion de l'onium).

Nous montrerons (paragraphe (1.1.4)) que dans le cadre de l'approximation où le nombre de couleurs N_C tend vers l'infini, il n'y a pas d'interférence entre les amplitudes pour les processus suivant: émission d'aucun gluon par le quark ou l'antiquark, émission d'un gluon par le quark ou l'antiquark, etc. $\Phi(\underline{k}_1, z_1)$ est donc égal à la somme sur n de la densité de probabilité $\Phi^{(n)}(\underline{k}_1, z_1)$ associée à l'émission de n gluons par le quark ou l'antiquark de l'onium.

$\Phi^{(0)}$ n'est pas fixé par le modèle: il relève de la QCD non perturbative. Pour calculer la fonction d'onde $\Psi^{(n)}$ associée à l'émission de n gluons, on utilise la théorie des perturbations. Il résulte de cette théorie que si les Ψ_α sont les fonctions propres de l'hamiltonien total et les ψ_α sont les fonctions propres de l'hamiltonien non perturbé avec les valeurs propres E_α , alors on

a l'équation de Lippman-Schwinger:

$$\Psi_\alpha = \psi_\alpha + \int \frac{(\psi_\gamma, V\Psi_\alpha)\psi_\gamma}{E_\alpha - E_\gamma \pm i\epsilon} d\gamma$$

où (ϕ, χ) désigne le produit scalaire de l'espace de Hilbert et où V est la perturbation. Le produit scalaire $(\psi_\gamma, V\psi_\alpha)$ qui intervient dans la théorie des perturbations au premier ordre et la différence d'énergie $E_\alpha - E_\gamma$ se calculent en considérant un diagramme de Feynman dans lequel l'onium transite vers l'état ψ_γ en passant par l'état intermédiaire ψ_α (paragraphe (1.1.3)). Dans ce processus, on suppose que l'on a conservation de la tri-impulsion aux vertex mais pas de l'énergie et que les particules restent sur leur couche de masse.

Les contributions dominantes correspondent à l'émission de gluons mous, c'est-à-dire dont la fraction d'impulsion longitudinale est très faible devant un.

Nous définirons une fonctionnelle génératrice à partir de laquelle on obtient par n dérivations fonctionnelles successives le carré de la fonction d'onde correspondant à l'émission de n gluons. Nous établirons une équation satisfaite par cette fonctionnelle génératrice; pour obtenir cette équation, nous devons tenir compte des corrections virtuelles. (Paragraphe (1.1.4).)

1.1.1 Coordonnées du cône de lumière

Soit

$$x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

un quadrivecteur. La direction de l'axe spatial 3 est choisi comme étant la direction de l'impulsion de l'onium. Les coordonnées du cône de lumière sont définies par

$$\begin{cases} x_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + x^3) \\ x_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - x^3) \\ \underline{x} = (x^1, x^2) \end{cases} . \quad (1.1)$$

Le produit scalaire de 2 quadrivecteurs v_1 et v_2 s'écrit

$$v_1.v_2 = v_{1+}v_{2-} + v_{1-}v_{2+} - \underline{v_1}.\underline{v_2} . \quad (1.2)$$

1.1.2 Fonction d'onde de l'onium à l'ordre 0

En représentation d'impulsion, la fonction d'onde de l'onium s'écrit $\Psi_{\alpha\beta}^{(0)}(\underline{k}_1, z_1)$, α et β étant les indices spinoriels respectifs du quark et de l'antiquark. La densité de probabilité à l'ordre 0 s'écrit donc

$$\Phi^{(0)}(\underline{k}_1, z_1) = \sum_{\alpha, \beta} |\Psi_{\alpha\beta}^{(0)}(\underline{k}_1, z_1)|^2. \quad (1.3)$$

La fonction d'onde à l'ordre 0 relève de la QCD non perturbative. La limite entre perturbatif et non perturbatif est choisie arbitrairement; cela impose de vérifier que les résultats auxquels on aboutit sont indépendants de ce choix. Cette vérification est liée à la k_T -factorisation à propos de laquelle on pourra par exemple se reporter à la référence [2].

1.1.3 Fonction d'onde de l'onium à l'ordre 1

A l'ordre un interviennent les deux diagrammes suivant:

λ est la polarisation du gluon, α et β sont les indices spinoriels respectifs du quark et de l'antiquark et a est la couleur du gluon. Dans chacun des deux diagrammes interviennent trois zones temporelles: la zone initiale, la zone intermédiaire et la zone finale. Par conservation de la quadri-impulsion entre états asymptotiques, la quadri-impulsion initiale est égale à la quadri-impulsion finale: $p = (p - k_1 - k_2) + k_2 + k_1$. Dans la procédure de quantification covariante de Feynman, on considère que la quadri-impulsion intermédiaire reste égale à p (conservation de la quadri-impulsion à tous les vertex) mais en revanche les particules intermédiaires ne sont pas sur couche de masse. Dans la procédure de quantification que nous utilisons ici, nous supposons que la tri-impulsion intermédiaire est conservée mais pas l'énergie intermédiaire: $E_{int} \neq E_{final}$. En revanche, on suppose que les particules intermédiaires restent sur couche de masse. [1]

Le dénominateur d'énergie qui apparaît dans la formule de Lippman-Schwinn-

ger s'écrit

$$E_{int} - E_{final} = p_{int}^0 - p_{final}^0 = (p_{int}^0 - p^3) - (p_{final}^0 - p^3) = \sqrt{2}(p_{int}^- - p_{final}^-). \quad (1.4)$$

Or, pour un quadrivecteur p de carré m^2 , on a

$$m^2 = p^2 = 2p^+ p^- - \underline{p}^2. \quad (1.5)$$

D'où

$$p^- = \frac{p^2 + m^2}{2p^+}. \quad (1.6)$$

Donc (pour des partons de masse nulle),

$$p_{int}^- - p_{final}^- = \frac{k_1^2}{2k_1^+} + \frac{k_1^2}{2(p - k_1)^+} - \frac{(k_1 + k_2)^2}{2(p - k_1 - k_2)^+} - \frac{k_1^2}{2k_1^+} - \frac{k_2^2}{2k_2^+}. \quad (1.7)$$

Les contributions dominantes minimisent le dénominateur d'énergie et ces contributions correspondent donc à l'émission d'un gluon mou, c'est-à-dire tel que

$$\begin{cases} \frac{z_2}{z_1} \ll 1 \\ \frac{z_2}{1-z_1} \ll 1 \end{cases}. \quad (1.8)$$

Dans ces conditions, on a

$$p_{int}^- - p_{final}^- \simeq -\frac{k_2^2}{2k_2^+}. \quad (1.9)$$

Dans la jauge du cône de lumière, on montre (voir [2]) que la polarisation du gluon est

$$\begin{cases} \epsilon^{+\lambda} = 0 \\ \epsilon^{-\lambda} = \frac{k_2 \cdot \underline{\epsilon}^\lambda}{k_2^+} \\ |\underline{\epsilon}^\lambda| \ll \epsilon^{-\lambda} \end{cases}. \quad (1.10)$$

L'hamiltonien de la théorie est relié à la matrice $S = 1 + 2i\mathcal{T}$ par la relation valable au premier ordre en la constante de couplage

$$S = T \exp \left(-i \int_{-\infty}^{+\infty} H_{int}(t) dt \right) \simeq 1 - i \int_{-\infty}^{+\infty} H_{int}(t) dt. \quad (1.11)$$

Ainsi, au premier ordre, la perturbation V qui apparaît dans l'équation de Lippman-Schwinger est proportionnelle à la matrice \mathcal{T} de transition. Le

facteur $(\Phi_\gamma, V\Phi_\alpha)$ qui apparaît dans cette équation est donc l'élément de matrice

$$\begin{aligned} & \langle quark : (p - k_1 - k_2, \delta'), gluon : (k_2, \lambda, a) | T | quark : (p - k_1, \delta) \rangle = \\ & = gT^a \frac{1}{\sqrt{2(p - k_1 - k_2)^+} \sqrt{2(p - k_1)^+}} \bar{u}^{\delta'}(p - k_1 - k_2) \gamma_\mu u^\delta(p - k_1) \epsilon^{\mu, \lambda}(k_2). \end{aligned} \quad (1.12)$$

δ' et δ représentent respectivement la polarisation du quark sortant et du quark entrant.

On a omis de noter les couleurs des quarks entrant et sortant car elles sont déterminées par la couleur du gluon sortant. Dans la notation $\epsilon^{\mu, \lambda}$, le premier indice est quadrivectoriel et le deuxième indice représente la polarisation du gluon.

Les racines carrées qui interviennent au dénominateur sont des facteurs de normalisation, g est la constante de couplage de l'interaction forte et les T^a sont les générateurs de $SU(3)$. On a

$$\gamma_\mu \epsilon^{\mu, \lambda}(k_2) \simeq \frac{k_{2, \underline{\epsilon}^\lambda}}{k_2^+} \gamma^+. \quad (1.13)$$

L'utilisation de l'identité de Gordon

$$\bar{u}^{\delta'}(p) \gamma^\mu u^\delta(q) = \frac{1}{2m} \bar{u}^{\delta'}(p) ((p + q)^\mu + i\sigma^{\mu\nu} (p - q)_\nu) u^\delta(q) \quad (1.14)$$

donne, compte tenu que le gluon émis est mou ($p - k_1 - k_2 \simeq p - k_1$),

$$\begin{aligned} \bar{u}^{\delta'}(p - k_1 - k_2) \gamma^+ u^\delta(p - k_1) &= \frac{1}{2m} 2(p - k_1)^+ \bar{u}^{\delta'}(p - k_1) u^\delta(p - k_1) = \\ &= 2(p - k_1)^+ \delta_{\delta\delta'} \end{aligned} \quad (1.15)$$

et donc

$$\begin{aligned} & \langle quark : (p - k_1 - k_2, \delta'), gluon : (k_2, \lambda, a) | T | quark : (p - k_1, \delta) \rangle = \\ & = \delta_{\delta\delta'} gT^a \frac{k_{2, \underline{\epsilon}^\lambda}}{k_2^+}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

La contribution d'ordre un à la fonction d'onde de l'onium, due au premier diagramme, s'écrit donc

$$\Psi_{\alpha\beta}^{(1)a, \lambda}(\underline{k}_1, \underline{k}_2, z_1, z_2) = gT^a \Psi_{\alpha\beta}^{(0)}(\underline{k}_1, z_1) \frac{k_{2, \underline{\epsilon}^\lambda}}{k_2^+} \left(-\frac{2k_2^+}{k_2^2} \right) =$$

$$= -2gT^a \Psi_{\alpha\beta}^{(0)}(\underline{k}_1, z_1) \frac{k_2 \cdot \underline{\epsilon}^\lambda}{k_2^2}. \quad (1.17)$$

L'indice a représente la couleur du gluon et non pas la couleur de l'onium qui est bien entendu blanche.

En tenant compte également du second diagramme, on trouve

$$\Psi_{\alpha\beta}^{(1)a,\lambda}(\underline{k}_1, \underline{k}_2, z_1, z_2) = -2gT^a (\Psi_{\alpha\beta}^{(0)}(\underline{k}_1, z_1) - \Psi_{\alpha\beta}^{(0)}(\underline{k}_1 + \underline{k}_2, z_1 + z_2)) \frac{k_2 \cdot \underline{\epsilon}^\lambda}{k_2^2}. \quad (1.18)$$

Ce qui donne comme contribution d'ordre un à la densité de probabilité

$$\Phi^{(1)}(\underline{k}_1, z_1) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4 k_2 \delta(k_2^2) \sum_{\lambda,a,\alpha,\beta} |\Psi_{\alpha\beta}^{(1)a,\lambda}(\underline{k}_1, \underline{k}_2, z_1, z_2)|^2. \quad (1.19)$$

Le facteur $\delta(k_2^2)$ est dû au fait que le gluon est sur sa couche de masse nulle. Ainsi

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)}(\underline{k}_1, z_1) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^2 \underline{k}_2 \int dk_2^+ \int dk_2^- \delta(k_2^2) \sum_{\lambda,a,\alpha,\beta} |\Psi_{\alpha\beta}^{(1)a,\lambda}(\underline{k}_1, \underline{k}_2, z_1, z_2)|^2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^2 \underline{k}_2 \int_{z_0}^{z_1} \frac{dz_2}{2z_2} \sum_{\lambda,a,\alpha,\beta} |\Psi_{\alpha\beta}^{(1)a,\lambda}(\underline{k}_1, \underline{k}_2, z_1, z_2)|^2. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Le temps de vie de l'état à un gluon est très inférieur au temps de vie de l'état intermédiaire, sans gluon. Il en résulte dans la fonction d'onde à l'ordre 1 $\Psi_{\alpha\beta}^{(1)a,\lambda}(\underline{x}_1, \underline{x}_2, z_1, z_2)$ une factorisation de la fonction d'onde à l'ordre 0.

Voyons cela plus précisément. Notons \underline{x}_0 la coordonnée transverse du quark, \underline{x}_2 celle du gluon, et \underline{x}_1 celle de l'anti-quark.

Prenons alors la transformée de Fourier de (1.18) dans l'espace des coordonnées transverses (dans la définition de la transformée de Fourier, on remplace \underline{x}_1 par $\underline{x}_1 - \underline{x}_0$ et \underline{x}_2 par $\underline{x}_2 - \underline{x}_0$, c'est-à-dire que l'on se repère par rapport à la position transverse du quark; nous ommettons de noter la dépendance en \underline{x}_0 dans les expressions suivantes):

$$\begin{aligned} &\Psi_{\alpha\beta}^{(1)a,\lambda}(\underline{x}_1, \underline{x}_2, z_1, z_2) = -2gT^a \times \\ &\times \int \frac{d^2 \underline{k}_1}{(2\pi)^2} \frac{d^2 \underline{k}_2}{(2\pi)^2} e^{ik_1 \cdot (\underline{x}_1 - \underline{x}_0) + ik_2 \cdot (\underline{x}_2 - \underline{x}_0)} (\Psi_{\alpha\beta}^{(0)}(\underline{k}_1, z_1) - \Psi_{\alpha\beta}^{(0)}(\underline{k}_1 + \underline{k}_2, z_1 + z_2)) \times \\ &\times \frac{k_2 \cdot \underline{\epsilon}^\lambda}{k_2^2} = -2gT^a \int \frac{d^2 \underline{k}_1}{(2\pi)^2} \frac{d^2 \underline{k}_2}{(2\pi)^2} (e^{ik_1 \cdot (\underline{x}_1 - \underline{x}_0) + ik_2 \cdot (\underline{x}_2 - \underline{x}_0)} \Psi_{\alpha\beta}^{(0)}(\underline{k}_1, z_1) - \end{aligned}$$

$$-e^{i\underline{k}_2 \cdot (\underline{x}_2 - \underline{x}_1) + i(\underline{k}_1 + \underline{k}_2) \cdot (\underline{x}_1 - \underline{x}_0)} \Psi_{\alpha\beta}^{(0)}(\underline{k}_1 + \underline{k}_2, z_1 + z_2) \frac{k_2 \cdot \underline{\epsilon}^\lambda}{k_2^2}. \quad (1.21)$$

Or $z_2 \ll z_1$ donc on peut remplacer $z_1 + z_2$ par z_1 dans le second terme de l'intégrande. Pour calculer le second terme, on fait le changement de variable

$$\begin{cases} \underline{k}'_1 = \underline{k}_1 + \underline{k}_2 \\ \underline{k}'_2 = \underline{k}_2 \end{cases}. \quad (1.22)$$

Le jacobien de cette transformation vaut 1 et on trouve donc à partir de (1.21)

$$\begin{aligned} \Psi_{\alpha\beta}^{(1)a,\lambda}(\underline{x}_1, \underline{x}_2, z_1, z_2) &= -2gT^a \times \\ &\times \Psi_{\alpha\beta}^{(0)}(\underline{x}_1 - \underline{x}_0, z_1) \int \frac{d^2 \underline{k}_2}{(2\pi)^2} (e^{i\underline{k}_2 \cdot (\underline{x}_2 - \underline{x}_0)} - e^{i\underline{k}_2 \cdot (\underline{x}_2 - \underline{x}_1)}) \frac{k_2 \cdot \underline{\epsilon}^\lambda}{k_2^2}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

C'est la factorisation annoncée de la fonction d'onde à l'ordre 0. On obtient après calcul des deux intégrales qui interviennent dans (1.23):

$$\Psi_{\alpha\beta}^{(1)a,\lambda}(\underline{x}_1, \underline{x}_2, z_1, z_2) = \frac{-igT^a}{\pi} \Psi_{\alpha\beta}^{(0)}(\underline{x}_{10}, z_1) \left(\frac{\underline{x}_{20}}{\underline{x}_{20}^2} - \frac{\underline{x}_{21}}{\underline{x}_{21}^2} \right) \cdot \underline{\epsilon}^\lambda \quad (1.24)$$

où l'on a posé $\underline{x}_{ij} = \underline{x}_i - \underline{x}_j$. Les $\underline{\epsilon}^\lambda$ formant une base orthonormée, on montre facilement que

$$\sum_\lambda \left| \left(\frac{\underline{x}_{20}}{\underline{x}_{20}^2} - \frac{\underline{x}_{21}}{\underline{x}_{21}^2} \right) \cdot \underline{\epsilon}^\lambda \right|^2 = \frac{\underline{x}_{10}^2}{\underline{x}_{20}^2 \underline{x}_{21}^2}. \quad (1.25)$$

D'autre part

$$\frac{1}{N_C} \sum_a Tr(T^a T^a) = C_F. \quad (1.26)$$

On obtient finalement pour la contribution à l'ordre 1 à la densité de probabilité, moyennée sur la couleur du quark initial et sommée sur la couleur du gluon émis

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)}(\underline{x}_1, z_1) &\equiv \frac{1}{N_C} \int \frac{d^2 \underline{x}_2}{2\pi} \int_{z_0}^{z_1} \frac{dz_2}{2z_2} \sum_{\lambda, a, \alpha, \beta} |\Psi_{\alpha\beta}^{(1)a,\lambda}(\underline{x}_1, \underline{x}_2, z_1, z_2)|^2 = \\ &= \int d^2 \underline{x}_2 \int_{z_0}^{z_1} \frac{dz_2}{z_2} \frac{\alpha_s C_F}{\pi^2} \frac{\underline{x}_{10}^2}{\underline{x}_{21}^2 \underline{x}_{20}^2} \Phi^{(0)}(\underline{x}_1, z_1) \end{aligned} \quad (1.27)$$

où $\alpha_S = g^2$.

Faisons maintenant un changement de système de coordonnées: on passe des composantes de \underline{x}_2 dans une base orthonormée aux variables (x_{21}, x_{20}) , à \underline{x}_{01} fixé.

On montre que le jacobien de la transformation s'écrit

$$J(x_{21}, x_{20}) = \frac{4x_{21}x_{20}}{\sqrt{(x_{21} + x_{20})^2 - x_{10}^2} \sqrt{x_{10}^2 - (x_{21} - x_{20})^2}}. \quad (1.28)$$

1.1.4 Fonctionnelle génératrice et fonction d'onde de l'onium à tous les ordres

A l'ordre n , on considère l'émission de n gluons mous d'impulsions k_2, \dots, k_{n+1} . Soient z_2, \dots, z_{n+1} les fractions d'impulsion longitudinale de ces gluons. On ordonne les gluons de sorte que $z_2 \gg z_3 \gg \dots \gg z_{n+1}$. Montrons que dans la limite $N_C \rightarrow \infty$, il n'y a pas d'interférence entre l'émission de deux gluons successifs. Dans la limite $N_C \rightarrow \infty$, on peut identifier le groupe $SU(N_C)$ avec le groupe $U(N_C)$. Les gluons sont dans la représentation adjointe de $U(N_C)$ qui est le produit de la représentation fondamentale de $U(N_C)$ par sa conjuguée. Un gluon peut alors être représenté par une paire quark-antiquark.

Un vertex quark-quark-gluon est alors représenté par:

Les graphes représentant l'émission de gluons successifs sans interférence sont *planaires*. Par exemple:

Dans de tels graphes, on trouve des boucles de quarks à chacune desquelles correspond un facteur N_C dû aux N_C couleurs possibles circulant dans la boucle (par exemple on a au total un facteur N_C^2 pour le graphe précédent). Les graphes représentant des termes d'interférence entre l'émission de gluons

successifs sont *non planaires*. Par exemple:

La couleur de toutes les lignes de ce graphe est déterminée par la couleur des lignes entrantes et sortantes et on peut donc lui attribuer un facteur de couleur 1. Dans la limite $N_C \rightarrow \infty$, seuls les graphes planaires contribuent et il n'y a donc pas d'interférence entre les émissions successives de gluons. Par conséquent, dans cette approximation, le carré du module de la fonction d'onde de l'onium est égal à la somme sur n du carré du module de la fonction d'onde correspondant à l'émission de n gluons.

Si on note τ_i le temps de vie du gluon i , on a

$$\tau_{n+1} \ll \dots \ll \tau_2. \quad (1.29)$$

Cela signifie que chaque gluon est gelé pendant l'émission du gluon suivant. Mathématiquement, cela se traduit par le fait que l'émission d'un gluon par un dipôle de coordonnées transverses $\underline{x}_a, \underline{x}_b$ correspond à multiplier la densité de probabilité par

$$\frac{\alpha_S C_F}{\pi^2} \frac{x_{ab}^2}{x_{ac}^2 x_{bc}^2} \frac{dz}{z} J(x_{cb}, x_{ca}) dx_{ca} dx_{cb}.$$

On définit une fonctionnelle génératrice $\Phi(\underline{x}_0, \underline{x}_1, z_1, u(\underline{x}, z))$ par

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n!} \frac{\delta}{\delta u(\underline{x}_2, z_2)} \dots \frac{\delta}{\delta u(\underline{x}_{n+1}, z_{n+1})} \Phi(\underline{x}_0, \underline{x}_1, z_1, u(\underline{x}, z))|_{u=0} = \\ & = \Phi^{(n)}(\underline{x}_0, \underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_{n+1}, z_1, z_2, \dots, z_{n+1}), \end{aligned} \quad (1.30)$$

$\Phi^{(n)}$ étant le carré du module de la fonction d'onde de l'onium accompagné de n gluons de coordonnées transverses $\underline{x}_2, \dots, \underline{x}_{n+1}$ et de fractions d'impulsion longitudinale z_2, \dots, z_{n+1} . La factorisation de la fonction d'onde à l'ordre 0 permet d'écrire

$$\Phi(\underline{x}_0, \underline{x}_1, z_1, u) = \Phi^{(0)}(\underline{x}_{10}, z_1) Z(\underline{x}_1, \underline{x}_0, z_1, u). \quad (1.31)$$

La condition de normalisation

$$\int d^2 \underline{x}_1 \int_0^1 dz_1 \Phi(\underline{x}_0, \underline{x}_1, z_1, u)|_{u=1} = 1 \quad (1.32)$$

est satisfaite si l'on choisit Z tel que:

$$Z(\underline{x}_1, \underline{x}_0, z_1, u)|_{u=1} = 1. \quad (1.33)$$

Pour que la condition de normalisation soit satisfaite, nous devons tenir compte des corrections virtuelles et régulariser les divergences ultraviolettes.

On définit pour cela une région $R(x_{20}, x_{21})$ telle que $\begin{cases} x_{20} \geq \rho \\ x_{21} \geq \rho \end{cases}$ où ρ est un paramètre de coupure qui disparaîtra dans le calcul des observables.

On admet que l'équation fonctionnelle pour Z s'écrit:

$$\begin{aligned} Z(\underline{x}_1, \underline{x}_0, z_1, u) &= a\left(\frac{x_{10}}{\rho}, \frac{z_1}{z_0}\right) + \\ &+ \frac{\alpha_S C_F}{\pi^2} x_{01}^2 \int_{R(x_{20}, x_{21})} \frac{d^2 \underline{x}_2}{x_{20}^2 x_{21}^2} \int_{z_0}^{z_1} \frac{dz_2}{z_2} u(\underline{x}_2, z_2) \times \\ &\times a\left(\frac{x_{10}}{\rho}, \frac{z_2}{z_0}\right) a\left(\frac{x_{10}}{\rho}, \frac{z_1}{z_0}\right) Z(\underline{x}_2, \underline{x}_1, z_2, u) Z(\underline{x}_2, \underline{x}_0, z_2, u) \end{aligned} \quad (1.34)$$

où le facteur $a\left(\frac{x_{10}}{\rho}, \frac{z_1}{z_0}\right)$ est la correction virtuelle dans l'approximation des logarithmes dominants. On a introduit une dépendance de Z vis-à-vis d'une variable z_0 mais on peut montrer que Z ne dépend de z_1 et z_0 que par l'intermédiaire du rapport $\frac{z_1}{z_0}$; on peut donc faire l'abus de notation qui consiste à se limiter à noter l'argument z_1 de Z , z_0 étant supposé fixé.

Il résulte de la condition de normalisation que

$$1 = a\left(\frac{x_{10}}{\rho}, \frac{z_1}{z_0}\right) + \frac{\alpha_S C_F}{\pi^2} x_{01}^2 \int_{R(x_{20}, x_{21})} \frac{d^2 \underline{x}_2}{x_{20}^2 x_{21}^2} \int_{z_0}^{z_1} \frac{dz_2}{z_2} a\left(\frac{x_{10}}{\rho}, \frac{z_2}{z_0}\right) a\left(\frac{x_{10}}{\rho}, \frac{z_1}{z_0}\right). \quad (1.35)$$

Posons

$$\mathcal{I} = \frac{\alpha_S C_F}{\pi^2} \int_{R(x_{20}, x_{21})} \frac{x_{01}^2 d^2 \underline{x}_2}{x_{20}^2 x_{21}^2}. \quad (1.36)$$

Dans (1.35), les valeurs de z_2 qui contribuent le plus à l'intégrale sont telles que $z_0 \leq z_2 \ll z_1$ et on peut donc poser dans (1.35)

$$a\left(\frac{x_{10}}{\rho}, \frac{z_2}{z_0}\right) \simeq a\left(\frac{x_{10}}{\rho}, 1\right) \equiv \mathcal{N}. \quad (1.37)$$

On obtient ainsi l'équation

$$1 = a\left(\frac{x_{10}}{\rho}, \frac{z_1}{z_0}\right) + \mathcal{I} \mathcal{N} \int_{z_0}^{z_1} \frac{dz_2}{z_2} a\left(\frac{x_{10}}{\rho}, \frac{z_1}{z_2}\right). \quad (1.38)$$

La résolution de cette équation mène à :

$$a\left(\frac{x_{10}}{\rho}, \frac{z_1}{z_0}\right) = e^{-\mathcal{I} \ln\left(\frac{z_1}{z_0}\right)}. \quad (1.39)$$

Le calcul de l'intégrale \mathcal{I} donne

$$\mathcal{I} = \frac{4\alpha_S C_F}{\pi} \ln\left(\frac{x_{01}}{\rho}\right) \quad (1.40)$$

donc

$$a\left(\frac{x_{10}}{\rho}, \frac{z_1}{z_0}\right) = e^{-\frac{4\alpha_S C_F}{\pi} \ln\left(\frac{x_{01}}{\rho}\right) \ln\left(\frac{z_1}{z_0}\right)}. \quad (1.41)$$

L'équation satisfaite par Z revêt ainsi la forme

$$\begin{aligned} Z(\underline{x}_1, \underline{x}_0, z_1, u) &= e^{-\frac{4\alpha_S C_F}{\pi} \ln\left(\frac{x_{01}}{\rho}\right) \ln\left(\frac{z_1}{z_0}\right)} + \\ &+ \frac{\alpha_S C_F}{\pi^2} x_{01}^2 \int_{z_0}^{z_1} \frac{dz_2}{z_2} \int_{R(x_{20}, x_{21})} \frac{d^2 x_2}{x_{20}^2 x_{21}^2} u(\underline{x}_2, z_2) \times \\ &\times Z(\underline{x}_2, \underline{x}_1, z_2, u) Z(\underline{x}_2, \underline{x}_0, z_2, u) e^{-\frac{4\alpha_S C_F}{\pi} \ln\left(\frac{x_{01}}{\rho}\right) \ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

1.2 Distribution des dipôles dans un onium

Dans cette section, nous étudierons la projection de l'état de l'onium sur la base des dipôles, c'est-à-dire des paires $q\bar{q}$. Nous nous intéresserons ainsi à la multiplicité $n(\underline{x}_{01}, \underline{x}, Y)$ des dipôles de taille transverse \underline{x} dans un dipôle de taille transverse \underline{x}_{10} avec $Y = \ln\left(\frac{z_1}{z}\right)$ où z_1 est la fraction d'impulsion longitudinale de l'antiquark de l'onium et z celle du gluon le plus mou.

La multiplicité n sera obtenue par dérivation fonctionnelle à partir d'une fonctionnelle génératrice. En partant de l'équation pour Z que nous avons établie au chapitre précédent, nous déduirons alors une équation intégrale pour n .

Cette équation sera résolue en prenant la transformée de Mellin de n par rapport à la variable Y puis par rapport à la variable $\ln\left(\frac{x_{01}}{x}\right)$: nous obtiendrons après ces deux transformations une équation algébrique pour notre inconnue, que nous résoudrons aisément. En prenant les transformées de Mellin inverses, nous calculerons alors n en fonction d'une intégrale sur la droite $x = \frac{1}{2}$ du plan complexe. Cette intégrale sera approximée par la méthode du col, ce qui nous permettra d'arriver à une expression analytique

pour n .

Soit $n(\underline{x}_{01}, \underline{x}, Y)$ la multiplicité des dipôles de taille transverse \underline{x} dans un dipôle de taille transverse \underline{x}_{01} , où $Y = \ln(\frac{z_1}{z})$, $z = \frac{k^+}{p^+}$ étant la fraction d'impulsion longitudinale du gluon le plus mou du dipôle considéré. La multiplicité des dipôles de taille transverse \underline{x} avec le gluon le plus mou du dipôle tel que $\frac{k^+}{p^+} \geq e^{-Y} z_1$ est alors donnée par

$$N(\underline{x}, Y) = \int d^2 \underline{x}_{10} \int_0^1 dz_1 \Phi^{(0)}(\underline{x}_{01}, z_1) n(\underline{x}_{01}, \underline{x}, Y). \quad (1.43)$$

On montre alors que:

$$n(\underline{x}_{01}, \underline{x}, z_1, z) = \left. \frac{\delta Z(\underline{x}_1, \underline{x}_0, z_1, u)}{\delta u(\underline{x}, z)} \right|_{u=1}. \quad (1.44)$$

Pour trouver une équation vérifiée par n , on va dériver par rapport à u l'équation fonctionnelle satisfaite par Z :

$$\begin{aligned} n(\underline{x}_{01}, \underline{x}, z_1, z_0) &= A + \frac{\alpha_S C_F}{\pi^2} \int_{z_0}^{z_1} \frac{dz_2}{z_2} \int_{R(x_{20}, x_{21})} e^{-\frac{4\alpha_S C_F}{\pi} \ln(\frac{x_{01}}{\rho})(Y-y)} \times \\ &\times \frac{x_{01}^2}{x_{20}^2 x_{21}^2} d^2 \underline{x}_2 \left(\left. \frac{\delta Z(\underline{x}_2, \underline{x}_1, z_2, u)}{\delta u(\underline{x}, z_0)} \right|_{u=1} + \left. \frac{\delta Z(\underline{x}_2, \underline{x}_0, z_2, u)}{\delta u(\underline{x}, z_0)} \right|_{u=1} \right) \end{aligned} \quad (1.45)$$

où A est un terme indépendant de n et où l'on a posé

$$\begin{cases} Y = \ln\left(\frac{z_1}{z_0}\right) \\ y = \ln\left(\frac{z_2}{z_0}\right) \end{cases}. \quad (1.46)$$

Si l'on suppose qu'à $Y = 0$, on a seulement le dipôle initial \underline{x}_{01} , on montre que le terme indépendant de n vaut:

$$A = e^{-\frac{4\alpha_S C_F}{\pi} \ln(\frac{x_{01}}{\rho})Y} x \delta(x - x_{01}). \quad (1.47)$$

On obtient ainsi l'équation suivante pour n :

$$n(\underline{x}_{01}, \underline{x}, Y) = e^{-\frac{4\alpha_S C_F}{\pi} \ln(\frac{x_{01}}{\rho})Y} x \delta(x - x_{01}) +$$

$$+ \frac{4\alpha_S C_F}{\pi} \int_0^Y dy e^{-\frac{4\alpha_S C_F}{\pi} \ln\left(\frac{x_{01}}{\rho}\right)(Y-y)} \int_{R(x_{20}, x_{21})} dx_{12} \tilde{K}(x_{10}, x_{12}) n(\underline{x}_{12}, \underline{x}, y) \quad (1.48)$$

où l'on a posé:

$$\tilde{K}(x_{10}, x_{12}) = \frac{1}{2\pi} \int_R \frac{x_{01}^2}{x_{20}^2 x_{21}^2} J(x_{21}, x_{20}) dx_{20}. \quad (1.49)$$

On définit la transformée de Mellin de n par la relation

$$n_\omega(x_{01}, x) = \int_0^{+\infty} dY e^{-\omega Y} n(x_{01}, x, Y). \quad (1.50)$$

La transformée de Mellin inverse s'écrit

$$n(x_{01}, x, Y) = \int_{j_0 - i\infty}^{j_0 + i\infty} \frac{d\omega}{2i\pi} e^{\omega Y} n_\omega(x_{01}, x) \quad (1.51)$$

où j_0 est un réel à droite de toutes les singularités de n_ω .

Nous allons chercher l'équation satisfaite par la transformée de Mellin $n_\omega(x_{01}, x)$. Posons

$$\lambda = \frac{4\alpha_S C_F}{\pi} \ln\left(\frac{x_{01}}{\rho}\right). \quad (1.52)$$

On a alors

$$n(x_{01}, x, Y) e^{\lambda Y} = x \delta(x - x_{10}) + \frac{4\alpha_S C_F}{\pi} \int_0^Y dy e^{\lambda y} \int_{R(x_{20}, x_{21})} \tilde{K}(x_{10}, x_{12}) dx_{12} n(x_{12}, x, y) \quad (1.53)$$

où il a été fait l'hypothèse que n ne dépend que de la norme de ses arguments. Après dérivation par rapport à Y de (1.53), on trouve

$$\frac{\partial n}{\partial Y}(x_{10}, x, Y) = \frac{4\alpha_S C_F}{\pi} \int_{R(x_{10}, x_{12})} K(x_{10}, x_{12}) dx_{12} n(x_{12}, x, Y) \quad (1.54)$$

où

$$K(x_{10}, x_{12}) = \tilde{K}(x_{10}, x_{12}) - \delta(x_{10} - x_{12}) \ln\left(\frac{x_{10}}{\rho}\right). \quad (1.55)$$

Dans l'équation (1.54), il y a une dépendance implicite de n dans la variable ρ . Pour obtenir la fonction n dont on a donné le sens physique plus haut, il convient de prendre la limite de cette equation lorsque ρ tend vers 0. En multipliant (1.54) par $\int_0^{+\infty} dY e^{-\omega Y}$ et en intégrant par parties, on trouve:

$$-n(x_{10}, x, 0) + \omega n_\omega(x_{10}, x) = \frac{4\alpha_S C_F}{\pi} \int_{R(x_{20}, x_{12})} K(x_{10}, x_{12}) n_\omega(x_{12}, x) dx_{12}. \quad (1.56)$$

On prend la condition initiale suivante: à $Y = 0$, il n'y a que le dipôle de taille x_{10} . Donc, $n(x_{10}, x, 0) = x\delta(x - x_{10})$. Il vient par conséquent

$$n_\omega(x_{10}, x) = \frac{x\delta(x - x_{10})}{\omega} + \frac{4\alpha_S C_F}{\pi\omega} \int_{R(x_{20}, x_{12})} dx_{12} K(x_{10}, x_{12}) n_\omega(x_{12}, x). \quad (1.57)$$

On peut vérifier la convergence de cette expression lorsque ρ tend vers zero mais nous ne le ferons pas.

Introduisons la transformée de Mellin par rapport aux coordonnées trans-verses:

$$n_{\gamma\omega} = \int_0^{+\infty} n_\omega(x_{01}, x) \left(\frac{x_{01}}{x}\right)^{-2\gamma-1} d\left(\frac{x_{01}}{x}\right). \quad (1.58)$$

La transformée inverse s'écrit

$$n_\omega(x_{01}, x) = 2 \int \frac{d\gamma}{2i\pi} n_{\gamma\omega} \left(\frac{x_{01}}{x}\right)^{2\gamma}. \quad (1.59)$$

On montre que lorsque ρ tend vers zero

$$\int dx_{12} K(x_{10}, x_{12}) x_{12}^{2\gamma} = \frac{1}{2} \chi(\gamma) x_{10}^{2\gamma} \quad (1.60)$$

où:

$$\chi(\gamma) = 2\psi(1) - \psi(1 - \gamma) - \psi(\gamma). \quad (1.61)$$

En prenant la transformée de Mellin de (1.57) par rapport à la variable $\frac{x_{10}}{x}$, on obtient

$$n_{\gamma\omega} = \frac{1}{\omega} + \frac{4\alpha_S C_F}{\pi\omega} \int \frac{2d\gamma'}{2i\pi} n_{\gamma'\omega} \frac{1}{2} \chi(\gamma') \frac{1}{2(\gamma' - \gamma)} \quad (1.62)$$

(on prend $Re(\gamma') > Re(\gamma)$).

Par le théorème des résidus

$$\int \frac{2d\gamma'}{2i\pi} n_{\gamma'\omega} \frac{1}{2} \chi(\gamma') \frac{1}{2(\gamma' - \gamma)} = n_{\gamma\omega} \frac{1}{2} \chi(\gamma). \quad (1.63)$$

Donc:

$$n_{\gamma\omega} = \frac{1}{\omega} + \frac{4\alpha_S C_F}{\pi\omega} \frac{1}{2} \chi(\gamma) n_{\gamma\omega}. \quad (1.64)$$

D'où:

$$n_{\gamma\omega} = \frac{1}{\omega - \frac{2\alpha_S C_F \chi(\gamma)}{\pi}}. \quad (1.65)$$

En prenant les transformées de Mellin inverses par rapport aux variables Y et $\frac{x_{10}}{x}$, on trouve

$$n(x_{01}, x, Y) = \int \frac{2d\gamma}{2i\pi} e^{\frac{2\alpha_S C_F}{\pi} \chi(\gamma) Y} e^{2\gamma \ln(\frac{x_{10}}{x})}. \quad (1.66)$$

Pour Y grand, on calcule cette intégrale par la méthode du col: si $\ln(\frac{x_{10}}{x}) \ll \alpha_S C_F Y$, le point selle est celui de $\chi(\gamma)$. Après calcul de l'intégrale gaussienne, on trouve

$$n(x_{01}, x, Y) = \frac{1}{2} \frac{x_{10}}{x} \frac{e^{(\alpha_P - 1)Y}}{\sqrt{7\alpha_S C_F \zeta(3)Y}} e^{-\frac{(\ln(\frac{x_{10}}{x}))^2 \pi}{28\alpha_S C_F \zeta(3)Y}} \quad (1.67)$$

où l'on a posé

$$\alpha_P - 1 = \frac{8\alpha_S C_F}{\pi} \ln 2. \quad (1.68)$$

1.3 Formulation et solution du modèle des dipôles en transformée de Mellin

Dans cette section, nous partirons d'une prédiction des fonctions de structure du proton obtenue à partir du modèle des dipôles.

Pour faciliter la confrontation avec les paramétrisations des données que nous introduirons au prochain chapitre, nous calculerons la transformée de Mellin de ces fonctions de structure. Nous arriverons pour ces transformées de Mellin à des intégrales sur la droite $x = \frac{1}{2}$ du plan complexe. Pour calculer ces intégrales, nous refermerons la droite $x = \frac{1}{2}$ par un contour demi-circulaire centré en $z = \frac{1}{2}$, avec des angles compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$, et de rayon tendant vers l'infini. Nous verrons que la convergence de ces intégrales impose une contrainte sur une fonction inconnue ω intervenant dans l'expression des fonctions de structure pour décrire l'aspect non perturbatif du problème.

Le calcul des transformées de Mellin des fonctions de structure se fera par le théorème des résidus. Ces transformées de Mellin font intervenir les résidus de l'intégrande en les $\gamma_i(j)$, qui sont les racines de l'équation

$j - 1 = \frac{\alpha_S N_C}{\pi} \chi(\gamma_i(j))$. Ces résidus se comportent en fonction de l'échelle d'énergie Q comme $\left(\frac{Q^2}{Q_0^2}\right)^{\gamma_i(j)}$. Pour des Q suffisamment grands, on peut donc ne retenir que le résidu pour le plus grand des $\gamma_i(j)$. Le calcul des fonctions de structure fait intervenir également les résidus de l'intégrande en d'autres valeurs que les $\gamma_i(j)$ mais ces autres résidus pourront être négligés par la suite.

Nous obtiendrons également une expression analytique simple des fonctions de structure et de leur transformées de Mellin en approximant l'intégrale intervenant dans l'expression des fonctions de structure par la méthode du col.

Considérons la diffusion d'un électron par un proton. Supposons que la valeur absolue du carré de la quadri-impulsion échangée, que l'on appelle virtualité, soit très grande. Alors un photon émis par l'électron va se décomposer entre autre en paires quark-antiquark lourds, c'est-à-dire en oniums. Par ailleurs, le photon échangé ayant une virtualité très grande, il va sonder le proton à des échelles très petites et sera donc sensible selon la relation d'incertitude d'Heisenberg, aux dipôles contenus dans le proton dont la masse est grande, c'est-à-dire aux oniums. Connaissant la distribution des oniums émis par le photon échangé, connaissant le contenu en oniums du proton, et connaissant enfin l'amplitude de diffusion onium-onium qui se calcule à partir du modèle des dipôles, on arrive à avoir des informations sur la diffusion de l'électron par le proton à très grande virtualité. Le modèle des dipôles permet ainsi d'avoir des informations sur les fonctions de structure du proton.

On admet que les fonctions de structure du proton sont données par la formule (voir [8])

$$\begin{pmatrix} F_T \\ F_L \\ F_G \end{pmatrix} = \int \frac{d\gamma}{2i\pi} \left(\frac{Q^2}{Q_0^2}\right)^\gamma e^{\frac{\alpha_S N_C}{\pi} \chi(\gamma) \ln\left(\frac{1}{x}\right)} \begin{pmatrix} h_T \\ h_L \\ 1 \end{pmatrix} \omega(\gamma) \quad (1.69)$$

où l'on a posé:

$$\chi(\gamma) = 2\psi(1) - \psi(\gamma) - \psi(1 - \gamma). \quad (1.70)$$

$\omega(\gamma)$ est une fonction caractéristique du proton correspondant au régime non perturbatif de la QCD. Les fonctions h_T et h_L sont données par:

$$\begin{pmatrix} h_T \\ h_L \end{pmatrix} = \frac{\alpha_S}{3\pi\gamma} \frac{(\Gamma(1-\gamma)\Gamma(1+\gamma))^3}{\Gamma(2-2\gamma)\Gamma(2+2\gamma)} \frac{1}{1-\frac{2}{3}\gamma} \begin{pmatrix} (1+\gamma)(1-\frac{2}{2}) \\ \gamma(1-\gamma) \end{pmatrix}. \quad (1.71)$$

Calculons F_T dans le cadre de l'approximation du col qui consiste à développer $\chi(\gamma)$ à l'ordre 2 autour de son maximum $\gamma = \frac{1}{2}$. Les fonctions h_T et ω sont approximées par leur valeur en $\gamma_c = \frac{1}{2}(1 - (\frac{\alpha_S N_C}{\pi} 7\zeta(3) \ln(\frac{1}{x}))^{-1} \ln(\frac{Q}{Q_0}))$, i.e. au maximum de l'exponentielle en γ de l'intégrande. On a

$$\chi(\gamma) = 4 \ln 2 + 14\zeta(3) \left(\gamma - \frac{1}{2}\right)^2 + O\left(\left(\gamma - \frac{1}{2}\right)^3\right). \quad (1.72)$$

Donc

$$\begin{aligned} F_T &\simeq \int \frac{d\gamma}{2i\pi} e^{\gamma \ln(\frac{Q^2}{Q_0^2})} e^{\frac{N_C}{\pi} (4 \ln 2 + 14\zeta(3)(\gamma - \frac{1}{2})^2) \ln(\frac{1}{x})} h_T(\gamma) \omega(\gamma) \simeq \\ &\simeq h_T(\gamma_c) \omega(\gamma_c) \int \frac{dt}{2\pi} \exp\left(\left(\frac{1}{2} + it\right) \ln\left(\frac{Q^2}{Q_0^2}\right)\right) e^{\frac{\alpha_S N_C}{\pi} (4 \ln 2 - 14\zeta(3)t^2) \ln(\frac{1}{x})}. \end{aligned} \quad (1.73)$$

Le calcul de l'intégrale gaussienne donne

$$F_T = C_T a^{1/2} e^{(\alpha_P - 1) \ln(\frac{1}{x})} \frac{Q}{Q_0} e^{-\frac{a}{2} \ln^2(\frac{Q}{Q_0})} \quad (1.74)$$

où l'on a posé

$$\begin{cases} a = (\frac{\alpha_S N_C}{\pi} 7\zeta(3) \ln(\frac{1}{x}))^{-1} \\ \alpha_P - 1 = \frac{4\alpha_S N_C \ln^2}{\pi} \end{cases} \quad (1.75)$$

et où C_T est une constante.

On obtient

$$\begin{cases} F_L = R C_T a^{1/2} e^{(\alpha_P - 1) \ln(\frac{1}{x})} \frac{Q}{Q_0} e^{-\frac{a}{2} \ln^2(\frac{Q}{Q_0})} \\ F_G = L(1 + R) C_T a^{1/2} e^{(\alpha_P - 1) \ln(\frac{1}{x})} \frac{Q}{Q_0} e^{-\frac{a}{2} \ln^2(\frac{Q}{Q_0})} \end{cases} \quad (1.76)$$

où:

$$\begin{aligned} R &= \frac{h_L}{h_T}(\gamma_c) = \frac{\gamma_c(1 - \gamma_c)}{(1 + \gamma_c)(1 - \frac{\gamma_c}{2})} \\ L &= \frac{1}{h_T + h_L} \Big|_{\gamma=\gamma_c} = \frac{3\pi\gamma_c}{\alpha_S} \frac{1 - \frac{2}{3}\gamma_c}{1 + \frac{3}{2}\gamma_c - \frac{3}{2}\gamma_c^2} \frac{\Gamma(2 - 2\gamma_c)\Gamma(2 + 2\gamma_c)}{(\Gamma(1 - \gamma_c)\Gamma(1 + \gamma_c))^3}. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Prenons à présent la transformée de Mellin de l'approximation de F_T par la méthode du col:

$$\tilde{F}_T(j) = \int_0^1 dx x^{j-2} F_T(x)$$

$$= C_T \int_0^1 dx x^{j-2} a^{1/2} e^{(\alpha_P-1) \ln(\frac{1}{x})} \frac{Q}{Q_0} e^{-\frac{a}{2} \ln^2(\frac{Q}{Q_0})}. \quad (1.78)$$

On pose

$$\begin{cases} A = \frac{C_T}{\sqrt{\frac{\alpha_S N_C}{\pi} 7\zeta(3)}} \frac{Q}{Q_0} \\ B = \frac{\ln^2(\frac{Q}{Q_0})}{\frac{\alpha_S N_C}{\pi} 14\zeta(3)} \end{cases}. \quad (1.79)$$

On a alors

$$\tilde{F}_T(j) = A \int_0^1 dx \frac{x^{j-2}}{\sqrt{\ln(\frac{1}{x})}} e^{(\alpha_P-1) \ln(\frac{1}{x})} e^{-\frac{B}{\ln(\frac{1}{x})}}. \quad (1.80)$$

Faisons le changement de variable $t = \sqrt{\ln(\frac{1}{x})}$. On a

$$dt = -\frac{dx}{2x\sqrt{\ln(\frac{1}{x})}}.$$

Par conséquent

$$\tilde{F}_T(j) = 2A \int_0^{+\infty} dt e^{-(j-\alpha_P)t^2 - \frac{B}{t^2}}. \quad (1.81)$$

La valeur de cette intégrale se trouve dans les tables:

$$\tilde{F}_T(j) = A \sqrt{\frac{\pi}{j - \alpha_P}} \exp\left(-2\sqrt{B(j - \alpha_P)}\right). \quad (1.82)$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \tilde{F}_T(j) &= \frac{C_T}{\sqrt{\frac{\alpha_S N_C}{\pi} 7\zeta(3)}} \frac{Q}{Q_0} \sqrt{\frac{\pi}{j - \alpha_P}} \times \\ &\times \exp\left(-2 \ln\left(\frac{Q}{Q_0}\right) \sqrt{\frac{\pi(j - \alpha_P)}{\alpha_S N_C 14\zeta(3)}}\right). \end{aligned} \quad (1.83)$$

Nous allons maintenant calculer la transformée de Mellin de l'expression (1.69) sans utiliser l'approximation du col. On a

$$\tilde{F}_T(j) = \int_0^1 dx x^{j-2} F_T(x) =$$

$$= \int \frac{d\gamma}{2i\pi} \left(\frac{Q^2}{Q_0^2} \right)^\gamma \int_0^1 dx x^{j-2} e^{\frac{\alpha_S N_C}{\pi} \chi(\gamma) \ln(\frac{1}{x})} h_T(\gamma) \omega(\gamma). \quad (1.84)$$

Calculons l'intégrale sur x :

$$\begin{aligned} I' &= \int_0^1 dx x^{j-2} e^{\frac{\alpha_S N_C}{\pi} \chi(\gamma) \ln(\frac{1}{x})} = \\ &= \int_0^\infty e^{-(j-1)y} e^{\frac{\alpha_S N_C}{\pi} \chi(\gamma) y} \end{aligned} \quad (1.85)$$

(on a fait le changement de variable $y = \ln(\frac{1}{x})$).

Il vient donc

$$\begin{aligned} I' &= \int_0^\infty dy e^{(\frac{\alpha_S N_C}{\pi} \chi(\gamma) - (j-1))y} = \\ &= \left[\frac{e^{(\frac{\alpha_S N_C}{\pi} \chi(\gamma) - (j-1))y}}{\frac{\alpha_S N_C}{\pi} \chi(\gamma) - (j-1)} \right]_0^\infty = \frac{1}{j-1 - \frac{\alpha_S N_C}{\pi} \chi(\gamma)}, \end{aligned} \quad (1.86)$$

d'où

$$\tilde{F}_T(j) = \int \frac{d\gamma}{2i\pi} \left(\frac{Q^2}{Q_0^2} \right)^\gamma \frac{1}{j-1 - \frac{\alpha_S N_C}{\pi} \chi(\gamma)} h_T(\gamma) \omega(\gamma). \quad (1.87)$$

On a des égalités identiques pour $\tilde{F}_L(J)$ et $\tilde{F}_G(J)$.

Etudions les propriétés de convergence de l'intégrale (1.87): on montre en annexe que l'intégrande de (1.87) est à un facteur constant près équivalente pour $\gamma \rightarrow \infty$ à

$$\omega(\gamma) \frac{e^{\gamma \ln\left(\frac{Q^2}{Q_0^2}\right)}}{\ln(\gamma)} e^{i\pi \gamma \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(\gamma))} \quad (1.88)$$

Supposons que $\omega(\gamma)$ soit une constante. Soit alors $\mathcal{C} = \{\frac{1}{2} + Re^{i\theta}, \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}\}$. L'intégrale sur \mathcal{C} de (1.88) tend vers 0 lorsque R tend vers l'infini. Donc, (1.87) est convergente et se calcule à l'aide du théorème des résidus. Nous allons maintenant calculer l'intégrale (1.87) à l'aide du théorème des résidus.

Notons $\gamma_i(j)$ les racines de l'équation $j-1 = \frac{\alpha_S N_C}{\pi} \chi(\gamma_i(j))$. On a

$$j-1 - \frac{\alpha_S N_C}{\pi} \chi(\gamma) \sim_{\gamma_i(j)} j-1 - \frac{\alpha_S N_C}{\pi} \left(\frac{\pi(j-1)}{\alpha_S N_C} + \chi'(\gamma_i(j)) (\gamma - \gamma_i(j)) \right)$$

$$= -\chi'(\gamma_i(j)) \frac{\alpha_S N_C}{\pi} (\gamma - \gamma_i(j)). \quad (1.89)$$

Selon le théorème des résidus, on a donc

$$\tilde{F}_{T,L,G} = \sum_i \frac{-1}{\chi'(\gamma_i(j)) \frac{\alpha_S N_C}{\pi}} \left(\frac{Q^2}{Q_0^2} \right)^{\gamma_i(j)} h_{T,L,G}(\gamma_i(j)) \omega(\gamma_i(j)) + R_{T,L,G} \quad (1.90)$$

où $h_G = 1$ et $R_{T,L,G}$ comptabilise les résidus de l'intégrande de (1.87) (pour T) qui sont distincts des $\gamma_i(j)$ et qui sont dans le demi-plan $x \leq \frac{1}{2}$.

On peut montrer que les contributions à $R_{T,L,G}$ du résidu en zero et les contributions à R_T et R_G du résidu en -1 sont nulles. Quant à la contribution à R_L du résidu en -1, on peut montrer qu'elle vaut

$$-\frac{Q_0^2}{Q^2} \frac{1}{N_C} \frac{2}{15} \omega(-1). \quad (1.91)$$

Partie 2

Confrontation du modèle aux paramétrisations des données

Nous allons commencer par donner la définition des distributions de partons dans le proton et par exprimer ces distributions à partir des fonctions de structure du proton. Puis nous donnerons une paramétrisation des données expérimentales concernant les distributions de partons dans le proton (paramétrisation GRV).

On peut décomposer le contenu en quarks, antiquarks et gluons du proton en 3 parties:

- 1) la valence $q - \bar{q}$ qui représente les 3 quarks de valence du proton.
- 2) la mer $q + \bar{q}$ qui représente les paires quark-antiquark contenues dans le proton.
- 3) la glue g qui représente le contenu en gluons du proton.

Notons $(q - \bar{q})(x)$ (respectivement $(q + \bar{q})(x)$, respectivement $g(x)$) la densité de quarks de valence (respectivement de quarks de la mer, respectivement de gluons) dont la fraction d'impulsion longitudinale par rapport à l'impulsion longitudinale totale du proton est x .

On montre (voir [4]) que l'on a les relations suivantes entre fonctions de structure et distributions de partons:

$$\begin{cases} (q + \bar{q})(j) = \tilde{F}_T(j) \\ \tilde{g}(j) = \tilde{F}_G(j) \end{cases} \quad (2.1)$$

où l'on a posé:

$$\begin{cases} (q + \bar{q})(j) = \int_0^1 x^{j-1}(q + \bar{q})(x) dx \\ \tilde{g}(j) = \int_0^1 x^{j-1}g(x) dx \end{cases} . \quad (2.2)$$

Par abus de notation, on a omis de noter la dépendance en Q des fonctions de structure et des distributions de partons.

Gluck, Reya et Vogt ont proposé une paramétrisation des données expérimentales concernant les distributions de partons à $Q^2 = 0.23 GeV^2 \equiv \mu^2$. Ces paramétrisations, dites "GRV", sont données par:

$$\begin{aligned} x(q - \bar{q})(x, \mu) &= 1.377x^{0.549}(1 + 0.81\sqrt{x} - 4.36x + 19.4x^{3/2})(1 - x)^{3.027} + \\ &+ 0.328x^{0.366}(1 + 1.14\sqrt{x} + 5.71x + 16.9x^{3/2})(1 - x)^{3.774} \\ x(q + \bar{q})(x, \mu) &= x(q - \bar{q})(x, \mu) + 2 \times 1.20x^{0.29}(1 + 0.31x)(1 - x)^{7.03} \\ xg(x, \mu) &= 35.8x^{2.3}(1 - x)^{4.0} . \end{aligned} \quad (2.3)$$

On établit en chromodynamique quantique des équations, appelées "équations DGLAP", qui permettent de déterminer l'évolution des distributions de partons en fonction de Q ([5]). En utilisant les distributions de partons GRV à $Q = \mu$ et en les faisant évoluer à l'aide des équations DGLAP, on obtient à tout Q des prédictions pour les distributions de partons. Ces prédictions seront appelées "GRV" dans la suite.

2.1 Existence et détermination des dimensions anormales

Dans cette section, nous allons comparer les prédictions du modèle des dipôles pour les transformées de Mellin des distributions de partons dans le proton avec les transformées de Mellin des paramétrisations GRV de ces distributions.

On partira du modèle des dipôles dans lequel on ne gardera que le plus grand des $\gamma_i(j)$ que nous noterons $\gamma(j)$. Comme nous l'avons vu précédemment, les transformées de Mellin des distributions de partons se comportent alors en fonction de Q comme $\left(\frac{Q^2}{Q_0^2}\right)^{\gamma_i(j)}$. Le modèle des dipôles prédit donc que le logarithme des transformées de Mellin des distributions de partons est une fonction affine de $\ln(Q^2)$ avec une pente $\gamma(j)$. Puisque le modèle des dipôles est valable pour x petit et que $j - 1$ est la variable conjuguée de

$\ln(x)$ dans la transformation de Mellin, on s'attend à ce que cette prédiction soit vérifiée pour $j - 1$ proche de zero, c'est-à-dire pour j proche de 1. Pour des valeurs de j comprises entre 1.3 et 1.7, on a bien identifié ce régime linéaire dans les paramétrisations GRV et on en a mesuré la pente. On obtient ainsi des prédictions $p(j)$ pour les $\gamma(j)$.

A partir de (1.94), on obtient

$$\begin{cases} (q + \tilde{q})(j, Q) = \sum_i \frac{-1}{\chi'(\gamma_i(j))^{\frac{\alpha_S N_C}{\pi}}} \left(\frac{Q^2}{Q_0^2}\right)^{\gamma_i(j)} h_T(\gamma_i(j)) \omega(\gamma_i(j)) + R_T \\ \tilde{g}(j, Q) = \sum_i \frac{-1}{\chi'(\gamma_i(j))^{\frac{\alpha_S N_C}{\pi}}} \left(\frac{Q^2}{Q_0^2}\right)^{\gamma_i(j)} \omega(\gamma_i(j)) + R_G \end{cases} \quad (2.4)$$

où les $\gamma_i(j)$ sont les racines de l'équation

$$j - 1 = \frac{\alpha_S N_C}{\pi} \chi(\gamma_i(j)). \quad (2.5)$$

Dans (2.4), le résidu en $\gamma_i(j)$ se comporte en fonction de Q comme $\left(\frac{Q^2}{Q_0^2}\right)^{\gamma_i(j)}$. Pour Q suffisamment grand, on peut donc simplifier (2.4) en ne gardant que le $\gamma_i(j)$ le plus grand, que nous noterons $\gamma(j)$ et que nous appellerons "dimension anormale". De plus, nous négligerons R_T et R_G , ce qui est d'autant plus justifié que comme nous l'avons vu, les contributions des résidus en 0 et en -1 sont nulles. En prenant le logarithme des équations (2.4), il vient alors

$$\begin{cases} \ln((q + \tilde{q})(j, Q)) = \gamma(j) \ln\left(\frac{Q^2}{Q_0^2}\right) + \ln\left(\frac{-1}{\chi'(\gamma(j))^{\frac{\alpha_S N_C}{\pi}}} \omega(\gamma(j))\right) + \\ + \ln(h_T(\gamma(j))) \\ \ln(\tilde{g}(j, Q)) = \gamma(j) \ln\left(\frac{Q^2}{Q_0^2}\right) + \ln\left(\frac{-1}{\chi'(\gamma(j))^{\frac{\alpha_S N_C}{\pi}}} \omega(\gamma(j))\right) \end{cases} \quad (2.6)$$

Ainsi, le modèle des dipôles prédit que dans l'approximation où l'on ne garde que le plus grand des $\gamma_i(j)$ et où l'on néglige R_T et R_G , à j fixé, les logarithmes des distributions de la mer et de la glue sont des fonctions affines de $\ln(Q^2)$ avec une pente $\gamma(j)$.

Nous allons partir du logarithme des distributions GRV à j fixé et nous allons chercher un régime affine en $\ln(Q^2)$. Nous allons alors déterminer la pente $p(j)$ de ce régime affine. La comparaison de $p(j)$ avec $\gamma(j)$ permettra de comparer les distributions GRV avec les distributions déduites du modèle des dipôles: voir section 2.3.

La figure 1 représente $\ln((q + \tilde{q})(j, Q))$ en fonction de $\ln(Q^2)$ pour les valeurs

de j suivantes: 1.1, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8. Pour $j = 1.1$ et $j = 1.8$, on n'a pas de régime affine. En revanche, pour j compris entre 1.3 et 1.7, on observe un tel régime; on constate en particulier la présence d'un point d'inflexion. Sur chaque graphe où l'on a identifié un régime affine, on a tracé une interpolation affine de la courbe: on a pris la corde entre 2 et 6 car $[2, 6]$ est une bonne évaluation de l'intervalle dans lequel on a un régime affine. On note $p(j)$ la pente de cette interpolation.

2.2 Relations entre Mer et Glue dans le modèle des dipôles

Le modèle des dipôles prédit pour la différence des logarithmes des distributions de quarks de la mer et de gluons, une valeur indépendante de Q , qui ne dépend que de $\gamma(j)$ et de $\bar{\alpha}$. Pour $\bar{\alpha} \simeq \frac{1}{6}$, nous avons constaté que lorsque $j = 1.3, 1.4, 1.5, 1.6$ et pour Q suffisamment grand, cette prédiction est compatible avec les paramétrisations GRV.

Voyons cela en détail.

En soustrayant les 2 équations (2.6), on obtient

$$\ln((q + \tilde{q})(j, Q)) - \ln(\tilde{g}(j, Q)) = \ln(h_T(\gamma(j))). \quad (2.7)$$

Pour tester cette égalité, nous allons partir de la distribution GRV $\ln((q + \tilde{q})(j, Q))$, nous allons y ajouter $\ln(\frac{1}{h_T(p(j))})$, et nous allons comparer cette somme à la distribution GRV $\ln(\tilde{g}(j, Q))$. Nous ferons cette comparaison pour les valeurs de j : 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7. La valeur de $\bar{\alpha}$ est choisie de manière à avoir coïncidence des 2 courbes à $j = 1.3$ pour $\ln(Q^2)$ suffisamment grand: on trouve $\bar{\alpha} \simeq \frac{1}{6}$. Les courbes sont représentées sur la figure 2. On constate que pour $\ln(Q^2)$ suffisamment grand, on a une assez bonne coïncidence des 2 courbes, à part pour $j = 1.7$.

Donc le rapport Mer sur Glue obtenu à partir des transformées de Mellin des paramétrisations GRV est compatible avec le modèle des dipôles.

2.3 Etude du noyau BFKL

Le modèle des dipôles prédit que $\chi(p(j))$ doit être une fonction linéaire de $j - 1$. Ceci n'est pas vérifié. Donc, le modèle des dipôles standard, basé sur

des calculs à l'ordre des logarithmes de $\frac{1}{x}$ dominants, n'est pas compatible avec les transformées de Mellin des paramétrisations GRV.

Pour tenir compte de corrections à l'ordre des logarithmes sous dominants au modèle des dipôles, il faut remplacer la fonction χ par une nouvelle fonction χ' . Nous avons constaté que la courbe $\chi'(p(j), j)$ est bien linéaire en $j - 1$ pour une valeur de $\frac{\alpha_s N_C}{\pi} \equiv \bar{\alpha}$ de l'ordre de $\frac{1}{4}$, et ce, pour deux des quatre schémas définissant χ' que nous avons testés (voir [7]). Ainsi, le modèle des dipôles corrigé par des effets à l'ordre des logarithmes sous-dominants est compatible avec les transformées de Mellin des paramétrisations GRV.

2.3.1 Approximation BFKL à l'ordre des logarithmes de $1/x$ dominants (LO)

On représente sur la figure 3, $\chi(p(j))$ en fonction de $j - 1$. Selon le modèle des dipôles, c'est-à-dire si $p(j) = \gamma(j)$, cette courbe doit être une droite passant par l'origine de pente $\frac{1}{\bar{\alpha}} \equiv \frac{\pi}{\alpha_s N_C}$.

On constate qu'à l'ordre des logarithmes de $\frac{1}{x}$ dominants, le modèle des dipôles n'est pas compatible avec les transformées de Mellin des paramétrisations GRV.

2.3.2 Schémas BFKL de correction à l'ordre des logarithmes de $1/x$ sous dominants (NLO)

A présent, nous allons comparer aux transformées de Mellin des paramétrisations GRV les prédictions du modèle des dipôles où l'on remplace $\chi(\gamma)$ par une fonction $\chi^{(1)}(\gamma)$ qui tient compte de corrections à l'ordre des logarithmes $1/x$ sous dominants.

Pour construire cette fonction, on commence par se donner

$$\begin{cases} \beta_0 = \frac{11C_A}{12} - \frac{2n_f}{12} \\ K = \frac{67}{9} - \frac{\pi^2}{3} - \frac{10n_f}{9C_A} \end{cases} \quad (2.8)$$

où $C_A = 3$ et $n_f = 3$. Ensuite, on définit la fonction $\chi_1(\gamma)$ par

$$\begin{aligned} 4\chi_1(\gamma) = & - \left[\frac{2\beta_0}{C_A} \chi_0(\gamma)^2 - K\chi_0(\gamma) - 6\zeta(3) + \right. \\ & \left. + \frac{\pi^2 \cos(\pi\gamma)}{\sin^2(\pi\gamma)(1-2\gamma)} \left(3 + \left(1 + \frac{n_f}{C_A^3} \right) \frac{2 + 3\gamma(1-\gamma)}{(3-2\gamma)(1+2\gamma)} \right) \right] - \end{aligned}$$

$$\left. -\psi''(\gamma) - \psi''(1-\gamma) - \frac{\pi^3}{\sin(\pi\gamma)} + 4\phi(\gamma) \right] \quad (2.9)$$

où

$$\phi(\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{\psi(n+1+\gamma) - \psi(1)}{(n+\gamma)^2} + \frac{\psi(n+2-\gamma) - \psi(1)}{(n+1-\gamma)^2} \right] \quad (2.10)$$

et

$$\chi_0(\gamma) = 2\psi(1) - \psi(\gamma) - \psi(1-\gamma). \quad (2.11)$$

Voici le développement asymptotique de $\chi_1(\gamma)$ en 0:

$$\begin{aligned} \chi_1(\gamma) &= -\frac{1}{4} \left(\left(\frac{2\beta_0}{C_A} + 3 + \frac{2}{3} \left(1 + \frac{n_f}{C_A^3} \right) \right) \frac{1}{\gamma^2} + \frac{2}{\gamma^3} + \right. \\ &\quad \left. + \left(-K + \frac{67 + 13\frac{n_f}{C_A^3}}{9} - \pi^2 + 4\psi'(1) \right) \frac{1}{\gamma} - 6\zeta(3) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{395 + 71\frac{n_f}{C_A^3}}{27} - \frac{\pi^2}{2} - 2\psi''(1) + 2\psi'''(1) \right) + O(\gamma) = \\ &= -\frac{1}{2\gamma^3} - \left(\frac{\beta_0}{2C_A} + \frac{3}{4} + \frac{1}{6} \left(1 + \frac{n_f}{C_A^3} \right) \right) \frac{1}{\gamma^2} + \\ &\quad + \left(\frac{K}{4} - \frac{67 + 13\frac{n_f}{C_A^3}}{36} + \frac{\pi^2}{4} - \psi'(1) \right) \frac{1}{\gamma} + \\ &\quad + \frac{3}{2}\zeta(3) - \frac{395 + 71\frac{n_f}{C_A^3}}{108} + \frac{\pi^2}{8} + O(\gamma). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Si l'on note $d_{1,k}$ le coefficient de $\frac{1}{\gamma^k}$ dans le développement asymptotique de $\chi_1(\gamma)$ en 0, il vient donc

$$\begin{cases} d_{1,1} = -\frac{67}{36} - \frac{13n_f}{36C_A^3} + \frac{\pi^2}{12} + \frac{K}{4} \\ d_{1,2} = -\frac{\beta_0}{2C_A} - \frac{11}{12} - \frac{n_f}{6C_A^3} \\ d_{1,3} = -\frac{1}{2} \end{cases}. \quad (2.13)$$

On va étudier les deux derniers des quatre schémas exposés dans la référence [7] (seuls ces deux schémas sont compatibles avec les données GRV):

schéma a:

On part de la fonction

$$\begin{aligned} \chi^{(0)}(\gamma) &= \chi^{(0)}(\gamma, \omega = \bar{\alpha}\chi^{(0)}) = (1 - \bar{\alpha}A) \times \\ &\times \left(2\psi(1) - \psi\left(\gamma + \frac{1}{2}\omega + \bar{\alpha}B\right) - \psi\left(1 - \gamma + \frac{1}{2}\omega + \bar{\alpha}B\right) \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

où A et B sont deux constantes et $\omega = j - 1$. Le coefficient du terme en $\bar{\alpha}$ dans le développement de $\chi^{(0)}$ en série de puissances de $\bar{\alpha}$ est donné par

$$\chi_1^{(0)}(\gamma) = - \left(B + \frac{1}{2}\chi_0(\gamma) \right) (\psi'(\gamma) + \psi'(1 - \gamma)) - A\chi_0(\gamma). \quad (2.15)$$

Le développement asymptotique de cette expression en 0 est

$$\begin{aligned} \chi_1^{(0)} &= - \left(B + \frac{1}{2\gamma} + O(\gamma^2) \right) \left(\frac{1}{\gamma^2} + 2\psi'(1 - \gamma) + O(\gamma) \right) - A \left(\frac{1}{\gamma} + O(\gamma^2) \right) = \\ &= - \frac{1}{2\gamma^3} - \frac{B}{\gamma^2} - \frac{A + \frac{\pi^2}{6}}{\gamma} + O(1). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Si l'on note $d_{1,k}^{(0)}$ le coefficient de $\frac{1}{\gamma^k}$ dans le développement asymptotique de $\chi_1^{(0)}$, on trouve donc

$$\begin{cases} d_{1,1}^{(0)} = -A - \frac{\pi^2}{6} \\ d_{1,2}^{(0)} = -B \\ d_{1,3}^{(0)} = -\frac{1}{2} \end{cases}. \quad (2.17)$$

On a

$$\chi_1(\gamma) - \chi_1^{(0)}(\gamma) = (d_{1,2} - d_{1,2}^{(0)})\frac{1}{\gamma^2} + (d_{1,1} - d_{1,1}^{(0)})\frac{1}{\gamma} + O(1). \quad (2.18)$$

On choisit A et B pour que cette différence soit régulière en 0:

$$\begin{cases} A = -d_{1,1} - \frac{\pi^2}{6} \\ B = -d_{1,2} \end{cases} \quad (2.19)$$

On définit alors la fonction

$$\chi^{(1)'}(\gamma) = \chi^{(0)}(\gamma, \omega = \bar{\alpha}\chi^{(1)}) = \chi^{(0)}(\gamma, \omega) + \bar{\alpha}(\chi_1(\gamma) - \chi_1^{(0)}(\gamma)). \quad (2.20)$$

La fonction $\chi^{(1)}(\gamma)$ qui nous intéresse est donnée par

$$\chi^{(1)}(\gamma) = \chi^{(1)'}\left(\gamma - \frac{1}{2}\omega\right). \quad (2.21)$$

schéma b:

On part maintenant de

$$\begin{aligned}\chi^{(0)}(\gamma) &= \chi^{(0)}(\gamma, \omega = \bar{\alpha}\chi^{(0)}) = \chi_0(\gamma) - \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{1-\gamma} + \\ &+ (1 - \bar{\alpha}A) \left[\frac{1}{\gamma + \frac{1}{2}\omega + \bar{\alpha}B} + \frac{1}{1 - \gamma + \frac{1}{2}\omega + \bar{\alpha}B} \right].\end{aligned}\quad (2.22)$$

On a

$$\begin{aligned}\chi_1^{(0)}(\gamma) &= -A \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{1-\gamma} \right) - \left(\frac{1}{2}\chi_0(\gamma) + B \right) \left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{(1-\gamma)^2} \right) = \\ &= -A \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{1-\gamma} \right) - \left(\frac{1}{2\gamma} + B \right) \left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{(1-\gamma)^2} \right) + \mathcal{O}(1)\end{aligned}\quad (2.23)$$

au voisinage de zero. Les coefficients des divergences en 0 de cette expression sont

$$\begin{cases} d_{1,1}^{(0)} = -A - \frac{1}{2} \\ d_{1,2}^{(0)} = -B \\ d_{1,3}^{(0)} = -\frac{1}{2} \end{cases}.\quad (2.24)$$

Pour annuler les divergences de $\chi_1(\gamma) - \chi_1^{(0)}(\gamma)$, il faut donc choisir

$$\begin{cases} A = -d_{1,1} - \frac{1}{2} \\ B = -d_{1,2} \end{cases}.\quad (2.25)$$

$\chi^{(1)}(\gamma)$ se calcule alors comme dans le schéma a.

Sur la figure 4a, on voit $\chi_{sch(a)}^{(1)}(p(j), j)$ en fonction de $j - 1$ pour les 3 valeurs de $\bar{\alpha}$ suivantes: $\bar{\alpha} = \frac{1}{6}$, $\bar{\alpha} = \frac{1}{3.75}$ et $\bar{\alpha} = \frac{1}{8}$. Conformément au modèle des dipôles avec corrections NLO, ces courbes sont presque linéaires en $j - 1$. On voit en rouge sur la figure 4a l'interpolation affine de la courbe qui concide avec la courbe en $j - 1 = 0.3$ et $j - 1 = 0.7$. C'est pour $\bar{\alpha} = \frac{1}{3.75}$ que la linéarité de $\chi_{sch(a)}^{(1)}(p(j), j)$ en fonction de $j - 1$ est la mieux vérifiée puisque l'interpolation affine de la courbe passe alors par l'origine (il faut bien faire la distinction entre linéarité et affinité).

On remarque que la pente de la courbe doit donner $\frac{1}{\bar{\alpha}}$, ce qui est vérifié en première approximation.

Sur la figure 4b, on voit $\chi_{sch(b)}^{(1)}(p(j), j)$ en fonction de $j - 1$ pour les 3 valeurs de $\bar{\alpha}$ suivantes: $\bar{\alpha} = \frac{1}{6}$, $\bar{\alpha} = \frac{1}{4.27}$ et $\bar{\alpha} = \frac{1}{8}$. Là encore, les

courbes sont presque linéaires en $j - 1$. On définit l'interpolation affine de $\chi_{sch(b)}^{(1)}(p(j), j)$ de la même façon que pour le schéma a. C'est pour $\bar{\alpha} = \frac{1}{4.27}$ que la linéarité de $\chi_{sch(b)}^{(1)}(p(j), j)$ en fonction de $j - 1$ est la mieux vérifiée puisque l'interpolation affine de la courbe passe alors par l'origine. Même remarque que pour le schéma a.

Conclusion

L'étude du modèle des dipôles en QCD nous a amené a des prédictions pour les distributions de partons dans le proton.

Nous avons comparé en transformée de Mellin ces prédictions avec des paramétrisation des données expérimentales (paramétrisations GRV).

Concernant le rapport des distributions de la Mer de quarks-antiquarks et de la Glue, il y a accord entre modèle des dipôles et transformées de Mellin des paramétrisations GRV.

En revanche, pour avoir compatibilité entre la transformée de Mellin de la paramétrisation GRV de la Mer et la prédiction du modèle des dipôles pour cette distribution, on a vu qu'il est nécessaire de tenir compte de corrections à l'ordre des logarithmes de $\frac{1}{x}$ sous dominants.

Une question intéressante se pose: le bon accord entre transformées de Mellin des paramétrisations GRV et prédictions du modèle des dipôles concernant le rapport des distributions de la Mer et de la Glue à l'ordre des logarithmes dominants, est-il conservé à l'ordre des logarithmes sous dominants ?

Pour compléter la confrontation du modèle des dipôles avec l'expérience, il serait intéressant de recommencer la même étude avec une autre particule que le proton, par exemple le poméron.

Pour terminer, je dois préciser que l'étude du modèle des dipôles est la partie bibliographique de mon stage, tandis que le calcul des transformées de Mellin des fonctions de structure du proton dans le modèle des dipôles, ainsi que la comparaison de ces prédictions avec les transformées de Mellin des paramétrisations GRV, correspondent au travail personnel effectué pendant ce stage.

Annexe: convergence de l'intégrale (1.87)

Etudions la propriété de convergence de l'intégrale (1.91). Pour cela, cherchons un équivalent pour $\gamma \rightarrow \infty$ de l'intégrande.

On part de la formule

$$\Gamma(z) \sim_{z \rightarrow \infty} (2\pi)^{1/2} e^{-z} z^{z-1/2}.$$

En utilisant cette formule, il vient

$$\begin{cases} \Gamma(1-\gamma)\Gamma(1+\gamma) \sim_{\gamma \rightarrow \infty} 2\pi e^{-2+(\frac{1}{2}-\gamma)\ln(1-\gamma)+(\frac{1}{2}+\gamma)\ln(1+\gamma)} \\ \Gamma(2-2\gamma)\Gamma(2+2\gamma) \sim_{\gamma \rightarrow \infty} 2\pi e^{-4+(\frac{3}{2}-2\gamma)\ln(2-2\gamma)+(\frac{3}{2}+2\gamma)\ln(2+2\gamma)}. \end{cases}$$

Il vient donc

$$\begin{aligned} \frac{(\Gamma(1-\gamma)\Gamma(1+\gamma))^3}{\Gamma(2-2\gamma)\Gamma(2+2\gamma)} &\sim_{\gamma \rightarrow \infty} C \frac{e^{-6+(\frac{3}{2}-3\gamma)\ln(1-\gamma)+(\frac{3}{2}+3\gamma)\ln(1+\gamma)}}{e^{-4+(\frac{3}{2}-2\gamma)\ln(2-2\gamma)+(\frac{3}{2}+2\gamma)\ln(2+2\gamma)}} \propto \\ &\propto e^{-2-(\frac{3}{2}-2\gamma)\ln 2-(\frac{3}{2}+2\gamma)\ln 2} e^{-\gamma\ln(1-\gamma)+\gamma\ln(1+\gamma)} \propto \\ &\propto \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)^\gamma \end{aligned}$$

où l'on a introduit une constante C . On a

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)^\gamma &= e^{-\gamma\ln(1-\gamma)+\gamma\ln(1+\gamma)} = \\ &= e^{-\gamma\ln(1-\gamma)+\gamma\ln(\gamma(\frac{1}{\gamma}+1))} = e^{-\gamma\ln(1-\gamma)+\gamma\ln(\gamma)+\gamma\ln(\frac{1}{\gamma}+1)}. \end{aligned}$$

On a aussi

$$\ln(-x) = \ln(x) - i\pi \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(x)).$$

Donc

$$\ln(1-\gamma) = \ln(\gamma) - i\pi \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(\gamma)) + \ln\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma} \right)^\gamma = \\
& = e^{-\gamma \ln(\gamma) + \gamma i \pi \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(\gamma)) - \gamma \ln(1 - \frac{1}{\gamma}) + \gamma \ln(\gamma) + \gamma \ln(1 + \frac{1}{\gamma})} = \\
& = e^{i \pi \gamma \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(\gamma)) + \gamma \ln(1 + \frac{1}{\gamma}) - \gamma \ln(1 - \frac{1}{\gamma})} = \\
& = e^{i \pi \gamma \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(\gamma)) + \gamma (\frac{1}{\gamma} + O((\frac{1}{\gamma})^2)) - \gamma (-\frac{1}{\gamma} + O((\frac{1}{\gamma})^2))} \sim_{\gamma \rightarrow \infty} e^2 e^{i \pi \gamma \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(\gamma))} .
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\frac{(\Gamma(1-\gamma)\Gamma(1+\gamma))^3}{\Gamma(2-2\gamma)\Gamma(2+2\gamma)} \sim_{\gamma \rightarrow \infty} C' e^{i \pi \gamma \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(\gamma))}$$

où C' est une constante. On en déduit que l'intégrande de (1.91) est à un facteur constant près équivalente lorsque $\gamma \rightarrow \infty$ à

$$e^{\gamma \ln(\frac{Q^2}{Q_0^2})} \frac{1}{J - \frac{\alpha_S N_C}{\pi} \chi(\gamma)} e^{i \pi \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(\gamma)) \gamma} \omega(\gamma) .$$

Or

$$\chi(\gamma) \sim_{\gamma \rightarrow \infty} -2 \ln(\gamma) .$$

Donc l'intégrande de (1.91) est à un facteur constant près équivalente lorsque $\gamma \rightarrow \infty$ à

$$\omega(\gamma) \frac{e^{\gamma \ln(\frac{Q^2}{Q_0^2})}}{\ln(\gamma)} e^{i \pi \gamma \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(\gamma))}$$

On trouve à un facteur constant près le même équivalent pour les fonctions de structure F_L et F_G .

Bibliographie

- [1] Pour un exposé détaillé de cette procédure de quantification, on se reportera à:
Thèse de Stephane Munier: *contributions à l'étude de la chromodynamique quantique perturbative appliquée à la diffusion profondément inélastique à petit x_{B_j}* .
- [2] Thèse de Samuel Wallon: *diffusion profondément inélastique à grande énergie en chromodynamique quantique perturbative*.
- [3] Voir E.T. Whittaker et G.N. Watson, *a course of modern analysis, cambridge Univ.Press (1963)*, page 383.
- [4] Voir G.Altarelli, J.Favier, ..., *Ecole d'été de physique des particules, 6-16 septembre 1977, chromodynamique: interactions lepton-hadron*, page 64.
- [5] *Evolution des distributions de partons du Pomeron en Chromodynamique Quantique*, rapport de stage de maîtrise de Julien Lamouroux.
- [6] S.Munier et R.Peschanski, *High energy factorization predictions for the charm structure function F_2^c at HERA*, *Nucl.Phys. B524 (1998) 377-393*.
- [7] G.P. Salam, *A resummation of large sub-leading corrections at small x* , *JHEP 9807 (1998) 019*.
- [8] H Navelet, R.Peschanski, Ch. Royon et S.Wallon, *Proton structure functions in the dipole picture of BFKL dynamics*, *Phys. Lett. B385 (1996) 357-364*.