

# Les grandes structures de l'Univers, aspects linéaires et non-linéaires (mémoire d'habilitation, Université Paris 7)

Francis Bernardeau

*Service de Physique Théorique, C.E. de Saclay*

*F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France*

(December 21, 2001)

Ce mémoire décrit les différents régimes de formation des grandes structures de l'Univers. On montre en particulier que le régime linéaire ou quasi-linéaire se prête bien à la mise en œuvre de théories des perturbations. Les résultats obtenus dans ces approches sont présentés ainsi que leurs conséquences observationnelles. La dynamique fortement non-linéaire est décrite de manière plus phénoménologique. On montre cependant qu'un certain nombre de propriétés génériques sont attendues dans ce régime particulier qui induisent des relations non-triviales entre les propriétés de corrélation des halos de matière sombre et celles du champ de matière noire sous-jacent.

## I. INTRODUCTION

Notre compréhension des grandes structures de l'Univers a été bouleversée par les développements tant observationnels que théoriques de ces deux dernières décennies. Certes le schéma global dans lequel s'inscrit ce problème avait été imaginé dès les années 30, où Lemaitre proposait déjà un mécanisme de formation des grandes structures par instabilité gravitationnelle à partir de germes de faible amplitude [1]. Mais depuis lors les détails de ce scénario se sont considérablement précisés. Certains problèmes inhérents au modèle du big-bang chaud ont trouvé au début des années 80 une solution élégante avec l'invention de l'inflation [2] qui permet de simultanément résoudre des problèmes d'horizon et de proposer un mécanisme convaincant pour l'origine des grandes structures de l'Univers.

Par ailleurs les grand relevés de galaxies entrepris dès les années 70 et poursuivis depuis lors ont permis d'avoir une vision plus précise de la répartition de matière dans l'Univers local, de ses propriétés statistiques, et notamment de l'amplitude et de la forme de son spectre de fluctuations. Il est apparu, ce que les simulations numériques lourdes développées au cours des années 80 ont confirmé, qu'il était nécessaire qu'une fraction de contenu en matière de l'Univers soit de la matière noire froide [4], c'est à dire une composante sans couplage électromagnétique, et telle qu'elle soit non-relativiste au moment de la recombinaison.

Dans un tel schéma théorique, les propriétés statistiques des champs cosmologiques, champ de densité ou champ de vitesse, en interaction gravitationnelle peuvent être examinées en détail. On se trouve cependant en présence d'un système physique un peu original, en particulier parce qu'on est confronté à une interaction de longue portée pour laquelle aucun écrantage n'est possible. Cela rend par exemple des approches de type thermodynamique inopérantes; en tout cas elles sont restées stériles jusqu'à présent (voir cependant les travaux [5]). Cependant des approches de type théorie des perturbations sont toujours envisageables, les grandes structures naissant à partir d'inhomogénéités de faible am-

plitude. Dans ce cadre perturbatif, des procédés inspirés directement de la physique statistique ou de la physique des hautes énergies ont permis de faire des progrès déterminants dans la compréhension des propriétés des structures à grande échelle. Ces études ont en particulier permis d'éclairer les relations entre les propriétés statistiques induites par les conditions initiales - qui sont très différentes pour les modèles inflationnaires ou pour les modèles avec défauts topologiques - et celles induites par la dynamique gravitationnelle elle-même. Un des enjeux de ces études est donc de faire la part entre d'éventuelles conditions initiales non-Gaussiennes et des propriétés non-Gaussiennes induites par la dynamique elle-même.

Dans la section II les résultats obtenus en théorie linéaire sont décrits. Cela fournit les outils nécessaires à l'établissement des premiers résultats des régimes quasi-linéaires, section III. La section suivante contient les résultats les plus élaborés obtenus en théorie des perturbations. Ces résultats constituent maintenant un corpus cohérent, dont je ne pourrais qu'esquisser la présentation dans ce mémoire, qui fait l'objet d'un article de revue (malheureusement toujours en préparation) pour *Physics Report*. Il existe sur le sujet un article de revue [3] mais qui n'intègre pas les derniers développements sur le sujet. La section V contient un certain nombre de considérations observationnelles, dans les catalogues de galaxies, ou pour les relevés de distorsions gravitationnelles. Je n'y décris pas les résultats obtenus pour les champs de vitesse et que très succinctement les effets de lentille sur le Fond de Rayonnement Cosmologique, qui s'inscrivaient mal dans ce cadre. Les sections VI et VII dépassent les théories des perturbations pour tenter d'apporter des éclaircissements sur le régime dynamique le plus compliqué, le régime non-linéaire.

La dernière section de ce mémoire est consacré à l'évocation de directions de recherche en cours.

## II. LA DYNAMIQUE GRAVITATIONNELLE, LES THÉORIES LINÉAIRES

Le cadre général dans le lequel on se place est celui d'un Univers de Friedmann-Robertson-Walker. On note  $a$  le facteur d'expansion. Sa dépendance en temps est donnée par les équations de Friedmann. Le paramètre de Hubble,

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (1)$$

sera affecté d'un indice  $_0$  quand il est évalué maintenant. Comme c'est l'habitude en cosmologie, on définit le paramètre de densité de l'Univers comme,

$$\Omega = \frac{8\pi G \bar{\rho}}{3H^2} \quad (2)$$

où  $\bar{\rho}$  est sa densité moyenne. On définit aussi la constante cosmologique réduite,

$$\lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}, \quad (3)$$

où  $\Lambda$  est la constante cosmologique.

On suppose que l'Univers est composé essentiellement de matière noire froide. La position comobile des particules est notée  $\mathbf{x}$ . Leur vitesse se décompose alors en 2 termes,

$$\mathbf{v} = \dot{a} \mathbf{x} + \mathbf{u} \quad (4)$$

où  $\mathbf{u}$  est la vitesse particulière, écart de la vitesse totale  $\mathbf{v}$  avec le flot de Hubble,  $\dot{a} \mathbf{x}$ .

### A. Équation d'évolution dans l'espace des phases

Sous l'horizon l'équation du mouvement pour une particule test est,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a} \mathbf{u} = G \bar{\rho} a \int d^3 \mathbf{x}' \frac{\delta(\mathbf{x}') (\mathbf{x}' - \mathbf{x})}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3}, \quad (5)$$

où  $\delta(\mathbf{x})$  est le contraste de densité local,

$$\rho(\mathbf{x}) = \bar{\rho} (1 + \delta(\mathbf{x})). \quad (6)$$

L'impulsion s'identifie à (c'est aussi la variable conjuguée de  $\dot{\mathbf{x}}$  dans le Lagrangien décrivant la dynamique),

$$\mathbf{p} = \mathbf{u} m a. \quad (7)$$

On écrit la densité dans l'espace des phases,  $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{p}$ , où  $\mathbf{x}$  est la position comobile et  $\mathbf{p}$  est l'impulsion. Le théorème de Liouville appliqué à l'évolution de la densité  $f$  donne,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + \frac{\mathbf{p}}{m a^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) - m \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \Phi(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = 0 \quad (8)$$

$$\Delta \Phi(\mathbf{x}) = \frac{4\pi G m}{a} \int f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3 \mathbf{p}. \quad (9)$$

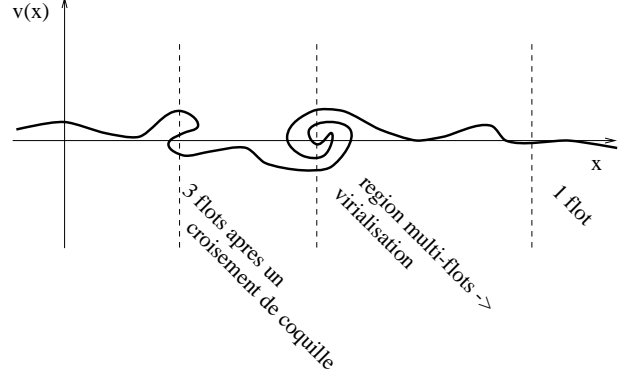


FIG. 1. Description schématique de l'espace des phases après les premiers croisements de coquilles.

Dans toute sa généralité cette équation est évidemment très difficile à résoudre.

On peut prendre différents moments de cette équation par rapport à  $\mathbf{p}$ . On obtient alors une hiérarchie d'équations qui relient les différents moments de la vitesse particulière locale. Il est nécessaire pour aller plus loin d'avoir une relation de fermeture. C'est possible si on suppose que le fluide est thermalisé. Cependant pour un fluide cosmique dominé par de la matière non-relativiste, la dispersion de vitesse intrinsèque va être beaucoup plus faible que les flots à grande échelle, en tout cas avant les premiers croisements de coquilles (voir Fig. 1). On peut alors supposer que la densité dans l'espace des phases s'écrit,

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{a^3}{m} \rho(\mathbf{x}) \delta_{\text{Dirac}}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0(\mathbf{x})). \quad (10)$$

On obtient alors les équations du mouvement pour l'approximation Newtonnienne avec un seul flot,

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{a} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \frac{\dot{a}}{a} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{a} (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{a} \nabla_{\mathbf{x}} \psi(\mathbf{x}, t) \quad (12)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 \psi(\mathbf{x}, t) - 4\pi G [\rho(\mathbf{x}, t) - \bar{\rho}(t)] a^2 = 0. \quad (13)$$

C'est une description Eulérienne de la dynamique constituée d'un système fermé, mais non-linéaire, d'équations qui relient la densité locale au flot local des vitesses particulières.

### B. Description Eulérienne ou description Lagrangienne

On peut faire une description équivalente de ce système physique par une approche Lagrangienne. L'idée est de décrire la trajectoire des particules à partir de leur position dans l'espace des positions initiales  $\mathbf{q}$ . On écrit donc qu'une particule initialement en  $\mathbf{q}$  se trouve à un

instant  $t$  à la position (comobile)  $\mathbf{x}$  après s'être déplacée de  $\Psi(\mathbf{q}, t)$ ,

$$\mathbf{x} = \mathbf{q} + \Psi(\mathbf{q}, t). \quad (14)$$

Le champ déplacement  $\Psi(\mathbf{q}, t)$  est donné par la même équation d'Euler où la densité est donnée par l'inverse du Jacobien de la transformation de  $\mathbf{q}$  vers  $\mathbf{x}$ . Plus explicitement on peut montrer que

$$J(\mathbf{q}, t) \equiv \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} \right| = 1 + \nabla_{\mathbf{q}} \cdot \Psi(\mathbf{q}, t) + \quad (15)$$

$$\frac{1}{2} \left[ (\nabla_{\mathbf{q}} \cdot \Psi)^2 - \sum_{ij} \Psi_{i,j} \Psi_{j,i} \right] + \frac{1}{6} \left[ (\nabla_{\mathbf{q}} \cdot \Psi)^3 \right.$$

$$\left. - 3 \nabla_{\mathbf{q}} \cdot \Psi \sum_{ij} \Psi_{i,j} \Psi_{j,i} + 2 \sum_{ijk} \Psi_{i,j} \Psi_{j,k} \Psi_{k,i} \right].$$

On va voir que selon le problème qui nous intéresse on pourra prendre l'une ou l'autre des formulations.

### C. La croissance des fluctuations en théorie linéaire

La théorie linéaire consiste à supposer que les fluctuations sont de faible amplitude,  $\delta \ll 1$ . Pour une description Lagrangienne, cela veut dire que les gradients du champ de déplacement sont faibles, et donc que le Jacobien de la transformée est proche de 1.

Dans ce régime il est plus simple de se servir de la description Eulérienne. La linéarisation des équations donne,

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial \delta}{\partial t} = 4 \pi G \bar{\rho} \delta. \quad (17)$$

La deuxième équation permet de rechercher les modes de fluctuation. On trouve 2 modes,

$$\delta(\mathbf{x}, t) = D_+(t) \delta_+(\mathbf{x}) + D_-(t) \delta_-(\mathbf{x}), \quad (18)$$

dont la dépendance en  $t$  dépend des paramètres cosmologiques (elle est cachée dans la dépendance en temps du facteur d'expansion). Pour être plus spécifique on a,

$$\ddot{D} + 2 H \dot{D} - \frac{3}{2} H^2(t) \Omega(t) D = 0 \quad (19)$$

qui est valable pour tous les modèles cosmologiques.

Pour un Univers Einstein-de Sitter on a,

$$D_+(t) \propto t^{2/3}, \quad (20)$$

$$D_-(t) \propto 1/t. \quad (21)$$

Notons que  $D_+$  peut s'exprimer analytiquement en fonction de  $t$  si  $\lambda = 0$ . Il doit être calculer numériquement pour des modèles avec constante cosmologique.

Une quantité utile est la dérivée logarithmique de  $D_+$  avec le facteur d'expansion, puisqu'elle apparaît de manière naturelle dans l'équation de continuité. On peut obtenir un fit analytique de la forme [6],

$$f(\Omega, \lambda) \equiv \frac{d \log D_+}{d \log a} = \Omega^{0.6} + \frac{1}{70} \lambda (1 + \Omega/2). \quad (22)$$

On voit que  $f(\Omega, \lambda)$  ne dépend que très peu de la constante cosmologique.

Une relation intéressante en théorie linéaire est la relation densité-vitesse. Localement elle s'écrit à partir de la relation de continuité,

$$\theta(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{aH} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) = -f(\Omega, \Lambda) \delta(\mathbf{x}). \quad (23)$$

Remarquons que  $\theta$  est bien a priori une quantité observable qui ne dépend pas de la constante de Hubble. Plus précisément  $\theta$  exprime les fluctuations locales de la constante de Hubble, i.e. du taux d'expansion.

Cette relation a évidemment une contrepartie non-locale qui exprime la relation entre la vitesse locale et les fluctuations de densité environnantes,

$$\frac{\mathbf{u}}{aH} = \frac{f(\Omega)}{4\pi} \int d^3 \mathbf{x}' \delta(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}. \quad (24)$$

Cette relation exprime que la vitesse acquise par une particule en régime linéaire est proportionnelle à son accélération.

### D. La vorticité

Il n'est pas inutile de remarquer que la vorticité correspond à un mode décroissant. Si on définit la vorticité par,

$$\mathbf{w}_k = (\mathbf{u}_{i,j} - \mathbf{u}_{j,i}) \epsilon^{ijk}, \quad (25)$$

( $\epsilon^{ijk}$  est le tenseur totalement antisymétrique) on a (en régime linéaire),

$$\dot{\mathbf{w}} = -\frac{\dot{a}}{a} \mathbf{w}. \quad (26)$$

Il n'y a évidemment pas de terme de source. La vorticité est un mode décroissant: elle est diluée par l'expansion (i.e. conservation du moment angulaire).

Cette propriété est en fait vraie à n'importe quel ordre de la théorie des perturbations. (Notons que sa mise œuvre pour l'approche Lagrangienne est loin d'être triviale). Une vorticité non nulle réapparaîtra au moment des premiers croisements de coquilles [7]. La modélisation de ces effets est cependant très ardue et peu de travaux ont été menés dans ce sens.

## III. LE RÉGIME QUASILINÉAIRE, EFFETS DES COUPLAGES DE MODES

Un des objectifs de ces calculs est de déterminer des quantités statistiques qui tiennent compte aussi bien des

propriétés statistiques initiales que de la dynamique. Une quantité plus particulièrement considérée (parce qu'elle est facile d'accès observationnellement aussi bien que numériquement) est la fonction de densité de probabilité de la densité locale,  $p(\delta)$ .

En pratique le champ de densité est obtenu après filtrage d'une représentation discrète de ce champ, par des points d'une simulation numérique ou des galaxies dans un catalogue. Alors  $p(\delta)d\delta$  est la probabilité que la densité locale soit entre  $\delta$  et  $d\delta$ .

Initialement, en tout cas pour des conditions initiales inflationnaires crite inflation, on sait que cette distribution doit être gaussienne. La largeur de cette distribution dépend de l'amplitude et de la forme du spectre de puissance  $P(k)$ . Plus précisément,

$$\sigma^2(R) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} P(k) W^2(kR), \quad (27)$$

où  $R$  est l'échelle de filtrage et  $W$  est la fonction de filtrage dans l'espace des  $k$ .

Les résultats obtenus à partir de la dynamique d'effondrement sphérique d'une perturbation à symétrie sphérique donnent une idée de ce qui peut se passer quand les non-linéarités commencent à jouer un rôle: l'effondrement des régions surdenses est accéléré alors que les régions sous-denses se vident de moins en moins vite. On s'attend donc à ce que les événements rares créent une asymétrie dans la distribution de densité locale. La difficulté du problème vient de ce que la dynamique de l'effondrement sphérique ne tient pas compte des couplages non-locaux. Elle ne saurait donc donner une image fiable de ce qui se passe. L'objet des calculs qui suivent est d'explorer aussi précisément que possible ces couplages et leurs conséquences.

### A. Propriétés générales du développement perturbatif

Commençons par donner des propriétés générales du développement perturbatif [8]. Le point de départ des calculs est le système d'équations décrivant la dynamique du fluide en espace Eulérien dans l'approximation à un seul flot. Nous nous plaçons dans un espace Einstein-de Sitter pour faciliter la présentation (on peut bien sûr faire les calculs dans le cas général [9] mais c'est plus laborieux).

Partant du système (11-13), prenant la divergence de la deuxième équation et utilisant l'équation de Poisson pour éliminer le potentiel, on obtient,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{a} \nabla \cdot [\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] &= 0 \quad (28) \\ \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \frac{\dot{a}}{a} \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{a} \sum_{ij} \mathbf{u}_{i,j}(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}_{i,j}(\mathbf{x}, t) \\ + \frac{1}{a} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) &= -\frac{3}{2} \frac{\dot{a}^2}{a} \delta(\mathbf{x}, t). \quad (29) \end{aligned}$$

On peut alors introduire un nouvel opérateur de gradient,  $\nabla \equiv \frac{1}{aH} \nabla_{\mathbf{x}}$  et le champ  $\Phi$  de telle manière\* que  $\mathbf{u} = \nabla \Phi$ . Enfin les dérivées par rapport au temps sont exprimées comme des dérivées par rapport à  $a$ . Notons qu'alors  $\Delta \Phi(\mathbf{x})$  s'identifie avec  $\theta$  qui est, on s'en souvient, une observable indépendante de la constante de Hubble. On obtient,

$$a \frac{\partial}{\partial a} \delta(\mathbf{x}) + (1 + \delta(\mathbf{x})) \Delta \Phi(\mathbf{x}) + \nabla \delta(\mathbf{x}) \cdot \nabla \Phi(\mathbf{x}) = 0 \quad (30)$$

$$a \frac{\partial}{\partial a} \Delta \Phi(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \Delta \Phi(\mathbf{x}) + \nabla \Phi(\mathbf{x}) \cdot \nabla \Delta \Phi(\mathbf{x}) + \sum_{ij} \Phi_{,ij}(\mathbf{x}) \Phi_{,ij}(\mathbf{x}) + \frac{3}{2} \delta(\mathbf{x}) = 0. \quad (31)$$

Si on écrit la densité (et la divergence) comme une série en fonction de la densité initiale,

$$\delta(\mathbf{x}) = \sum_n \delta^{(n)}(\mathbf{x}), \quad (32)$$

$$\theta(\mathbf{x}) = \sum_n \theta^{(n)}(\mathbf{x}), \quad (33)$$

et en introduisant les modes de Fourier de ce champ initial,

$$\delta(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \delta(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (34)$$

alors on peut facilement montrer que,

$$\delta^{(n)}(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}_1}{(2\pi)^{3/2}} \delta(\mathbf{k}_1) \dots \frac{d^3\mathbf{k}_n}{(2\pi)^{3/2}} \delta(\mathbf{k}_n) a^n \times F_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \quad (35)$$

$$\theta^{(n)}(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}_1}{(2\pi)^{3/2}} \delta(\mathbf{k}_1) \dots \frac{d^3\mathbf{k}_n}{(2\pi)^{3/2}} \delta(\mathbf{k}_n) a^n \times G_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n). \quad (36)$$

Les fonctions  $F_n$  et  $G_n$  sont des fonctions sans dimensions, homogènes, des vecteurs d'onde  $\mathbf{k}_i$ . Il existe des relations de récursivité liant ces fonctions entre elles qui se déduisent aisément de équations du mouvement.

Dans le cas d'un Univers qui n'est pas EdS, la décomposition donnée n'est plus valable au sens strict. Mais si dans l'équation précédente on remplace les facteurs d'expansion  $a$  par  $D_+$ , les fonctions  $F_n$  qui en résultent ne dépendent que très faiblement du temps (et donc des paramètres cosmologiques) [10]. Un exemple explicite est donné dans la sect. III C. Les fonctions  $G_n$  sont essentiellement toutes proportionnelles à  $f(\Omega)$ .

La conséquence de ces propriétés est que les développements perturbatifs qui se font formellement par rapport à la densité initiale, sont en fait des développements par rapport à la solution *linéaire*.

\*la partie rotationnelle du champ de vitesse correspondant à un mode décroissant, le champ de vitesse est a priori potentiel.

A partir des équations couplées, on peut facilement écrire une relation récursive entre  $F_1$ ,  $G_1$ ,  $F_2$  et  $G_2$ ,

$$2 F_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}') + G_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}') + F_1(\mathbf{k}) G_1(\mathbf{k}') \left[ 1 + \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'}{k'^2} \right] = 0 \quad (37)$$

$$\frac{3}{2} G_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}') + G_1(\mathbf{k}) G_1(\mathbf{k}') \left[ \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'}{k'^2} + \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2} \right] + \frac{3}{2} F_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = 0. \quad (38)$$

A partir de  $F_1 = -G_1$  (qui s'obtient trivialement à partir de l'équation de continuité) on en déduit  $F_2$  et  $G_2$  (on a posé  $F_1 = 1 = -G_1$ ):

$$F_2 = \frac{5}{7} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k_1^2} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k_2^2} + \frac{2}{7} \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2} \quad (39)$$

$$G_2 = - \left[ \frac{3}{7} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k_1^2} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k_2^2} + \frac{4}{7} \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2} \right]. \quad (40)$$

Ce calcul n'est valable que dans le cas Einstein-de Sitter. On voit facilement qu'on peut généraliser ce type d'approche à un ordre arbitraire. Notons que la dépendance avec les vecteurs d'onde sera de plus en plus compliquée, mais fera toujours intervenir les 2 mêmes fonctions géométriques qui apparaissent dans (37, 38).

## B. Effet du couplage de mode: la skewness

Une première conséquence de ce développement est l'apparition de couplages de mode. La densité à l'ordre 2 est une convolution des modes linéaires. D'un point de vue observationnel il est intéressant d'en déduire des propriétés statistiques a priori observables et un moyen de mettre en évidence ces couplages de mode est d'examiner l'apparition de propriétés non-gaussiennes. Le premier moment non-trivial à apparaître est la skewness, moment d'ordre 3 de la densité.

On cherche donc à calculer  $\langle \delta^3 \rangle$  et son terme dominant. On a

$$\langle \delta^3 \rangle = \langle [\delta^{(1)} + \delta^{(2)} + \dots]^3 \rangle. \quad (41)$$

Si on réordonne les termes qu'on obtient perturbativement on a,

$$\langle \delta^3 \rangle = \langle [\delta^{(1)}]^3 \rangle + 3 \langle [\delta^{(1)}]^2 \delta^{(2)} \rangle + \dots \quad (42)$$

Les termes suivants sont d'ordre plus grand en théorie des perturbations.

Le premier terme de ce développement est identiquement nul pour des conditions initiales gaussiennes. Le terme suivant est donc a priori le terme dominant pour cette quantité. On a donc,

$$\langle \delta^3 \rangle \approx 3 \langle [\delta^{(1)}]^2 \delta^{(2)} \rangle \quad (43)$$

$$= 3 \int \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{(2\pi)^{3/2}} \dots \int \frac{d^3 \mathbf{k}_4}{(2\pi)^{3/2}} a^4 F_2(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \times$$

$$\langle \delta(\mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k}_3) \delta(\mathbf{k}_4) \rangle e^{i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \cdot \mathbf{x}}. \quad (44)$$

Pour des conditions initiales gaussiennes il faut associer les modes de Fourier par paires (théorème de Wick).  $\mathbf{k}_2$  et  $\mathbf{k}_3$  ne peuvent être associés ensemble (à cause de  $F_2$ ). Il reste deux termes qui donnent,

$$\langle \delta^3 \rangle = 6 \int \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \mathbf{k}_4}{(2\pi)^3} a^4 P(k_1) P(k_4) \times \left( \frac{5}{7} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_4}{k_1^2} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_4}{k_4^2} + \frac{2}{7} \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_4)^2}{k_1^2 k_4^2} \right). \quad (45)$$

En intégrant sur les angles entre  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_4$  on obtient finalement [11]

$$\langle \delta^3 \rangle = \frac{34}{7} \langle \delta^2 \rangle^2. \quad (46)$$

On voit qu'il apparaît un nombre pur, 34/7, et la tradition est de définir,

$$S_3 \equiv \frac{\langle \delta^3 \rangle}{\langle \delta^2 \rangle^2} = \frac{34}{7} + \mathcal{O}(\sigma^2). \quad (47)$$

Ce calcul cependant est académique parce que la densité a été prise ponctuellement. En pratique les champs sont filtrés (que ce soit observationnellement ou dans des expériences numériques). Il faut alors tenir compte de cet effet dans le calcul de  $S_3$ . La difficulté du calcul tient dans la complexité qu'il y a à intégrer la partie angulaire des vecteurs d'onde. Pour avoir la skewness de la densité locale filtrée,  $\delta_R$ , il faut en effet calculer [8,12],

$$\langle \delta_R^3 \rangle = 6 \int \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \mathbf{k}_4}{(2\pi)^3} a^4 P(k_1) P(k_4) \times \left( \frac{5}{7} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_4}{k_1^2} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_4}{k_4^2} + \frac{2}{7} \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_4)^2}{k_1^2 k_4^2} \right) \times W(k_1 R) W(k_4 R) W(|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_4| R). \quad (48)$$

La fonction  $W$  est la fonction de filtrage dans l'espace de Fourier. Elle dépend évidemment de la procédure de filtrage utilisée. Il se trouve que le résultat final peut prendre une forme simple pour un filtrage carré<sup>†</sup> dans l'espace réel. Dans ce cas là,

$$W(k) = \sqrt{\frac{3\pi}{2}} \frac{J_{3/2}(k)}{k^{3/2}} = \frac{3}{k^3} [\sin(k) - k \cos(k)] \quad (49)$$

Pour cette fenêtre on a [13],

$$\int \frac{d\Omega_{12}}{4\pi} W(|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|) \left[ 1 - \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2} \right] = \frac{2}{3} W(k_1) W(k_2) \quad (50)$$

$$\int \frac{d\Omega_{12}}{4\pi} W(|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|) \left[ 1 + \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k_1^2} \right] = W(k_1) \left[ W(k_2) + \frac{1}{3} k_2 W'(k_2) \right]. \quad (51)$$

<sup>†</sup>Filtre dit "top-hat"

Ces propriétés s'obtiennent en utilisant le théorème de somme des fonctions de Bessel. On voit qu'on peut exprimer la fonction  $F_2$  en utilisant les 2 expressions polynomiales des relations précédentes. Finalement on obtient [13],

$$S_3 = \frac{34}{7} + \frac{d \log \sigma^2(R)}{d \log R}. \quad (52)$$

Le résultat final va dépendre de la forme du spectre de puissance (essentiellement à l'échelle de filtrage). Pour un spectre en loi de puissance,

$$P(K) \propto k^n, \quad (53)$$

on a (résultat obtenu antérieurement dans [12]),

$$S_3 = \frac{34}{7} - (n + 3) \quad (54)$$

L'étude des amas de galaxies permet d'avoir des indications sur la valeur de  $n$ . On trouve des valeurs de l'ordre de  $n \approx -1.5$ . Les comparaisons avec les simulations numériques ont montré que ce résultat perturbatif sur  $S_3$  était très robuste. Le domaine de validité de ce résultat est relativement grand comme on peut le voir sur la figure 7.

### C. Dépendance dans les paramètres cosmologiques

Une question très intéressante qui se pose alors est de savoir si ce paramètre  $S_3$  qui quantifie l'émergence de propriétés non-gaussiennes dépend des paramètres cosmologiques. Les calculs analytiques ont montré que la dépendance attendue était très faible. En particulier [14],

$$S_3 = \frac{34}{7} + \frac{6}{7} (\Omega_0^{-0.03} - 1) - (n + 3). \quad (55)$$

Ce résultat est basé sur le fait que la densité au 2ème ordre s'écrit maintenant,

$$\delta^{(2)}(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 \mathbf{k}_2}{(2\pi)^{3/2}} \delta(\mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}_2) D_+^2 \times \quad (56)$$

$$\left[ \frac{1}{2} + \frac{3}{14} \Omega^{-0.03} + \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k_1^2} + \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{14} \Omega^{-0.03} \right) \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2} \right] \times$$

$$\exp[i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}].$$

Ce résultat a été obtenu quand  $\lambda = 0$ . On trouve un résultat similaire quand  $\lambda \neq 0$  [9].

### D. Interprétation, effet du filtrage

La skewness mesure la tendance du système à créer une distribution asymétrique avec des événements rares ayant un contraste de densité grand et positif (les proto-amas) et beaucoup d'événements de contraste de densité petit et négatif. Un moyen de quantifier cet effet est de

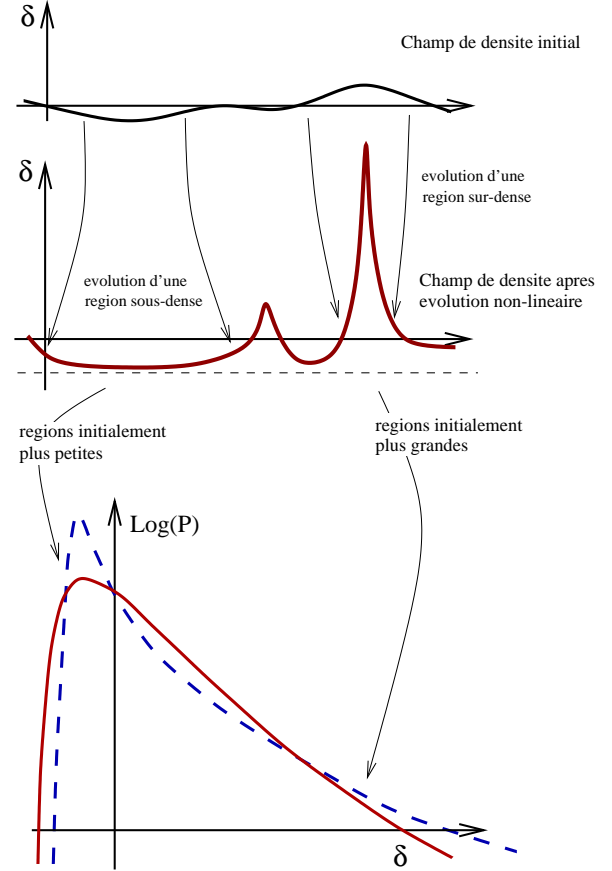


FIG. 2. La skewness est une mesure de l'asymétrie de la distribution de densité locale. Elle émerge parce que les régions sous-denses évoluent moins vite que les régions sur-denses dès que les non-linéarités commencent à jouer un rôle. La dépendance de la skewness avec la forme du spectre vient de la correspondance entre l'espace Lagrangien qui donne la taille initiale de la perturbation et l'espace Eulérien qui est sensible à la taille finale. A une échelle de filtrage  $R$  donnée, les régions sur-denses proviennent de l'effondrement de régions qui étaient initialement plus grandes, alors que les régions sous-denses détectées viennent de régions initialement plus petites. En conséquence de quoi, si on part d'un spectre de puissance avec beaucoup plus de fluctuations à petite échelle qu'à grande échelle (ligne continue), on s'attend à ce que la skewness soit plus petite que dans le cas inverse (ligne pointillée).

considérer le développement de Edgeworth de la distribution de densité locale. Ce développement est valable pour des distributions proches d'une gaussienne (dans un sens qui sera précisé par la suite). Il s'écrit,

$$p(\delta)d\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \frac{S_3}{6}\sigma H_3\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) + \dots\right] \quad (57)$$

Ce développement utilise les polynômes de Hermite. Ici

$$H_3(\nu) = \nu^3 - 3\nu. \quad (58)$$

Sa forme générale peut être vue comme un développement formel (et par identification on peut relier les coefficients des termes du développement avec les moments [15]) ou à partir de la forme formelle de la distribution de densité locale obtenue comme transformée de Laplace inverse de la fonction génératrice des cumulants [16].

Pour comprendre la dépendance de ce paramètre avec la forme du spectre il est très intéressant d'examiner en détail la nature du terme qui est rajouté avec les effets de filtrage.

Un bon moyen d'appréhender ce problème est de regarder ce qui se passe dans l'espace Lagrangien. En effet si on calcule  $J^{(2)}$  on obtient,

$$J^{(2)} = \int \frac{d^3\mathbf{k}_1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\mathbf{k}_2}{(2\pi)^{3/2}} a^2 \delta(\mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}_2) \times \quad (59)$$

$$\frac{2}{7} \left[1 - \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2}\right] \exp[i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{q}],$$

ce qui donne pour la densité après que le Jacobien (c'est à dire le volume) ait été filtré à une échelle  $R$  donnée,

$$\delta_R^{(2)} = \int \frac{d^3\mathbf{k}_1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\mathbf{k}_2}{(2\pi)^{3/2}} a^2 \delta(\mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}_2) \times$$

$$\left[ W(k_1 R) W(k_2 R) - \frac{2}{7} W(|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2| R) \left(1 - \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2}\right) \right] \times$$

$$\exp[i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{q}]$$

Il en résulte que le paramètre  $S_3$  devient,

$$S_3^{\text{Lag.}} = \frac{34}{7}. \quad (60)$$

Le fait que l'on ne trouve pas le même résultat que (54) ne doit pas surprendre. Dans ce cas on vient de faire un filtrage à une échelle de *masse* donnée. La différence entre les deux est qu'un objet de masse donnée a a priori une taille d'autant plus petite que cette masse était grande. Un filtrage à une échelle Eulérienne donnée mélange donc différentes échelles de masse initiales. Or pour un spectre hiérarchique les fluctuations de masse sont d'autant plus faibles que la masse est grande. On aura donc une asymétrie moins importante que celle qu'on aurait pu es-compter (voir Fig. 2).

#### IV. LA HIÉRARCHIE DES CORRÉLATIONS EN RÉGIME QUASI-LINÉAIRE

Peut-on faire mieux que le calcul de  $S_3$ ? Le calcul des fonctions homogènes  $F_n$  ou  $G_n$  est d'autant plus difficile que l'ordre est élevé, et les intégrales qu'il faut calculer deviennent elles aussi très fastidieuses. En pratique on ne peut guère aller au delà du moment d'ordre 4 par un calcul direct. Fry [17] avait exploré ce cas mais sans prendre en compte les effets de filtrage. Depuis des calculs directs ont été faits pour  $S_4$  dans le cas d'un filtre carré [13] et Gaussien [18].

Formellement le cumulante d'ordre 4 est donné par,

$$\langle \delta^4 \rangle_c \equiv \langle \delta^4 \rangle - 3 \langle \delta^2 \rangle^2 \quad (61)$$

$$= 12 \langle (\delta^{(1)})^2 (\delta^{(2)})^2 \rangle_c + 4 \langle (\delta^{(1)})^3 \delta^{(3)} \rangle_c.$$

Dans ces équations le fait de prendre la partie connexe devient essentiel. Les termes supplémentaires qui apparaissent sont des corrections à la variance. Ils doivent donc être enlevés (ils s'annulent naturellement quand on fait la différence).

Une conséquence est que,

$$\langle \delta^4 \rangle_c \sim \langle \delta^2 \rangle^3, \quad (62)$$

et on peut définir  $S_4$  par

$$S_4 \equiv \langle \delta^4 \rangle_c / \langle \delta^2 \rangle^3. \quad (63)$$

L'équation précédente permet de calculer la partie dominante de  $S_4$  en régime quasi-linéaire. D'une manière générale on définit

$$S_n \equiv \langle \delta^n \rangle_c / \langle \delta^2 \rangle^{(n-1)}. \quad (64)$$

Toutes ces quantités sont finies à grande échelle pour des conditions initiales Gaussiennes. L'objet de cette section est d'en présenter le calcul en reprenant les résultats exacts développés dans une série d'articles [9,19,20], qui comme on va le voir emprunte des techniques calculatoires propres à la physique théorique.

##### A. La fonction génératrice des cumulants de la densité locale

On peut déjà remarquer que

$$S_4 = 12 \nu_2^2 + 4 \nu_3, \quad (65)$$

avec

$$\nu_2 \equiv \langle \delta^{(2)} \left[ \delta^{(1)} \right]^2 \rangle / \langle \left[ \delta^{(1)} \right]^2 \rangle^2 \quad (66)$$

$$\nu_3 \equiv \langle \delta^{(3)} \left[ \delta^{(1)} \right]^3 \rangle_c / \langle \left[ \delta^{(1)} \right]^3 \rangle_c. \quad (67)$$

d'une manière générale tous les  $S_n$  peuvent s'exprimer en fonction des seuls quantités,  $\nu_p$ , avec

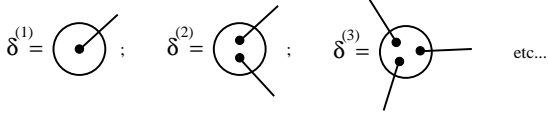


FIG. 3. Représentation diagrammatique des  $\delta_p$ . Chaque point représente un facteur  $\delta(\mathbf{k})$ .

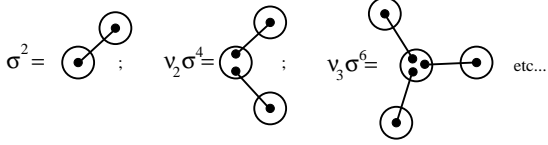


FIG. 4. Expression des graphes les plus simples. Chaque ligne porte un facteur  $\sigma^2$ , Les vertex obtenus par moyenne angulaire sur les vecteurs d'onde portent  $\nu_p$ .

$$\nu_p \equiv \langle \delta^{(p)} [\delta^{(1)}]^p \rangle_c / \langle [\delta^{(1)}]^2 \rangle^p. \quad (68)$$

Pour le voir on peut faire une représentation graphique des termes qui contribuent à  $S_n$ . Dans chaque  $\delta^{(p)}$  il y a un produit de  $p$  variables aléatoires gaussiennes  $\delta(\mathbf{k})$ . On peut représenter chacune de ces variables par des points. Quand on doit calculer une valeur moyenne, l'application du théorème de Wick fait que tous ces points doivent être associés par paires. Les quantités  $\delta^{(p)}$  ressemblent donc à ce qui est représenté sur la figure 3.

Pour calculer  $S_n$  il faut calculer le terme dominant de la partie connexe de produits de la forme  $\delta^{(p_1)} \dots \delta^{(p_n)}$ . Pour que le terme calculé contribue à la partie connexe il faut que tous les facteurs soient liés par au moins une patte. Si ce n'est pas le cas on obtient un terme qui entre dans les termes correctifs au cumulants d'ordre inférieur. Par ailleurs comme on cherche le terme dominant le nombre de lignes utilisées doit être minimal et le nombre de lignes nécessaires pour relier  $n$  points étant  $n-1$  on aura,

$$S_n = \sum_{\text{graphes}, \sum_i p_i = 2(n-1)} \langle \delta^{(p_1)} \dots \delta^{(p_n)} \rangle_c / \langle [\delta^{(1)}]^2 \rangle^{n-1}. \quad (69)$$

Un exemple d'un tel graphe pour  $S_5$  est donné sur la figure 5.

Il est utile de remarquer que tous ces diagrammes sont des arbres, qu'ils ne contiennent pas de boucles. On peut alors intégrer sur les vecteurs d'onde de proche en proche. Chaque ligne fait apparaître un facteur  $\sigma^2$  et chaque vertex fait apparaître un facteur  $\nu_p$  tel qu'ils sont définis en (68). Graphiquement cela donne ce qui est représenté sur la figure 4.

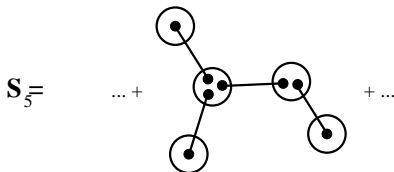


FIG. 5. Un exemple de graphe contribuant à  $S_5$ .

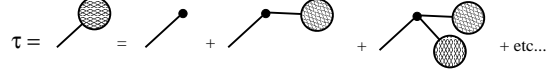


FIG. 6. Représentation graphique de la relation (73),  $\tau$  est la fonction génératrice des diagrammes à une patte externe.

Ce qu'on aimerait pouvoir calculer c'est l'ensemble des coefficients  $S_n$ , et donc plus spécifiquement leur fonction génératrice  $\varphi(y)$ ,

$$\varphi(y) = \sum_{n=1}^{\infty} -S_n \frac{(-y)^n}{n!}. \quad (70)$$

Si on définit la fonction génératrice des vertex  $\mathcal{G}_\delta(\tau)$  par,

$$\mathcal{G}_\delta(\tau) = \sum_{p=1}^{\infty} \nu_p \frac{(-\tau)^p}{p!}, \quad (71)$$

il est possible de montrer  $\varphi$  et  $\mathcal{G}_\delta$  sont liés par le système,

$$\varphi(y) = y + y \mathcal{G}_\delta[\tau(y)] + \frac{1}{2} \tau^2(y), \quad (72)$$

$$\tau(y) = -y \mathcal{G}'_\delta[\tau(y)]. \quad (73)$$

Pour démontrer ce système de relations il faut faire intervenir les transformées de Legendre des fonctions génératrices. Ces techniques ont été développées initialement dans le domaine des polymères (voir [21]). Dans un contexte de cosmologie elles ont été employées dans [22] et présentées en détails par Bernardeau & Schaeffer [23]. S'il n'est pas possible de démontrer cette relation en quelques lignes on peut au moins se convaincre de la validité de l'équation (73). En effet  $\tau$  est la fonction génératrice des graphes à une patte externe. Sur la figure (6) on voit que  $\tau$  doit être solution d'une équation implicite qui fait intervenir la fonction génératrice des vertex.

Finalement la difficulté technique repose dans le calcul de la fonction génératrice des vertex  $\mathcal{G}_\delta(\tau)$ . Il faut bien avoir à l'esprit que les vertex  $\nu_p$  sont simplement les moyennes géométriques des fonctions  $F_p$ . Leur calcul fait aussi intervenir les moyennes géométriques des fonctions  $G_p$ , notés  $\mu_p$ , soit,

$$\nu_p = \overline{F_p(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_p)}^{\text{angles}} \quad (74)$$

$$\mu_p = \overline{G_p(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_p)}^{\text{angles}} \quad (75)$$

et on définit  $\mathcal{G}_\theta(\tau)$  la fonction génératrice des vertex  $\mu_p$ . Pour obtenir  $\mathcal{G}_\delta$  et  $\mathcal{G}_\theta$  il faut partir des équations (30-31) et les ré-écrire dans l'espace de Fourier,

$$n F_n + G_n + \sum_{p=1}^{n-1} F_p G_{n-p} \times \left[ 1 + \frac{(\sum_{i=1}^p \mathbf{k}_i) \cdot (\sum_{i=p+1}^n \mathbf{k}_i)}{(\sum_{i=p+1}^n \mathbf{k}_i)^2} \right] = 0 \quad (76)$$



$$\left( n + \frac{1}{2} \right) G_n + \frac{3}{2} F_n + \sum_{p=1}^{n-1} G_p G_{n-p} \times \left[ \frac{(\sum_{i=1}^p \mathbf{k}_i) \cdot (\sum_{i=p+1}^n \mathbf{k}_i)}{(\sum_{i=p+1}^n \mathbf{k}_i)^2} + \frac{[(\sum_{i=1}^p \mathbf{k}_i) \cdot (\sum_{i=p+1}^n \mathbf{k}_i)]^2}{(\sum_{i=1}^p \mathbf{k}_i)^2 (\sum_{i=p+1}^n \mathbf{k}_i)^2} \right] = 0. \quad (77)$$

Quand on prend les moyennes angulaires les produits scalaires simples tombent tandis que les produits carrés donnent 1/3. On obtient donc,

$$n \nu_n + \mu_n + \sum_{p=1}^n \frac{n!}{p!(n-p)!} \nu_p \mu_{n-p} = 0; \quad (78)$$

$$\left( n + \frac{1}{2} \right) \mu_n + \frac{3}{2} \nu_n + \frac{1}{3} \sum_{p=1}^n \frac{n!}{p!(n-p)!} \mu_p \mu_{n-p} = 0. \quad (79)$$

En termes de fonctions génératrices cela implique que,

$$\tau \frac{d}{d\tau} \mathcal{G}_\delta(\tau) + \mathcal{G}_\theta(\tau) [1 + \mathcal{G}_\delta(\tau)] = 0; \quad (80)$$

$$\tau \frac{d}{d\tau} \mathcal{G}_\theta(\tau) + \frac{1}{2} \mathcal{G}_\theta(\tau) + \frac{3}{2} \mathcal{G}_\delta(\tau) + \frac{1}{3} \mathcal{G}_\theta^2(\tau) = 0. \quad (81)$$

On obtient un système d'équations différentielles couplées. Après quelques manipulations on peut montrer que l'équation d'évolution du  $\mathcal{G}_\delta(\tau)$  se réduit à celle de l'effondrement sphérique où  $\mathcal{G}_\delta(\tau)$  est le contraste de densité de la structure en effondrement et  $\tau$  est la surdensité linéaire. Dès lors il facile de calculer les  $\nu_n$  à un ordre arbitraire,

$$\nu_2 = \frac{34}{21}; \quad (82)$$

$$\nu_3 = \frac{682}{189}; \quad (83)$$

$$\nu_4 = \frac{446440}{43659}; \quad (84)$$

...

Les valeurs des  $S_n$  en découlent tout de suite,

$$S_3 = \frac{34}{7}; \quad (85)$$

$$S_4 = \frac{60\,712}{1\,323} \approx 45.89; \quad (86)$$

$$S_5 = \frac{200\,575\,880}{305\,613} \approx 656.3; \quad (87)$$

...

La fonction génératrice de ces cumulants est riche d'enseignement [9], mais les prédictions quantitatives qu'on peut en tirer manquent d'un ingrédient essentiel, les effets de filtrage.

## B. La fonction génératrice des cumulants de la densité filtrée

Comme l'étude du comportement de  $S_3$  l'a montrée, l'espace Lagrangien permet de comprendre les effets de filtrage. Ceux-ci ne s'expliquent en définitive que par une correspondance entre coordonnées Lagrangiennes et Eulériennes.

### 1. Propriétés géométriques dans l'espace Lagrangien

La quantité de base en espace Lagrangien est le Jacobien. On peut toujours imaginer un développement perturbatif de  $J$ ,

$$J(\mathbf{q}) = J^{(1)}(\mathbf{q}) + J^{(2)}(\mathbf{q}) + \dots \quad (88)$$

A un ordre donné on aura,

$$J^{(p)}(\mathbf{q}) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{(2\pi)^{3/2}} \dots \frac{d^3 \mathbf{k}_p}{(2\pi)^{3/2}} a^p J_p(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_p) \times \exp[i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_p)] \quad (89)$$

La propriété remarquable que l'on peut montrer est que [19],

$$j_p \equiv \overline{J_p(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_p) W(|\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_p| R)}^{\text{angles}} \quad (90)$$

$$= \overline{J_p(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_p)}^{\text{angles}} W(k_1 R) \dots W(k_p R). \quad (91)$$

La démonstration complète est assez ardue. Elle repose sur les remarques suivantes. Le Jacobien s'exprime essentiellement à partir de deux fonctions géométriques dans une construction récursive (voir Eq. 15). On a déjà vu que le filtre carré en quelque sorte commute avec  $1 - (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2 / k_1^2 k_2^2$ . On peut aussi montrer la propriété suivante,

$$\int \frac{d\Omega_1}{4\pi} \frac{d\Omega_2}{4\pi} \frac{d\Omega_3}{4\pi} W(|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3| R) \left[ 1 - \left( \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k_1 k_2} \right)^2 - \left( \frac{\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_3}{k_2 k_3} \right)^2 - \left( \frac{\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{k}_1}{k_3 k_1} \right)^2 + 2 \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{k}_1}{k_1^2 k_2^2 k_3^2} \right] = \frac{2}{9} W(k_1 R) W(k_2 R) W(k_3 R). \quad (92)$$

Là encore, tout se passe comme si on prenait le résultat obtenu pour le jacobien ponctuel calculé à partir d'un champ de densité initial avec un spectre de fluctuation tronqué.

La propriété (91) s'obtient alors par applications successives des propriétés géométriques (50, 92), la forme géométrique de (51) n'apparaissant pas pour le Lagrangien.

Ce qu'on vient d'obtenir généralise ce que l'on avait vu pour  $S_3$  qui, dans l'espace Lagrangien, n'était pas affecté par le filtrage (pour un filtre carré exclusivement).

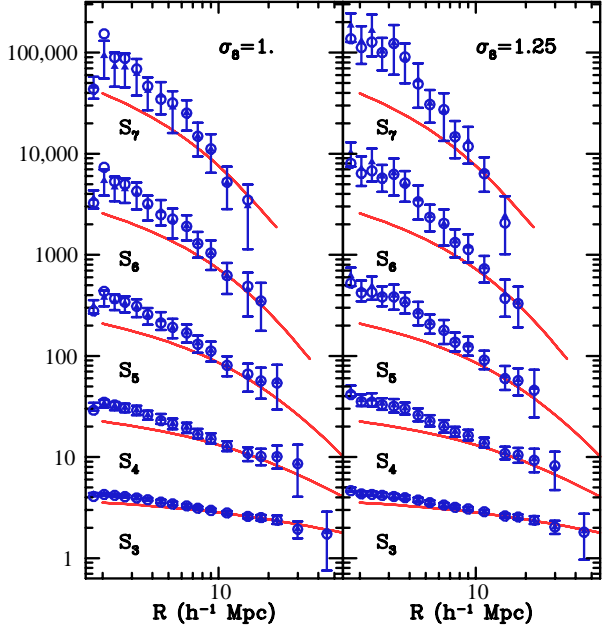


FIG. 7. Les paramètres  $S_p$  pour  $3 \leq p \leq 7$ . Comparaison des prédictions théoriques données en [20] (lignes continues) avec les résultats de simulations numériques (symboles) [24].

## 2. Le passage Lagrangien-Eulérien

L'idée est maintenant de trouver une astuce pour récupérer le terme dominant des  $S_p$ , à moindre frais, à partir des  $S_p$  de l'espace Lagrangien [20].

La hiérarchie précédente donne des informations sur la fonction génératrice des cumulants de la distribution de volume à échelle de masse fixe. On peut alors faire la remarque suivante: la probabilité qu'une masse  $M$  occupe un volume supérieur à  $V$  est aussi la probabilité qu'un volume  $V$  contienne une masse inférieure à  $M$ . Il suffit pour cela de considérer des sphères concentriques autour d'un point  $\mathbf{x}_0$  donné<sup>†</sup>. Or une de ces probabilités s'exprime en espace Lagrangien, l'autre en espace Eulerien. A travers cette proposition on peut alors trouver le comportement dominant de la fonction génératrice des cumulants  $\varphi(y)$  dans la limite des petites variances à partir de celle obtenue pour l'espace Lagrangien qui s'identifie à celle obtenue sans tenir compte des effets de filtrage.

Rappelons d'abord que

$$p(\delta)d\delta = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{2\pi i \sigma^2} \exp\left[-\frac{\varphi(y)}{\sigma^2} + \frac{y\delta}{\sigma^2}\right] d\delta. \quad (93)$$

Il est alors intéressant de faire un calcul succinct par la méthode du col qui est a priori valable dans la limite des

petites variances. On voit que la position du point col est donnée par l'équation

$$\frac{d}{dy}\varphi(y) = \delta, \quad (94)$$

et par ailleurs on a

$$\frac{d}{dy}\varphi(y) = \mathcal{G}_\delta(\tau), \quad (95)$$

quand  $\tau$  est toujours donnée par la même relation implicite avec  $y$ . Autour de ce point col la partie sous l'exponentielle est simplement donnée par  $\exp(-\tau^2/2\sigma^2)$ . La position du point col est donc essentiellement donnée par un simple changement de variable passant de la densité linéaire  $\tau$  au contraste densité nonlinéaire  $\delta$ .

La différence entre une description Lagrangienne est que  $\sigma$  est pris dans un cas à une échelle de masse donnée, dans l'autre à une échelle physique  $R$  donnée. Comme on cherche la partie dominante de  $\varphi$  dans la limite  $\sigma \rightarrow 0$  il est parfaitement légitime de s'appuyer sur cette approximation.

Pour rendre le calcul plus simple, il faut préciser un peu les notations. On note  $\varphi^L$  la fonction génératrice des cumulants dans l'espace Lagrangien et  $\mathcal{G}_\delta^L$  la fonction génératrice des vertex. L'exposant  $E$  est utilisé pour l'espace Eulerien. Il est toujours possible de supposer qu'il existe une fonction  $\mathcal{G}_\delta^E$  associée à  $\varphi^E$  (même si il n'y a pas de représentation diagrammatique à partir de vertex qui lui soit associée). La variable  $\tau$  est de même prise avec l'indice  $L$  ou  $E$  selon qu'elle concerne l'espace Lagrangien ou Eulerien.

Par identification des termes sous l'exponentielle (les seuls qui comptent dans la limite considérée), on a

$$-\frac{\tau_E^2}{2\sigma^2(R)} = -\frac{\tau_L^2}{2\sigma^2[(1+\delta)^{1/3}R]}. \quad (96)$$

Le contraste de densité est un paramètre donné a priori. Les variables  $\tau_E$  et  $\tau_L$  dépendent de  $\delta$  à travers les équations du col,

$$\mathcal{G}_\delta^L(\tau_L) = \delta = \mathcal{G}_\delta^E(\tau_E). \quad (97)$$

Dans le cas Lagrangien  $\sigma$  (fonction de l'échelle à priori connue) est pris à l'échelle de masse correspondant à la surdensité  $\delta$  considérée. La fonction  $\mathcal{G}_\delta^L(\tau_L)$  est connue. C'est elle qui décrit la dynamique de l'effondrement sphérique.

À partir de ces équations on peut éliminer  $\tau_L$  pour obtenir une équation implicite entre  $\mathcal{G}_\delta^E$  et  $\tau_E$ ,

$$\mathcal{G}_\delta^E(\tau_E) = \mathcal{G}_\delta^L\left(\frac{\sigma[(1+\mathcal{G}_\delta^E(\tau_E))^{1/3}R]}{\sigma(R)}\tau_E\right). \quad (98)$$

La fonction génératrice des cumulants  $\varphi^E(y)$  est alors construite à partir de  $\mathcal{G}_\delta^E(\tau_E)$  de la même manière que  $\varphi^L(y)$  l'était à partir de  $\mathcal{G}_\delta^L(\tau_L)$ .

<sup>†</sup>La proposition n'est cependant rigoureuse que pour des probabilités dites centrées

En développant cette fonction autour de  $y = 0$  on a alors les expressions explicites des premières valeurs des  $S_p$ . Ils s'expriment en fonction des dérivées logarithmiques successives de la variance,

$$\gamma_p \equiv \frac{d^p \log \sigma^2(R)}{d \log^p R}, \quad (99)$$

et alors,

$$S_3 = \frac{34}{7} + \gamma_1, \quad (100)$$

$$S_4 = \frac{60712}{1323} + \frac{62}{3} \gamma_1 + \frac{7}{3} \gamma_1^2 + \frac{2}{3} \gamma_2, \quad (101)$$

$$S_5 = \frac{200575880}{305613} + \frac{1847200}{3969} \gamma_1 + \frac{6940}{63} \gamma_1^2 + \frac{235}{27} \gamma_1^3 + \frac{1490}{63} \gamma_2 + \frac{50}{9} \gamma_1 \gamma_2 + \frac{10}{27} \gamma_3, \quad (102)$$

$$S_6 = 12650 + 12330 \gamma_1 + 4512 \gamma_1^2 + 734.0 \gamma_1^3 + 44.81 \gamma_1^4 + 775.8 \gamma_2 + 375.9 \gamma_1 \gamma_2 + 45.56 \gamma_1^2 \gamma_2 + 3.889 \gamma_2^2 + 20.05 \gamma_3 + 4.815 \gamma_1 \gamma_3 + 0.1852 \gamma_4, \quad (103)$$

$$S_7 = 307810 + 383000 \gamma_1 + 190700 \gamma_1^2 + 47460 \gamma_1^3 + 5914 \gamma_1^4 + 294.8 \gamma_1^5 + 27340 \gamma_2 + 20300 \gamma_1 \gamma_2 + 5026 \gamma_1^2 \gamma_2 + 414.8 \gamma_1^3 \gamma_2 + 358.1 \gamma_2^2 + 88.15 \gamma_1 \gamma_2^2 + 902.6 \gamma_3 + 443.3 \gamma_1 \gamma_3 + 54.44 \gamma_1^2 \gamma_3 + 7.778 \gamma_2 \gamma_3 + 14.20 \gamma_4 + 3.457 \gamma_1 \gamma_4 + 0.08642 \gamma_5, \quad (104)$$

...

La figure 7 montre que ces coefficients sont en parfait accord avec des résultats de simulations numériques (ici pour un spectre CDM [24]) dès lors que l'échelle de filtrage est plus grande que  $10h^{-1}$  Mpc. Il est assez remarquable de voir (et ce fut une heureuse surprise!) que le domaine de validité de ces résultats ne se détériore pas quand on augmente l'ordre des cumulants.

### C. Application, construction de la distribution de probabilité de densité locale

La fonction de distribution de probabilité peut a priori être construite à partir de la fonction génératrice  $\varphi(y)$ . Pour pouvoir utiliser cette relation il faut cependant faire une hypothèse supplémentaire non triviale. En effet  $\varphi(y)$  dépend de  $\sigma$  à travers la dépendance des  $S_p$  avec  $\sigma$ . Pour pouvoir exploiter la relation entre  $\varphi(y)$  et  $p(\delta)$  il faut supposer que la limite,

$$\varphi(y, \sigma) \rightarrow \varphi(y) \quad \text{quand } \sigma \rightarrow 0, \quad (105)$$

est uniforme. Il n'y a pas de preuve de cette propriété, cependant elle est fortement suggérée par les résultats numériques sur les  $S_p$ .

TABLE I. Valeur des paramètres de la singularité (109) pour différentes valeurs de l'indice spectral  $n$ .

| $n$  | $\delta_c$ | $y_s$  | $r_s$ | $a_s$ | $\varphi_s$ |
|------|------------|--------|-------|-------|-------------|
| -3   | 0.656      | -0.184 | 1.66  | 1.84  | -0.030      |
| -2.5 | 0.804      | -0.213 | 1.80  | 2.21  | -0.041      |
| -2   | 1.034      | -0.253 | 2.03  | 2.81  | -0.058      |
| -1.5 | 1.44       | -0.310 | 2.44  | 3.93  | -0.093      |
| -1   | 2.344      | -0.401 | 3.34  | 6.68  | -0.172      |
| -0.5 | 5.632      | -0.574 | 6.63  | 18.94 | -0.434      |

Quand la variance est suffisamment faible il est alors légitime de supposer que

$$p(\delta)d\delta = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dy}{2\pi i \sigma^2} \exp \left[ -\frac{\varphi(y)}{\sigma^2} + \frac{y\delta}{\sigma^2} \right] d\delta, \quad (106)$$

pour rechercher les différentes formes de  $p(\delta)$  qui en résultent (voir [25] pour une description plus exhaustive des résultats). Profitant de l'approximation  $\sigma \ll 0$  on peut appliquer la méthode du col, et on obtient

$$p(\delta)d\delta = \frac{d\delta}{-G'_\delta(\tau)} \left[ \frac{1 - \tau G''_\delta(\tau)/G'_\delta(\tau)}{2\pi\sigma^2} \right]^{1/2} \exp \left( -\frac{\tau^2}{2\sigma^2} \right), \quad (107)$$

$$G_\delta(\tau) = \delta. \quad (108)$$

Cette solution est valable quand  $\delta \leq \delta_c$  où  $\delta_c$  est la valeur du contraste de densité qui annule  $1 - \tau G''_\delta(\tau)/G'_\delta(\tau)$ . Quand  $\delta$  est plus grand que  $\delta_c$  on ne peut plus faire l'approximation du point col. La forme de  $p(\delta)$  est alors plutôt déterminée par le comportement de  $\varphi(y)$  près de sa singularité,

$$\varphi(y) - \varphi_s - r_s(y - y_s) \simeq -a_s(y - y_s)^{3/2}, \quad (109)$$

et on a

$$p(\delta)d\delta = \frac{3a_s\sigma}{4\sqrt{\pi}} (1 + \delta - r_s)^{-5/2} \times \exp \left[ -|y_s|\delta/\sigma^2 + |\varphi_s|/\sigma^2 \right] d\delta. \quad (110)$$

On voit que la forme de la coupure est très différente d'une forme gaussienne. Il faut bien avoir à l'esprit que ce résultat repose en grande partie sur l'hypothèse (105), et en particulier sur le fait que la position de la singularité doit rester à une distance finie de l'origine quand  $\sigma$  est finie. La table I donne les paramètres de la singularité pour différentes valeurs de l'indice spectral. Rappelons que  $n \approx -1.5$  est une valeur suggérée par les comptages d'amas de galaxies.

Numériquement il est toujours possible d'intégrer sans faire explicitement l'approximation du col. Les formes obtenues sont en bon accord avec les résultats de simulations numériques  $N$ -corps ([26]). Sur la figure 8 différentes échelles de filtrage, donc différentes valeurs de la variance, sont examinées. La forme prédite pour la distribution (calculée à partir de la donnée de la variance et de l'indice spectral local) est en remarquable accord avec les résultats numériques.

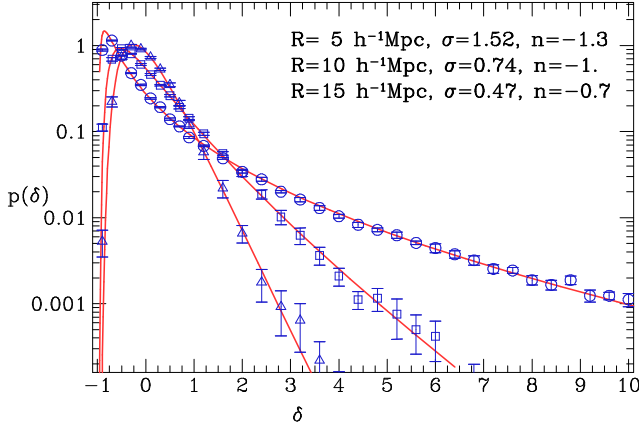


FIG. 8. Comparaisons des résultats de simulations numériques  $N$  corps (symboles) [26] avec les prédictions de la théorie perturbative (lignes continues) [20].

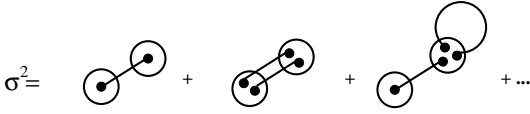


FIG. 9. Diagrammes à une boucle contribuant à la variance

#### D. Les termes sous-dominants du développement perturbatif

Les quantités que l'on vient de calculer sont les termes dominants (contributions en arbre) d'un développement plus général. On peut toujours se demander si les corrections en boucles permettent d'étendre le domaine de validité de la théorie des perturbations. Par exemple pour les termes correctifs à la variance on a deux diagrammes supplémentaires (voir figure 9), pour la skewness on en a quatre (figure 10).

C'est un domaine qui a été relativement peu exploré. La raison principale en est sans doute que les calculs sont horriblement compliqués! On ne peut plus aussi simplement moyenner sur les angles entre vecteurs d'onde, et les effets de filtrage rendent les calculs encore plus inextricables.

Les résultats obtenus sur la variance et la skewness montrent que [27],

- Les termes correctifs ne convergent que si l'indice spectral  $n$  est compris entre  $-3$  et  $-1$ . A grande échelle les corrections en bouclent ne convergent

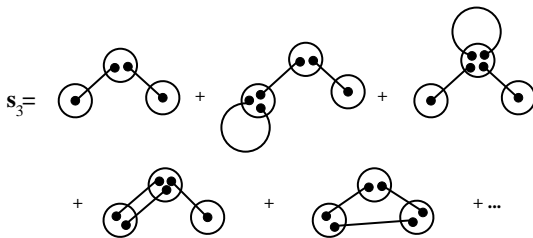


FIG. 10. Diagrammes à une boucle contribuant à  $S_3$ .

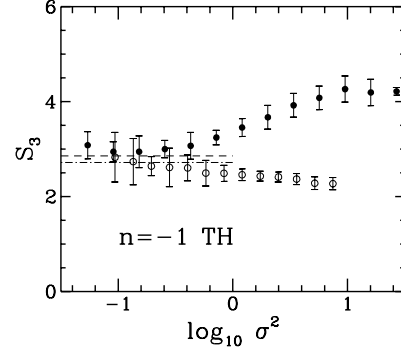


FIG. 11. La skewness calculée dans l'espace réel (tirets) et calculée dans l'espace des redshifts (tiret-points). Ces prédictions sont comparées à des résultats de simulations numériques, espace réel (symboles pleins) espace des redshifts (symboles vides). La cas présenté est  $n = -1$  pour un filtre carré (figure extraite de [29]).

donc pas. Ce sont les 'petites boucles' (tadpoles) qui induisent ces divergences.

- Quand on a convergence, on a une bonne description de la transition vers le nonlinéaire.

En pratique on a une coupure naturelle parce que  $n \rightarrow -3$  à petite échelle. Il n'en reste pas moins qu'on ne sait pas si ce cut-off doit être explicitement introduit pour régulariser les résultats ou si une resommation (au moins partielle) des boucles donnerait une contribution finie (mais éventuellement avec une autre dépendance en  $\sigma$ ).

## V. APPLICATION AUX PROPRIÉTÉS STATISTIQUES DE QUANTITÉS OBSERVABLES

Dans cette partie je vais illustrer les résultats des théories des perturbations en les comparant à des quantités observables extraites de catalogues de galaxies tridimensionnel ou bi-dimensionnel, champ de distorsion gravitationnelle.

### A. Les catalogues de galaxies

A priori on peut toujours supposer que les fluctuations du nombre local de galaxies sont une mesure des fluctuations de densité cosmique. En général on suppose que les galaxies forment une représentation discrète résultant d'un processus Poissonien d'un champ de densité continu sous-jacent. (Ce qui revient à dire que les mesures sont affectées d'un bruit Poissonien).

Dans les catalogues tri-dimensionnels il faut tenir compte d'un effet ignoré jusqu'à présent qui est dû au fait que les positions des galaxies sont estimées à partir de la vitesse de recession qui combine la distance réelle (mouvement de Hubble) et la vitesse propre le long de la ligne de visée. C'est ce qu'on appelle la position dans l'espace des redshifts. Cela affecte en principe les valeurs

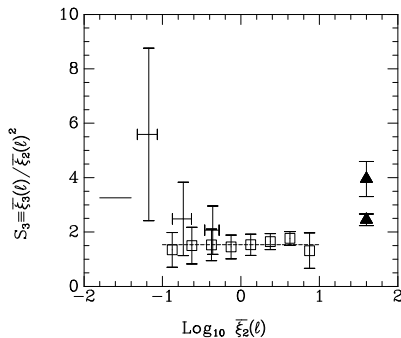


FIG. 12. La skewness mesurée dans le catalogue IRAS (carrés) comparée à des mesures faites pour les galaxies optiques (triangles). La ligne continue à gauche est la prédiction de la théorie des perturbations (figure extraite de [28]).

des  $S_p$ , cependant cette correction ne change que très peu la valeur de  $S_3$  à grande échelle [29] (voir figure 11).

Des mesures de ces paramètres ont été faites dans tous les grands catalogues de galaxies à notre disposition [14,28,30,31].

Toutes ces mesures montrent que les comportements hiérarchiques attendus sont bien vérifiés. C'est en soit un résultat extrêmement important. Cela implique que les conditions initiales pour la formation des grandes structures étaient sinon Gaussiennes du moins proche d'être Gaussiennes. Par exemple les données excluent a priori les modèles de textures [32]. En effet on s'attend à ce que la hiérarchie soit préservée même si le champ de densité des galaxies est biaisé (du moins tant que les interactions non-gravitationnelles ayant donné naissance aux galaxies sont locales, e.g. [33]).

Toutefois les valeurs des  $S_p$  mesurées ne sont pas en accord avec les prédictions théoriques (figure 12). C'est à ce niveau là que se pose le problème des biais. C'est à ce jour l'interprétation la plus raisonnable pour expliquer les différences persistantes qui subsistent.

## B. Les catalogues bi-dimensionnels

Les données les plus riches actuellement sont dans les catalogues angulaires. Ils donnent la position angulaire sur la voûte céleste de plus d'un million d'objets. De ce fait il est possible de mesurer les paramètres  $s_p$  jusqu'à de très grands ordres (voir figure 13).

On peut tout aussi bien se poser la question du calcul des probabilités de comptages dans ce type de catalogues. Cela correspond à un filtrage qui n'est plus à symétrie sphérique: la fenêtre de filtrage a maintenant la forme d'un cône très étroit dans l'espace réel. Plus précisément la densité projetée  $w(\gamma)$  dans la direction  $\gamma$  vaut,

$$w(\gamma) = \int_0^\infty r^2 dr F(r) \bar{\rho} (1 + \delta(r, \gamma)), \quad (111)$$

et la densité filtrée à une échelle angulaire  $\theta$  est

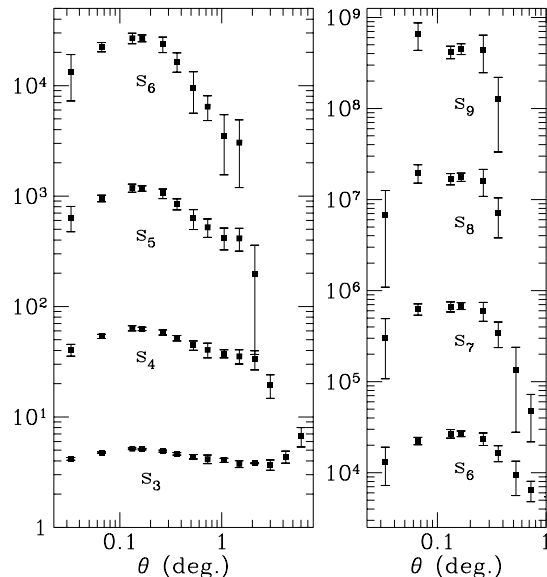


FIG. 13. Les paramètres  $s_p$  mesurés dans le catalogue angulaire APM [30].

$$w_\theta(\gamma) = \int_{|\gamma'| < \theta} d^2 \gamma' \int_0^\infty r^2 dr F(r) \bar{\rho} (1 + \delta(r, \gamma + \gamma')). \quad (112)$$

La fonction  $F$  est directement liée au processus de sélection des galaxies du catalogues (limite en magnitude, etc.). Typiquement pour des sélections en magnitude apparente en luminosité optique on peut supposer que,

$$F(r) \sim \frac{1}{r^{0.5}} \exp(-r^2/D^2), \quad (113)$$

où  $D$  est la profondeur du catalogue. Notons que jusqu'à présent les catalogues sont peu profonds d'un point de vue cosmologique et donc on peut supposer que la distance lumineuse est une simple distance Euclidienne. On peut toujours normaliser  $F$  de telle manière que

$$\int_0^\infty r^2 dr F(r) \bar{\rho} = 1. \quad (114)$$

La fonction de corrélation à deux points est alors donnée par,

$$\langle w(\gamma_1) w(\gamma_2) \rangle = \int r_1^2 dr_1 F(r_1) \int r_2^2 dr_2 F(r_2) \times \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} P(k) \exp[ik_r(r_1 - r_2) + i\mathbf{k}_\perp \cdot (r_1 \gamma_1 - r_2 \gamma_2)], \quad (115)$$

où  $\mathbf{k}$  est décomposé en sa partie radiale  $k_r$  et sa partie tangentielle  $\mathbf{k}_\perp$ . L'approximation des petits angles consiste à remarquer que la distance angulaire  $|\gamma_1 - \gamma_2|$  est faible alors  $k_r$  va être très petit devant la norme de  $\mathbf{k}_\perp$ , de sorte que,

$$P(k) \approx P(k_\perp). \quad (116)$$

Il en résulte que

$$\langle w(\gamma_1) w(\gamma_2) \rangle = \int r^4 dr F^2(r) \times \quad (117)$$

$$\int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} P(k) \exp[i\mathbf{k}_\perp \cdot (\gamma_1 - \gamma_2)r].$$

En effet l'intégrale sur  $k_r$  introduit une fonction delta en  $r_1 - r_2$ . L'approximation des petits angles signifie simplement que les paires qui contribuent le plus à la variance de la densité projetée viennent de points qui étaient à la même distance de l'observateur. Ce résultat correspond à l'approximation dite de Limber [35] sur la fonction de corrélation angulaire. Cette approximation n'est d'ailleurs valable que si la fonction de corrélation est suffisamment pentue.

Pour avoir la variance de la densité filtrée, il suffit de prendre la transformée de Fourier de la fenêtre donc, dans l'espace de Fourier, multiplier par la fenêtre<sup>§</sup>  $W(k)$  et on obtient,

$$\langle w_\theta^2 \rangle = \int r^4 dr F^2(r) \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} P(k) W^2(k \theta r). \quad (118)$$

Le calcul de la skewness peut se faire de manière similaire et on peut utiliser pour un filtrage angulaire carré de propriétés similaires à celles utilisées pour le cas 3D.

Il en résulte que [36],

$$s_3 = \frac{\int r^6 dr F^3(r) \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} P(k) W^2(k \theta r)}{\left[ \int r^4 dr F^2(r) \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} P(k) W^2(k \theta r) \right]^2} \times \quad (119)$$

$$\left[ \frac{36}{7} \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} P(k') W^2(k' \theta r) + \frac{3}{2} \frac{d}{\log \theta} \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} P(k') W^2(k' \theta r) \right].$$

Cette expression se simplifie quelque peu quand on suppose qu'on a une loi de puissance pour le spectre  $P(k)$  ( $P(k) \sim k^n$ ),

$$s_3 = \frac{\int r^6 dr F^3(r) r^{-2(n+2)}}{\left[ \int r^4 dr F^2(r) r^{-(n+2)} \right]^2} \left[ \frac{36}{7} - \frac{3}{2}(n+2) \right]. \quad (120)$$

La hiérarchie complète des  $s_p$  se calcule de manière analogue au cas 3D. On a simplement en plus un facteur géométrique lié aux effets de projection. Les coefficients purement dynamiques sont en fait identiques à ceux qu'on aurait obtenus si on était parti d'une dynamique bidimensionnelle.

La comparaison avec les catalogues angulaires comme le catalogue APM [34,31] montre un accord raisonnable avec les résultats théoriques et suggère que si les champs de galaxies sont biaisés, ils ne le sont pas beaucoup. Il n'en reste pas moins vrai que le problème du biais reste un problème fondamental qui prévient à terme de mener ce genre de comparaisons avec autant de précision que l'on souhaiterait.

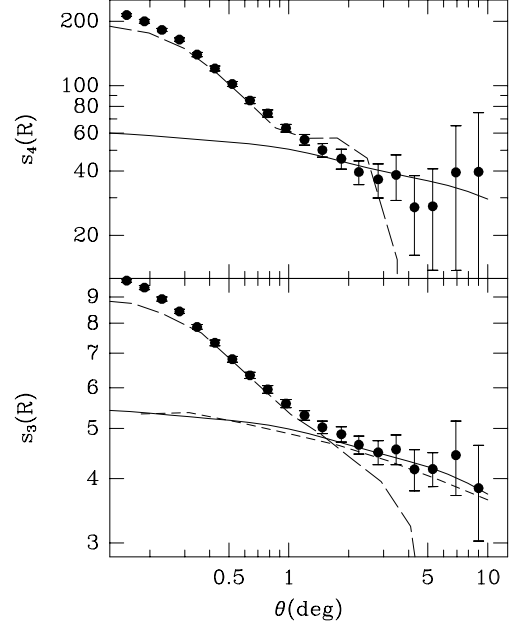


FIG. 14. Les paramètres  $s_3$  et  $s_4$  obtenus par la théorie des perturbations (lignes continues) comparés à des résultats de simulations numériques [37].

### C. Les effets de lentille gravitationnelle

Une motivation pour aller chercher de nouveaux traceurs du champ de densité est justement de s'affranchir des effets de biais. L'étude des flots cosmiques en a été jusqu'à maintenant le moyen privilégié (voir la revue de Dekel [38]). On a pu montrer que la théorie des perturbations permettait aussi de décrire les champs de vitesse à grande échelle, en particulier les propriétés statistiques de la divergence [39]. Cependant les méthodes même utilisées pour reconstruire les champs de vitesse ne permettent pas de réaliser des relevés de grande taille. L'utilisation de tels outils statistiques est donc fondamentalement limitée par des variances cosmiques rédhibitoires.

Un moyen alternatif pour tracer les champs de densité locaux est d'utiliser les effets de distorsion gravitationnelle. Jusqu'à maintenant ils n'ont été utilisés que pour reconstruire les puits de potentiel les plus proéminents comme les amas de galaxies. Les nouvelles générations d'instruments devraient cependant permettre de faire des cartes de distorsions gravitationnelles de l'ensemble des grandes structures de l'Univers. La physique des lentilles gravitationnelles est décrite dans des ouvrages de références [40].

#### 1. Les lentilles gravitationnelles

Commençons par rappeler des concepts simples des effets de lentilles. Une lentille induit une déflexion  $\delta\alpha$  des rayons lumineux par unité de distance  $\delta s$  égale à,

$$\delta\alpha/\delta s = -2\nabla_\perp \phi \quad (121)$$

<sup>§</sup>A 2 dimensions la fenêtre carrée de l'espace réel s'écrit en espace de Fourier,  $W(k) = 2J_1(k)/k$

où  $\phi$  est le potentiel de la lentille et le gradient est pris dans le plan orthogonal à la trajectoire des photons. Quand on regarde des objets lointains ces déflexions induisent des déplacements des positions apparentes des objets d'arrière plan. Le déplacement apparent dépend des différentes longueurs qui interviennent dans le banc optique. Il en résulte que la position apparente d'un objet  $\alpha^I$  (dans le plan dit image) est liée à sa position réelle dans le plan source  $\alpha^S$  par,

$$\alpha^I = \alpha^S + \xi(\alpha^I) \quad (122)$$

avec

$$\xi(\alpha^I) = -2 \frac{D_{LS}}{D_{OS} D_{OL}} \nabla_{\alpha} \Phi. \quad (123)$$

où  $D_{LS}$ ,  $D_{OS}$  et  $D_{OL}$  sont respectivement les distances angulaires entre la lentille et les sources, l'observateur et les sources et l'observateur et la lentille. D'autre part  $\nabla_{\alpha} \Phi$  est la dérivée angulaire du potentiel projeté  $\Phi$ .

Cependant le champ de déplacement n'est pas une observable directe (sauf dans les cas d'images multiples). Un objet (faiblement) étendu comme une galaxie va être non seulement déplacé mais aussi déformé. La matrice de déformation est donnée par la matrice 2x2 des dérivées secondes du champ de déplacement,

$$\mathcal{A} \equiv \xi_{i,j} = \delta_{ij} - 2 \frac{D_{LS}}{D_{OS} D_{OL}} \Phi_{,ij}. \quad (124)$$

On voit que la matrice  $\mathcal{A}$  est une matrice symétrique. On l'écrit en général,

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix}. \quad (125)$$

La trace de la matrice donne la convergence  $\kappa$ , les autres composantes donnent le cisaillement. On va avoir des lignes critiques (et des images multiples) quand  $\det \mathcal{A} \rightarrow 0$ .

## 2. Les observables

Pour chaque galaxie on peut définir une matrice de forme,  $\mathcal{S}$ , à partir de la distribution de lumière de cette galaxie. La matrice de forme d'une galaxie d'arrière-plan telle qu'elle peut être mesurée dans le plan Image peut être reliée à celle qu'on aurait obtenue en l'absence de lentilles. Chaque galaxie d'arrière plan permet donc une estimation de la matrice de distorsion, (mais normalisée de telle sorte que son déterminant vaut 1) donnant accès à la distorsion réduite,  $\mathbf{g} = \frac{\gamma}{1-\kappa}$ . Cependant une galaxie d'arrière-plan seule ne permet pas de faire une mesure (sauf cas d'arcs critiques ou quasi-critiques). Il faut moyenner un certain nombre de galaxies d'arrière-plan en supposant que les ellipticités intrinsèques des galaxies sont distribuées de manière aléatoire et indépendante. Cette mesure est évidemment affectée d'un bruit qui dépend de l'ellipticité intrinsèque des galaxies d'arrière-plan. Cependant la densité numérique de galaxies dans

les champs profonds est telle que même les grandes structures de l'Univers induisent des effets mesurables [41]. On peut de plus démontrer que le champ de convergence peut se reconstruire à l'aide simplement de la distorsion réduite [42,43].

## 3. Variance et skewness de la convergence locale

Dans un contexte cosmologique la convergence locale est donnée par l'ensemble des concentrations de masse sur les lignes de visée. Ainsi  $\kappa$  dans la direction  $\alpha$  est donnée par (dans le cas d'une lentille mince ou par linéarisation) [44],

$$\kappa(\alpha) = \frac{3}{2} \Omega_0 \int dz_s n(z_s) \times \int d\chi \frac{D(z, z_s) D(z)}{D(z_s)} \delta_{\text{masse}}(\chi, \alpha) (1 + z(\chi)) \quad (126)$$

où  $z_s$  est le redshift des sources, et  $n(z_s)$  leur distribution en redshift (normalisée à l'unité),  $\chi$  est la distance radiale et  $D$  les distances angulaires qui interviennent (exprimées en unités  $c/H_0$ ). En général les 2 distances cosmologiques qui interviennent sont différentes, sauf dans le cas d'une section spatiale plane.

On voit que la convergence locale est formellement très similaire à la densité projetée dans un catalogue angulaire. La différence est qu'ici la fonction de sélection n'est pas normalisée. En utilisant l'approximation des petits angles on peut calculer les premiers moments de cette distribution.

On trouve que [45],

$$\langle \kappa_{\theta}^2 \rangle^{0.5} \approx 0.01 \sigma_8 \Omega_0^{0.75} z_s^{0.75} \left( \frac{\theta}{1 \text{ deg}} \right)^{-(n+2)/2}, \quad (127)$$

et

$$s_3(\theta) \equiv \frac{\langle \kappa_{\theta}^3 \rangle}{\langle \kappa_{\theta}^2 \rangle^2} = 40 \Omega_0^{-0.8} z_s^{-1.35}. \quad (128)$$

Il est sans doute utile de faire un certain nombre de commentaires,

- La variance dépend non seulement de l'amplitude des fluctuations (caractérisée par  $\sigma_8$ ) mais aussi de  $\Omega_0$ .
- La skewness est indépendante de l'amplitude des fluctuations (comme on s'y attend pour des conditions initiales Gaussiennes), mais dépend de  $\Omega_0$ . La mesure conjointe de la variance et de  $s_3$  est nécessaire pour lever la dégénérescence entre  $\sigma_8$  et  $\Omega_0$ .
- Ces deux quantités dépendent de la distribution en redshift de la population de galaxies sources utilisée pour faire les mesures.

Les premières détections d'effets de distorsions gravitationnelles par les grandes structures ont été annoncées récemment [46] et démontrent la faisabilité de ce type d'observations. Les observateurs ont ainsi montré que les erreurs systématiques pouvaient être maîtrisées à un niveau suffisamment bas pour que le signal cosmologique attendu soit mesurable. Les premières analyses des résultats montrent que le signal observé est en accord avec les contraintes obtenues par le comptage d'amas de galaxies. Il confirme en particulier qu'un modèle CDM standard n'est pas viable s'il est normalisé avec les résultats de COBE.

Ce n'est cependant que la première étape d'une campagne d'observations. Les résultats publiés ne concernent que 2 ou 3 degrés carrés alors que près d'une dizaine de degrés carrés ont déjà été observés avec la qualité d'images requise et que dans les prochaines années une centaine, voir près d'un millier, de degrés carrés devraient être cartographiés.

C'est donc véritablement une nouvelle fenêtre observationnelle qui est en train de s'ouvrir. D'un point de vue théorique les recherches actuelles anticipent l'exploitation scientifique de ces données, éventuellement au travers d'analyse croisée de catalogues (voir Sect. VD). Cela dit une grande part de recherches actuelles concerne l'étude des erreurs systématiques possibles (projet Descart [47] dirigés Y. Mellier). Parmi celles-ci on peut noter,

- les couplages non-linéaires des lentilles entre-elles en cas de lentilles multiples (effet non inclu dans l'eq. (126));
- l'existence de couplages observationnels supplémentaires dus en particulier à l'effet d'amplification qui peut changer la population d'objets sélectionnés;
- les effets de clustering des galaxies sources [48].

Ces sources d'erreur affectent la robustesse de l'interprétation cosmologique des cartes produites. A cela il faut encore ajouter une bonne détermination des redshifts des sources, mais aussi s'assurer que les cartes produites ont bien une origine cosmologique, autrement dit que la qualité optique instrumentale, le suivi du télescope, etc, permettent bien la réalisation de cartes fiables. C'est, à ce jour, là que portent les efforts les plus importants.

#### D. Les effets de lentille sur le fond diffus cosmologique

Les lentilles gravitationnelles, en déformant les images d'arrière-plan peuvent aussi avoir un effet sur les propriétés des cartes de température ou de polarisation du Fond de Rayonnement Cosmologique [49]. Il s'agit moins ici de regarder les propriétés des grandes structures à l'origine de ces déformations que d'examiner les propriétés nouvelles induites sur ces cartes, que ce soit

l'apparition de fonctions de corrélation d'ordre élevé [50], la déformation des pics [51], ou de modes nouveaux de polarisation [52–54].

## VI. VERS LE RÉGIME FORTEMENT NON-LINÉAIRE

La théorie des perturbations ne saurait faire de prédictions analytiques qu'à des échelles suffisamment grandes, correspondant au régime quasi-linéaire. Pourtant bon nombre des observables qui ont été évoquées sondent en grande partie le régime non-linéaire. Il est donc indispensable d'avoir, sinon une théorie complète, du moins des éléments pour comprendre le régime fortement non-linéaire.

### A. Données expérimentales

Les données expérimentales suggèrent que la hiérarchie obtenue avec la théorie des perturbations se prolonge dans le régime non-linéaire. C'est particulièrement vrai dans l'espace des redshifts (voir la figure 11).

Par exemple on sait que la fonction de corrélation à trois points des galaxies peut se décrire par le produit de paires de fonctions de corrélation à deux points [55], i.e.,

$$\xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = Q [\xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\xi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) + \text{sym.}] \quad (129)$$

où  $Q$  est de l'ordre de l'unité. Dans le cas de la théorie des perturbations  $Q$  est en fait une fonction sans dimension des angles et des distances entre points. Cette dépendance semble disparaître au profit de cette forme plus simple dans le régime non-linéaire. Des tentatives ont été faites pour mesurer des fonctions de corrélation d'ordre plus élevé mais cela devient très ardu à cause des dépendances géométriques.

Existe-t-il une explication naturelle à ces propriétés?

### B. Les solutions auto-similaires

On aborde ici un régime qui est très non-linéaire et une description avec un fluide avec un seul flot serait donc inadaptée. Il faut revenir à l'équation qui décrit l'évolution de la densité dans l'espace des phases, Eq. (8). On peut facilement montrer qu'il existe une famille de solutions possibles dites auto-similaires qui ont la dépendance en temps suivante [56],

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = t^{-3\beta} \hat{f}(\mathbf{x}/t^\alpha, \mathbf{p}/t^\beta) \quad (130)$$

où les deux constantes satisfont,

$$\beta = \alpha + 1/3. \quad (131)$$

Cette relation s'obtient en réécrivant l'équation (8) avec le changement de variable  $\mathbf{u} = \mathbf{x}/t^\alpha$  et  $\mathbf{v} = \mathbf{p}/t^\beta$ . C'est la condition pour que la dépendance en temps se



factorise. Il est important de remarquer qu'alors les fonctions de corrélation ne sont fonctions que de  $\mathbf{u}$ : elles ne dépendent plus explicitement du temps.

On donne ici les relations de similarité pour le cas d'un Univers Einstein-de Sitter. Il existe des formes similaires pour le cas d'un univers ouvert dans la limite  $\Omega \ll 1$  [57]. On a vu que la virialisation des objets entraînait un découplage de leur dynamique par rapport à l'expansion générale. Cette propriété se retrouve au niveau de la fonction de corrélation à deux points. On s'attend en effet à ce que cette fonction tende simplement à s'opposer directement à l'expansion lorsqu'elle devient grande. Le nombre de voisins d'un objet donné doit en effet rester constant dès que l'on se trouve au sein d'un objet très compact, en équilibre gravitationnel (comme une galaxie...). Dans la limite non-linéaire ( $\xi_2(r) \gg 1$ ), la densité au voisinage d'un point s'écrit,

$$\rho'(\mathbf{x}) = \bar{\rho}(t) \xi_2(x, t). \quad (132)$$

Il faut alors que  $\xi(x, t)$  se comporte comme  $a^3$  à une distance réelle constante pour compenser les effets de dilution causés par l'expansion, soit,

$$\xi_2(x, t) \sim a^3 \hat{\xi}(ax). \quad (133)$$

On peut généraliser cette idée aux fonctions de corrélation de plus grand ordre et on obtient naturellement,

$$\xi_p(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p, t) \sim a^{3(p-1)} \hat{\xi}_p(a \mathbf{x}_1, \dots, a \mathbf{x}_p). \quad (134)$$

Si on combine ces lois de conservation qui traduisent les hypothèses de corrélation stable avec la forme générale attendue pour les solutions auto-similaires, on obtient des lois d'échelle pour ces fonctions de corrélation,

$$\xi_2(\lambda x, t) = \lambda^{-\gamma} \xi_2(x, t) \quad (135)$$

$$\xi_p(\lambda \mathbf{x}_1, \dots, \lambda \mathbf{x}_p, t) = \lambda^{-(p-1)\gamma} \xi_p(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p, t) \quad (136)$$

où  $\gamma$  est lié à l'exposant  $\alpha$  par

$$\gamma = 6/(2 + 3\alpha). \quad (137)$$

Il suffit pour cela d'écrire que  $a^3 \hat{\xi}(ax) = \hat{\xi}(x/t^\alpha)$ . De plus si on suppose que la solution auto-similaire est toujours valable, du régime linéaire au régime non-linéaire, (ce qui stricto sensu implique le spectre de puissance initial suit une loi de puissance), alors on peut relier l'exposant  $\gamma$  à  $n$  [56],

$$\hat{\xi}\left(\frac{x}{t^\alpha}\right) = x^{-(n+3)} t^{4/3} \quad (138)$$

soit

$$\alpha = \frac{4}{3} \frac{1}{n+3}, \quad \gamma = \frac{9+3n}{5+n}. \quad (139)$$

Cette relation est numériquement assez bien vérifiée (e.g. [58]) et elle traduit une propriété importante qui est que la dépendance spatiale de la fonction de corrélation non-linéaire doit pouvoir se reconstruire à partir du spectre initial.

### C. La transformée linéaire-nonlinéaire à la Hamilton et al.

Cette idée a été exploitée à son maximum par Hamilton et collaborateurs [58] qui ont montré qu'il existait une relation, au moins à peu près universelle, qui reliait la fonction de corrélation linéaire à la fonction de corrélation non-linéaire. Pour écrire cette relation il faut écrire une espèce de relation de conservation de la matière,

$$r^3 (1 + \xi(r, t)) = \text{Cste} \quad (140)$$

alors  $\xi(r, t)$  est une fonction de  $\xi_{\text{linéaire}}$  au point  $r_l$  de l'espace réel auquel on a

$$r_l^3 = r^3 (1 + \xi(r, t)). \quad (141)$$

Dans le régime linéaire, quand  $\xi$  est petit,  $r_l$  et  $r$  sont évidemment confondus, mais ce n'est plus le cas par la suite. L'idée vérifiée dans cette étude est qu'il existe une fonction  $\mathcal{H}$  (une simple fonction, non une fonctionnelle) telle que,

$$\xi(r, t) = \mathcal{H} \left[ \xi_{\text{linéaire}}(r_l, a_{\text{initial}}) \frac{a^2(t)}{a^2(t_{\text{initial}})} \right]. \quad (142)$$

Cette idée a été plus récemment abondamment reprise pour obtenir des transformées plus précises, et valables pour toutes les cosmologies, s'appliquant à  $P(k)$  [59].

### D. Les modèles hiérarchiques

La transformée précédente donne une description phénoménologique du comportement de la fonction à deux points (ou de manière équivalente du spectre de puissance), mais évidemment cela ne constitue pas une description complète du champ non-linéaire.

#### 1. Décomposition en arbres des fonctions de corrélation

Un moyen de réaliser 'à la main' les propriétés d'échelle (136) est de supposer que la fonction de corrélation à l'ordre  $p$  s'écrit comme des produits de  $p-1$  fonctions de corrélation à deux points. C'est d'ailleurs, comme on l'a vu, un moyen assez juste de décrire la fonction de corrélation à 3 points.

Cela revient à dire que,

$$\xi_p(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p) = \sum_{\text{config. } \alpha} Q_{p,\alpha} \prod_{\text{liens, } (ij)} \xi_2(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j), \quad (143)$$

où les configurations sur lesquelles cette somme est faite correspondent à toutes les manières possibles de connecter  $p$  points ensemble avec des diagrammes en arbre, les liens sont l'ensemble des lignes qui apparaissent entre 2 points  $(i, j)$ .

## 2. Contraintes sur les $Q_{p,\alpha}$

Un des problèmes auquel on est confronté quand on veut construire explicitement de tels modèles hiérarchiques est qu'on n'est pas libre de prendre les paramètres  $Q_{p,\alpha}$  qu'on veut. Il y a des conditions de positivité qui donnent un certain nombre de contraintes. Par exemple il faut que la fluctuation du nombre de voisins d'un point donné soit positive. Quand  $\xi$  est grand, le nombre moyen de voisins dans un volume  $V$  est essentiellement  $nV\bar{\xi}$ , si la densité de point est  $n$ , tandis que le nombre moyen carré est donné par la fonction de corrélation à trois points moyennée,

$$\langle N_v \rangle \approx nV\bar{\xi} \quad (144)$$

$$\langle N_v^2 \rangle \approx n^2 V^2 \bar{\xi}_3. \quad (145)$$

Si on écrit que  $\langle N_v^2 \rangle - \langle N_v \rangle^2$  est positif on obtient,

$$Q_3 > \frac{1}{3}. \quad (146)$$

On peut généraliser ce genre de contraintes et obtenir des conditions sur l'ensemble des  $Q_{p,\alpha}$  [60], mais ce ne sera toujours que des conditions nécessaires et non suffisantes. Autrement dit on est jamais sûr que le modèle qu'on choisit est réalisable par un processus aléatoire quelconque. Et aucun modèle explicite connu, par exemple un modèle de fractale comme celui donné par les points occupés par une marche aléatoire de Rayleigh-Levy [11], ne donne de modèle réaliste.

## 3. Les modèles

A priori les coefficients  $Q_{p,\alpha}$  peuvent dépendre tout aussi bien de l'ordre  $p$  que de la géométrie  $\alpha$  de l'arbre. Différentes hypothèses ont été explorées dans la littérature. De nombreuses analyses ont été faites en supposant que les paramètres  $Q$  ne dépendent que de  $p$  [31] mais dans la suite je vais plutôt suivre les hypothèses de Bernardeau & Schaeffer [23]. Pour réduire le nombre de paramètres on peut faire l'hypothèse que les paramètres  $Q_{p,\alpha}$  s'écrivent comme des produits de vertex  $\nu_p$ , un facteur  $\nu_p$  par vertex qui apparaît dans la représentation diagrammatique de la fonction à  $p$ -points (voir un exemple sur la Fig. 16),

$$Q_p^{(\alpha)} = \prod_{\text{vertices}} \nu_q. \quad (147)$$

Alors toutes des fonctions de corrélation peuvent être construites à partir de la fonction de corrélation à 2 points et de la fonction génératrice des vertex  $\mathcal{G}$ . Elle est notée de cette façon par analogie avec les résultats de la théorie des perturbations. La fonction  $\mathcal{G}_\delta$  de la théorie des perturbations peut guider notre choix (c'est d'ailleurs un choix assez judicieux) mais il n'y a a priori aucune raison de penser que ces fonctions soient identiques.

## E. Les probabilités de comptage

Pour calculer les probabilités de comptage on a besoin de connaître la fonction génératrice des cumulants. Il est facile de voir que la relation d'échelle (143) induit des propriétés dites hiérarchiques entre les moyennes géométriques\*\* des fonctions de corrélation,  $\bar{\xi}_p(R)$ , dans des boîtes de rayon  $R$ ,

$$\bar{\xi}_p(R) \sim S_p \bar{\xi}^{p-1}(R), \quad (148)$$

où  $S_p$  sont des paramètres indépendants de  $R$ . On définit alors la fonction  $\varphi$  comme la fonction génératrice des paramètres  $S_p$  de la même manière que pour le cas perturbatif,

$$\varphi(y) = \sum_{p=1}^{\infty} -S_p \frac{(-y)^{p-1}}{p!}. \quad (149)$$

La relation entre les  $S_p$  et les  $\nu_p$  n'est la même que celle donnée dans le cadre des calculs perturbatifs que dans une approximation de type champ moyen (qui est très bien vérifiée). L'hypothèse de comportement hiérarchique implique que la fonction génératrice  $\varphi$  est indépendante de  $\sigma$  du moins quand celui-ci est grand (on a vu que la théorie des perturbations permettait de calculer la limite  $\sigma \rightarrow 0$  de cette quantité). Dans une longue étude Balian & Schaeffer [25] ont examiné les propriétés génériques induites par une telle hypothèse sur les propriétés des probabilités de comptage.

### 1. Propriétés génériques de la distribution de densité

On sait que la fonction de probabilité de densité est reliée à la fonction génératrice  $\varphi(y)$  à travers la transformée de Laplace inverse,

$$p(\delta)d\delta = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dy}{2\pi i \sigma^2} \exp \left[ -\frac{\varphi(y)}{\sigma^2} + \frac{y\delta}{\sigma^2} \right] d\delta. \quad (150)$$

Dans la suite je ne vais pas regarder les effets discrets, mais supposer qu'on travaille dans la limite continue (on peut de toute manière retrouver les expressions des probabilités de comptage par simple convolution avec une distribution de Poisson). La difficulté maintenant est de trouver des contraintes sur  $\varphi(y)$ . Cette fonction est loin de pouvoir prendre une forme arbitraire: il faut que toutes les quantités physiques qu'on peut considérer et calculer avec cette fonction aient un sens.

Un cas particulier important est la probabilité de vide  $P(0)$ , probabilité de ne trouver aucun objet dans un volume de rayon  $R$  si le champ de densité est décrit par des particules de densité  $n$ . Cette probabilité est donnée par

---

\*\*les moyennes géométriques des fonctions de corrélation s'identifient naturellement avec les cumulants de la distribution de densité filtrée dans cette même boîte

$$P(0) = \int d\delta p(\delta) \exp[-nV(1+\delta)], \quad (151)$$

$$V = \frac{4\pi}{3} R^3. \quad (152)$$

En utilisant (150) on obtient une expression qui s'intègre directement sur  $\delta$  et qui donne,

$$P(0) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dy}{2\pi i} \frac{1}{y - nV\sigma^2} \exp\left[-\frac{\varphi(y)}{\sigma^2}\right]. \quad (153)$$

Finalement,  $P(0)$  est donné par la valeur du résidu et s'exprime simplement en fonction de la fonction génératrice  $\varphi(y)$  [61,25]

$$P(0) = \exp\left(-nV \frac{\varphi(y)}{y}\right), \quad y \equiv nV\sigma^2. \quad (154)$$

Cette expression<sup>††</sup> montre en tout cas que  $\varphi(y)/y$  doit être fini et positif pour des valeurs arbitrairement grandes de  $y$ . Il est alors naturel de supposer que,

$$\varphi(y) \sim a y^{1-\omega} \quad y \gg 1, \quad (155)$$

avec  $0 < \omega < 1$ . Les valeurs de  $y$  positif correspondent à une série alternée pour  $\varphi$ . Par contre quand  $y$  est négatif tous les termes de la série ont le même signe et il n'y a pas de raison que  $\varphi(y)$  converge toujours. On note  $y_s$  la plus petite (en valeur absolue) valeur de  $y$  où  $\varphi(y)$  est singulier, et on peut paramétriser la forme de  $\varphi(y)$  par,

$$\varphi(y) - \varphi_s \sim a_s (y - y_s)^{\omega_s}. \quad (156)$$

Avec ces hypothèses on peut entreprendre le calcul de  $p(\delta)$ . Il apparaît deux régimes, l'un correspondant aux régions plutôt sous-denses, l'autre aux régions sur-denses. Ici je vais m'intéresser exclusivement au deuxième. Il s'obtient on supposant que  $y$  ne prend que des valeurs finies ou petites ce qui permet de développer une partie des termes sous l'exponentielle et d'avoir,

$$p(\delta)d\delta = - \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dy}{2\pi i \sigma^4} \frac{\varphi(y)}{\sigma^2} \exp\left[\frac{y\delta}{\sigma^2}\right] d\delta. \quad (157)$$

On voit que la fonction de distribution peut s'exprimer en fonction d'une unique intégrale,  $h(x)$ ,

$$p(\delta)d\delta = \frac{d\delta}{\sigma^2} h\left(\frac{\delta}{\sigma^2}\right); \quad (158)$$

$$h(x) = - \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dy}{2\pi i} \varphi(y) \exp(yx). \quad (159)$$

Les propriétés de  $\varphi(y)$  induisent les propriétés suivantes pour  $h(x)$ ,

<sup>††</sup>On retrouve le cas Poissonien quand  $\varphi(y) = y$ , c'est à dire quand on a annulé toutes les fonctions de corrélation

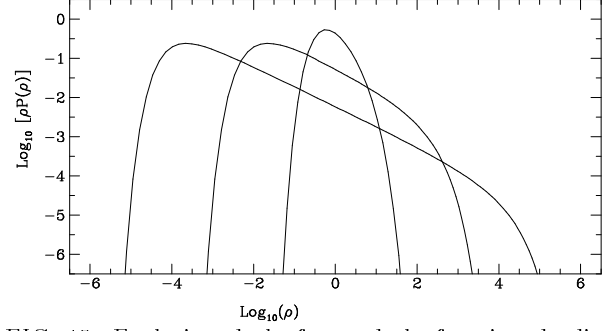


FIG. 15. Evolution de la forme de la fonction de distribution de probabilité de la densité locale en fonction de la variance. Les cas  $\sigma = 1, 10$  et  $100$  ont été tracés pour des cumulants correspondant à  $n = -2$ .

$$h(x) = a \frac{1-\omega}{\Gamma(\omega)} x^{\omega-2}, \quad x \ll 1 \quad (160)$$

$$h(x) = -\frac{a_s}{\Gamma(-\omega_s)} x^{-\omega_s-1} \exp(y_s x), \quad x \gg 1 \quad (161)$$

On voit donc que la fonction  $h(x)$  (et par là même la fonction  $p(\delta)$ ) est construite par assemblage d'une loi de puissance quand  $x$  est petit, et d'une coupure exponentielle à grand  $x$  (voir figure 15).

Il y a bien sûr une part d'arbitraire dans ce résultat (existence et forme de la singularité pour  $\varphi(y)$ , ...), aussi il est intéressant de voir ce qui peut être construit de manière générique.

On a vu que dans le cas de la théorie des perturbations,  $\varphi(y)$  pouvait être construite à partir d'une fonction génératrice de vertex,  $\mathcal{G}(\tau)$ . Le comportement asymptotique de  $\varphi(y)$  est lié au comportement asymptotique de  $\mathcal{G}(\tau)$  pour  $\tau$  positif. Plus spécifiquement si

$$\mathcal{G}(\tau) \sim c \tau^{-\kappa} \quad (162)$$

alors

$$\omega = \frac{\kappa}{\kappa+2}, \quad (163)$$

$$(1-\omega)a = \kappa^{-\omega} e^{1-\omega}. \quad (164)$$

Par exemple pour  $\mathcal{G}$  obtenu à partir de l'effondrement sphérique on a  $\kappa = 3/2$ , ce qui donne  $\omega = 3/7 \approx 0.43$ .

L'hypothèse d'une composition en arbres se révèle très féconde pour la partie singulière de  $\varphi(y)$ . En effet l'équation implicite en  $\tau$  induit très naturellement une singularité en  $\varphi$  sans faire d'hypothèse particulière sur  $\mathcal{G}(\tau)$ . Ce point singulier est donné par la solution du système,

$$y_s = -\frac{1}{\mathcal{G}''(\tau_s)}, \quad (165)$$

$$\tau_s = \frac{\mathcal{G}'(\tau_s)}{\mathcal{G}''(\tau_s)}. \quad (166)$$

Alors on a

$$\varphi(y) - \varphi_s \sim \frac{2}{3} (y - y_s)^{3/2} \times \quad (167)$$

$$\mathcal{G}'(\tau_s) \mathcal{G}''(\tau_s) \left( \frac{2\mathcal{G}'(\tau_s) \mathcal{G}''(\tau_s)}{\mathcal{G}'''(\tau_s)} \right)^{1/2}.$$

Dans le cas du modèle de théorie des perturbations cette singularité semble en effet jouer un rôle actif. On a vu dans la section précédente quelles étaient les valeurs décrivant cette singularité en fonction de l'indice spectral.

Ces modèles ont permis de donner un regard nouveau sur le problème de la prédiction des fonctions de luminosité observées. Des travaux complémentaires ont suivi les premiers essais dans ce sens [62].

## 2. La théorie des perturbations 'étendue'

Quel modèle pour  $\varphi(y)$ ? Au delà du régime quasi-linéaire une idée est de suivre au plus près le modèle suggéré par la théorie des perturbations. Formellement on peut voir la forme fonctionnelle de  $\varphi(y)$  comme étant paramétrée par l'indice spectral  $n$ . On peut donc 'oublier' la signification physique de ce paramètre et le supposer libre pour voir s'il est possible de l'ajuster pour décrire les résultats numériques, aussi bien au niveau des paramètres  $S_p$  que de la forme des  $P(N)$ . Ce travail a été mené à bien par Colombi et collaborateurs [63]. L'idée de départ est la suivante: les mesures des premiers  $S_p$  fournissent une estimation de  $n_{\text{eff}}$ , en supposant que

$$S_p(n_{\text{eff}}) \equiv S_p^{\text{mesuré}}. \quad (168)$$

Le résultat remarquable qui a été obtenu est que les  $n_{\text{eff}}$ , ainsi mesurés ne dépendent pas (ou peu) de l'ordre  $p$  (pour un spectre initial de forme donnée). La description des moments ou des formes des probabilités de comptage à l'aide d'un simple indice effectif est prometteuse mais ne contient pas de justification théorique. Une tentative dans ce sens a été menée récemment par Scoccimarro & Frieman [10] avec la théorie dite HEPT, qui donne une recette explicite permettant de prédire l'amplitude de fonction de corrélation dans le régime non-linéaire à partir de leurs amplitudes dans la théorie quasi-linéaire.

## VII. DISTRIBUTION DE MATIÈRE ET DISTRIBUTION DE LUMIÈRE: VERS UNE THÉORIE UNIFIÉE

### A. Principe, modèles

En dernier lieu, par l'étude des grandes structures on aimerait obtenir une description complète des objets présents dans l'Univers, en particulier des propriétés de corrélation des puits de potentiel qui se sont créés. Les propriétés de ces objets sont implicitement contenues dans la description des fonctions de corrélation, aussi compliquées qu'aient pu être leurs histoires (effets de marée, accréation, ...). Potentiellement on doit donc pouvoir faire beaucoup mieux qu'avec des théories à la Press et Schechter [64] qui requièrent des hypothèses drastiques sur la dynamique.

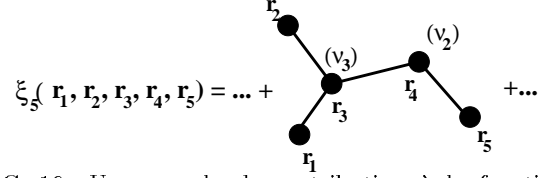


FIG. 16. Un exemple de contribution à la fonction de corrélation à 5 points. Le terme représenté sur la figure s'écrit,  $\xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3)\nu_3(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_3)\xi(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_2)\xi(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_3)\nu_2(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4, \mathbf{r}_5 - \mathbf{r}_4)\xi(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_5)$ , avec la convention  $\nu_1 = 1$ . Il a 3 vertex avec 1 ligne externe, chacun d'eux ayant le poids  $\nu_1$ , 1 vertex avec 2 lignes externes avec le poids  $\nu_2$  et 1 vertex avec 3 lignes externes avec le poids  $\nu_3$ . Chaque lien est pondéré par un facteur  $\xi$ . Ces poids dépendent a priori des labels  $\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_5$  attachés aux vertex. Dans le cas du modèle minimal les vertex  $\nu_2, \nu_3, \dots$  sont indépendants des positions; sinon ils doivent être des fonctions homogènes des distances des points auxquels ils sont connectés.

La mise en œuvre de ces calculs est cependant assez complexe. L'identification mathématique d'un puits de potentiel est loin d'être aisée. Cependant le régime non-linéaire présente une situation assez favorable: les objets que l'on recherche ont des contrastes en densité très grands et leur définition ne doit dépendre que très peu du critère de sélection utilisé. En fait on va supposer que la simple probabilité d'avoir localement un contraste en densité suffisamment grand suffit à caractériser la présence d'un objet.

En conséquence de quoi la fonction  $h(x)$  doit donner la forme de la distribution de masse d'objets de taille donnée. Leurs propriétés de corrélation seront données par les probabilités de comptage conjointes, à deux points si on veut la fonction de corrélation à deux points, à 3 points si on veut celle à 3 points, etc...

L'hypothèse d'une décomposition en arbres est encore extrêmement féconde pour explorer les propriétés de ces probabilités conjointes. Cependant pour spécifier complètement notre modèle il ne suffit pas de se donner une fonction génératrice de vertex, il faut aussi préciser si ces vertex ont une dépendance géométrique intrinsèque (comme dans le cas du régime quasilinear) ou pas (comme le suggèrent les résultats obtenus dans le régime non-linéaire).

On appelle *modèle minimal* le cas où les vertex sont des nombres purs, indépendants de paramètres géométriques liés aux lignes qui lui sont connectées, voir Fig. 16. S'il est utile de faire une telle hypothèse pour obtenir des résultats quantitatifs, il n'en reste pas moins vrai qu'un certain nombre de résultats généraux peuvent être obtenus sans faire cette hypothèse.

### B. Décompositions en arbres pour les distributions de densité conjointes

On considère un grand volume  $V$  qui contient  $P$  cellules, labellées par  $i = 1 \dots Q$ , de volume  $v_i$ , respectivement. Le but est alors de calculer la distribution

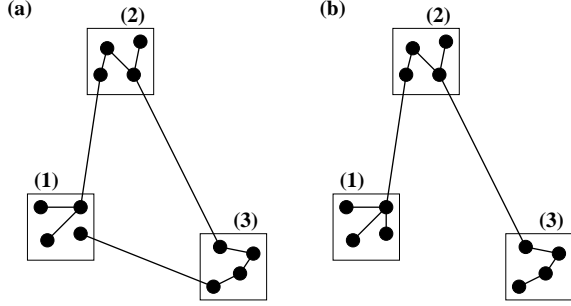


FIG. 17. Deux exemples de contribution à la somme  $\chi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  qui fait intervenir le même nombre de points dans chacune des cellules. La première (a) crée une boucle entre les cellules bien que ce soit un arbre au niveau des points de matière. La deuxième (b) est un arbre même au niveau des cellules. La rapport entre ces deux contributions est de l'ordre de  $\xi_{13}/\bar{\xi}(v)$  (où  $\bar{\xi}(v)$  est la valeur moyenne de la fonction de corrélation à deux point dans le volume  $v$  d'une cellule.) Dans tous les cas correspondant à des régions surdenses, les contributions avec des boucles seront alors négligeables par rapport à celles avec des arbres.

de masse conjointe,  $p(m_1, \dots, m_Q) dm_1 \dots dm_Q$ , probabilité que les  $Q$  cellules contiennent respectivement les masses  $m_1 \dots m_Q$ . On suppose alors que cette distribution de masse conjointe représente la fonction de distribution conjointe des halos.

Cette fonction de probabilité est donnée d'une certaine manière par une combinaison de moyennes de fonctions de corrélation du champ de matière reliant des points dans chacune des cellules,

$$p(N_1, \dots, N_{\mathcal{N}}) = \frac{1}{(2\pi i)^{\mathcal{N}}} \oint \prod_{i=1}^{\mathcal{N}} \frac{d\lambda_i}{\lambda_i^{N_i+1}} \chi(\lambda_1, \dots, \lambda_{\mathcal{N}}), \quad (169)$$

où la fonction génératrice de ces moyennes est donnée par  $\chi(\lambda_1, \dots, \lambda_Q)$  qui généralise de manière évidente celle à 1 point. Si on examine les contributions dominantes, on s'aperçoit facilement que certaines configurations d'arbres vont être dominantes. En effet les configurations qui induisent des boucles entre les boîtes sont a priori sous dominantes d'un facteur  $\xi_{ij}/\bar{\xi}$  (voir Fig. 17), et donc négligeable si on ignore les effets de courte distance.

La propriété centrale sur laquelle on peut s'appuyer est que ces contributions dominantes peuvent se ré-écrire comme des sommes en arbres de vertex "habillés",  $\chi_Q$ , joignant chacune des cellules, où les  $\chi_Q$  sont des sommes d'arbres avec  $Q$  pattes externes 'libres' (voir Figs. 18). Notre problème se trouve finalement réduit à la recherche d'une série de fonctions, les  $\chi_Q$ .

### C. Le calcul du biais 'dynamique'

Illustrons cette propriété par le calcul de la distribution à deux points  $p(\delta_1, \delta_2)$ , probabilité d'avoir la densité  $\delta_1$  et

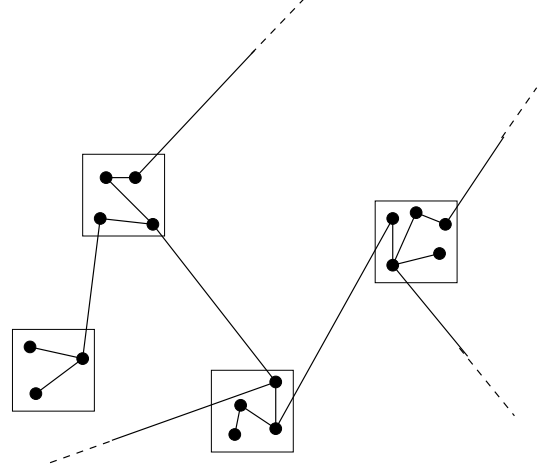


FIG. 18. Décomposition de la somme  $\chi(\lambda_1, \dots, \lambda_I)$  en produits de fonctions  $\chi_Q(\lambda_i)$ . Le terme qui apparaît sur la figure contient 4 cellules avec le produit  $\chi_1(\lambda_1)\xi_{12}\chi_3(\lambda_2)\xi_{2j_1}\xi_{23}\chi_3(\lambda_3)\xi_{3j_2}\xi_{34}\chi_3(\lambda_4)\xi_{4j_3}\xi_{4j_4} \dots$ . Les lignes externes sont connectées aux autres cellules du volume  $V$  (avec les indices  $j_1, j_2, j_3$  and  $j_4$ ).

la densité  $\delta_2$  conjointement en deux points aux positions  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$ . Cela nous donnera un modèle de biais naturel d'origine dynamique [23].

Pour obtenir une telle distribution il faut calculer la fonction génératrice  $\varphi(y_1, y_2)$  des cumulants conjoints pris en deux points distincts. Plus précisément on peut définir  $S_{pq}$  par

$$\langle \delta_R^p(\mathbf{x}_1) \delta_R^q(\mathbf{x}_2) \rangle_c = S_{pq} \langle \delta_R^2 \rangle^{p+q-2} \langle \delta_R(\mathbf{x}_1) \delta_R(\mathbf{x}_2) \rangle. \quad (170)$$

Cette relation définit des paramètres finis  $S_{pq}$  dans la limite où la distance  $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$  est beaucoup plus grande que l'échelle de filtrage  $R$ . A partir de là on définit la fonction génératrice double,

$$\varphi(y_1, y_2) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} S_{pq} \frac{(-y_1)^{p-1}}{p!} \frac{(-y_2)^{q-1}}{q!}. \quad (171)$$

en ayant posé,

$$S_{p0} = S_p, \quad S_{00} = 0. \quad (172)$$

La décomposition en arbres implique, d'après ce qui a été dit précédemment, que les facteurs  $S_{pq}$  ont en plus une propriété de factorabilité, c'est à dire que,

$$S_{pq} = S_{p1} S_{q1} \text{ pour } p \geq 1 \text{ et } q \geq 1. \quad (173)$$

La fonction  $\chi_1$  fonction génératrice des vertex à une patte externe, est bien la fonction génératrice des paramètres  $S_{p1}$  (si on l'exprime à l'aide de la variable  $y$ ),

$$\chi_1(y) = \frac{1}{\bar{\xi}(v)} \sum_{p=1}^{\infty} S_{p1} \frac{(-y)^{p-1}}{p!}. \quad (174)$$

Dans le cas du modèle minimal,  $\chi_1$  s'identifie en fait à  $\tau(y)/\bar{\xi}(v)$  quand celui-ci est solution du système donnant  $\varphi(y)$ . Cette relation fonctionnelle est extrêmement intéressante mais dépend de manière explicite de l'hypothèse de décomposition *minimale* en arbres des fonctions de corrélation.

Si on utilise la relation (174) on peut exprimer la probabilité conjointe  $p(\delta_1, \delta_2)$  qui va prendre la forme,

$$p(\delta_1, \delta_2) = \frac{1}{\sigma^8} h(x_1) h(x_2) [1 + b(x_1) b(x_2) \xi_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] \quad (175)$$

en fonction de  $\varphi^{(1)}(y) \equiv \bar{\xi}\chi_1(\lambda)$  fonction de  $y$  seulement,

$$h(x) b(x) = - \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dy}{2\pi i} \varphi^{(1)}(y) \exp(xy). \quad (176)$$

Autrement dit les régions les plus denses continuent à suivre une loi hiérarchique. Le facteur  $b(x)$  s'identifie au facteur de biais entre les pics. Cela implique que le biais est a priori une fonction de  $x \equiv \delta/\sigma^2$  uniquement (et pas de  $\delta$  par exemple). La forme de  $b(x)$  n'est pas indépendante des paramètres des modèles. Cependant la singularité qui apparaît naturellement pour  $\varphi(y)$  induit un comportement spécifique pour  $b(x)$ ,

$$b(x) \sim x \text{ quand } x \gg 1. \quad (177)$$

Le résultat générique (vrai en général et pas seulement pour le modèle minimal) est donc que le biais croît avec la rareté. Ce résultat obtenu à partir d'une description aussi réaliste que possible du régime non-linéaire prolonge d'une certaine manière les calculs de Bardeen et al. [65] menés dans un champ Gaussien. La principale conséquence de ces calculs est qu'a priori les puits de potentiel qui se forment sont effectivement biaisés.

## D. Le biais pour les corrélations multi-points

Les considérations précédentes peuvent être généralisées au calcul des probabilités conjointes avec un nombre arbitraire de cellules, en supposant toujours que leurs distances relatives sont plus grandes que leur taille. En général, pour un nombre donné de cellules la partie connexe de la distribution de masse conjointe suit une construction en arbre. En effet on peut montrer que (voir [66] pour une présentation détaillée de ces calculs),

$$\xi_Q(m_1, \mathbf{r}_1; \dots; m_Q, \mathbf{r}_Q) = \sum_{\text{arbres}(\alpha)} Q_Q^{(\alpha)}(m_1, \mathbf{r}_1; \dots; m_Q, \mathbf{r}_Q) \prod_{\text{liens}} \xi_2(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j). \quad (178)$$

avec la même structure que dans l'équation (143). Les paramètres de normalisation  $Q^{(\alpha)}$  sont des fonctions homogènes de la géométrie des cellules  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_Q$ , et dépendent des masses  $m_1, \dots, m_Q$  attribuées à chaque boîte. Pour chaque arbre particulier connectant les  $Q$  boîtes,  $Q_Q^{(\alpha)}$  est obtenu comme un produit

$$Q^{(\alpha)}(m_1, \mathbf{r}_1; \dots; m_Q, \mathbf{r}_Q) = \prod \frac{p^{(Q)}(m_i, \mathbf{r}_{s_1} - \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_{s_Q} - \mathbf{r}_i)}{p(m_i)}. \quad (179)$$

Cette forme de  $Q$  définit un vertex "effectif"  $\nu$ ,

$$\nu_Q(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}, \dots, \mathbf{r}_Q - \mathbf{r}) = \frac{p^{(Q)}(m, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}, \dots, \mathbf{r}_Q - \mathbf{r})}{p(m)}. \quad (180)$$

Le vertex associé à la boîte de label  $(i)$  dépend de la masse  $m_i$  et éventuellement de la géométrie des lignes externes qui apparaissent dans la représentation en arbre.

Les fonctions  $p^{(Q)}(m)$  sont reliées aux propriétés des fonctions de corrélation de la matière. Plus spécifiquement ces fonctions sont engendrées par la série  $S_p^{(Q)}$ , définie par,

$$S_p^{(Q)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}, \dots, \mathbf{r}_Q - \mathbf{r}) = \frac{1}{\bar{\xi}^{p-1}} \frac{1}{\xi_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}) \dots \xi_2(\mathbf{r}_Q, \mathbf{r})} \times \int_v \xi_{p+Q}(\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_p, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_Q) \frac{d^3\mathbf{r}'_1}{v} \dots \frac{d^3\mathbf{r}'_p}{v}. \quad (181)$$

Dans le cas du modèle minimal, les paramètres sont des nombres purs qui ne dépendent pas de la taille des cellules, ni de la géométrie des lignes externes. Le calcul des fonctions  $p^{(Q)}(m)$  est basé sur le même principe que pour  $p(m)$  et  $p^{(1)}(m)$ ,

$$p^{(Q)}(m) dm = - \frac{dm}{\bar{\xi} m_c} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dy}{2\pi i} \varphi^{(Q)}(y) e^{xy}, \quad (182)$$

avec

$$\varphi^{(Q)}(y) = - \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p S_p^{(Q)} \frac{y^p}{p!}. \quad (183)$$

Comme cela peut être vu en comparant (147) and (179), les paramètres habillés  $Q^{(\alpha)}$  peuvent être écrits comme des produits de vertex donnés par,

$$\nu_Q(x) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} dy \varphi^{(Q)}(y) e^{xy} / \int_{-i\infty}^{+i\infty} dy \varphi(y) e^{xy}. \quad (184)$$

Nous avons évidemment  $\nu_0(x) = 1$  et  $\nu_1(x) = b(x)$ . Les fonctions de corrélation des objets sont donc construites sur une structure en arbre similaire à celle de la matière.

### 1. Les fonctions de corrélation des halos

Les fonctions de corrélation des halos sont complètement déterminées par les paramètres,  $\nu_Q(x)$  (Eq. [184]). Ces derniers sont déterminés par les  $S_p^{(Q)}$  (Eq. [181]) qui dépendent des vertex des fonctions de corrélation de la matière.

Elles dépendent plus précisément de moyennes sur les vertex élémentaires  $\nu_q$ , situés en  $\mathbf{r}$  dans  $V$ , avec  $q$  lignes

externes, desquels  $Q$  se terminent dans  $V$  (loin de  $\mathbf{r}$ ),  $q - Q$  se terminent directement dans la boîte centrée sur  $\mathbf{r}$ ,

$$\begin{aligned} \nu_{q,Q} &= \int_V \frac{d^3\mathbf{r}}{V} \frac{d^3\mathbf{r}_1}{V} \dots \frac{d^3\mathbf{r}_Q}{V} \int_v \frac{d^3\mathbf{r}_{Q+1}}{v} \dots \frac{d^3\mathbf{r}_q}{v} \\ &\times \nu_q(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}, \dots, \mathbf{r}_Q - \mathbf{r}, \mathbf{r}_{Q+1} - \mathbf{r}, \dots, \mathbf{r}_q - \mathbf{r}) \\ &\times \frac{\xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r})}{\bar{\xi}(V)} \dots \frac{\xi(\mathbf{r}_Q, \mathbf{r})}{\bar{\xi}(V)} \frac{\xi(\mathbf{r}_{Q+1}, \mathbf{r})}{\bar{\xi}(v)} \dots \frac{\xi(\mathbf{r}_q, \mathbf{r})}{\bar{\xi}(v)}. \end{aligned} \quad (185)$$

Dans les modèles en arbres  $\nu_{q,Q}$  est un paramètre indépendant de la taille des volumes  $v$  et  $V$ . Dans le cas du modèle minimal en arbre, on obtient  $\nu_{q,Q} = \nu_q$ . Ces paramètres définissent une fonction de 2 variables,

$$\zeta(\tau, \theta) = \sum_{q,Q} \nu_{q,Q} \frac{(-1)^{q-Q} \tau^{q-Q}}{(q-Q)!} \frac{(-1)^Q \theta^Q}{Q!}. \quad (186)$$

Pour le modèle minimal,  $\zeta(\tau, \theta)$  est une fonction de  $\tau + \theta$  seulement,

$$\zeta^{\text{minimal}}(\tau, \theta) = \zeta(\tau + \theta). \quad (187)$$

En général les informations nécessaires à la reconstruction des fonctions de corrélation aux grands ordres sont encodées dans  $\zeta(\tau, \theta)$ .

De leur côté les corrélations entre halos sont paramétrisées par des  $\nu_Q(x)$  qui définissent une fonction génératrice,

$$\zeta(x, \theta) = \sum_{Q=0}^{\infty} (-1)^Q \nu_Q(x) \frac{\theta^Q}{Q!}. \quad (188)$$

En conséquence de quoi, les halos du champ de densité de paramètre d'échelle  $x$  ont des corrélations données par  $\zeta(x, \theta)$  au sens donné par (143, 147). La fonction  $\zeta(x, \theta)$  (dont le calcul ne sera pas explicité ici, voir [66]) peut s'écrire en fonction de  $h(x, \theta)$ , au travers de,

$$\zeta(x, \theta) = \frac{h(x, \theta)}{h(x)}. \quad (189)$$

La fonction  $h(x, \theta)$  généralise la fonction  $h(x)$  avec une dépendance supplémentaire avec  $\theta$  qui exprime les effets de l'environnement. On a,

$$h(x, \theta) = - \int_{-1}^{+1} \frac{dy}{2\pi i} \varphi(y, \theta) e^{xy}, \quad (190)$$

$$\varphi(y, \theta) = y\zeta(\tau, \theta) - \frac{1}{2} y\tau \frac{\partial \zeta}{\partial \tau}(\tau, \theta), \quad (191)$$

$$\tau = -y \frac{\partial \zeta}{\partial \tau}(\tau, \theta). \quad (192)$$

On note que, comme  $\zeta(\tau, \theta = 0) = \zeta(\tau)$ , on a  $\varphi(y, \theta = 0) = \varphi(y)$  et  $h(x, \theta = 0) = h(x)$  (ce qui justifie cette notation).

Les équations (188-192) donnent la relation

$$\varphi(y, \theta) = \sum_Q (-1)^Q \varphi^{(Q)}(y) \frac{\theta^Q}{Q!}, \quad (193)$$

entre  $\varphi^{(Q)}(y)$  et les vertex  $\nu_{q,Q}$  qui sont déduits des corrélations du champ de matière comme une relation entre  $\varphi^{(Q)}(y)$  et  $\zeta(\tau, \theta)$ .

A partir de  $\varphi(y, \theta)$ , il est alors possible de déduire  $\zeta(x, \theta)$ . Le développement de  $\varphi(y, \theta)$  en puissance de  $\theta$  définit les paramètres  $S_Q(x)$ . Par exemple il est facile de voir que

$$\varphi^{(1)}(y) = y \frac{\partial \zeta}{\partial \theta}(\tau, \theta)|_{\theta=0}, \quad (194)$$

qui s'identifie (à un facteur  $\bar{\xi}$  près) à la fonction génératrice des arbres avec une patte externe.

## 2. La limite des halos rares

Notons que les seuls paramètres qui peuvent être mesurés directement sont les vertex réduits,  $\tilde{\nu}_Q(x)$ , définis par

$$\tilde{\nu}_Q(x) = \frac{\nu_Q(x)}{b^Q(x)}. \quad (195)$$

Leur fonction génératrice,

$$\tilde{\zeta}(x, \theta) = 1 - \theta + \tilde{\nu}_2 \frac{\theta^2}{2} - \tilde{\nu}_3 \frac{\theta^3}{3!} + \dots \quad (196)$$

est reliée à  $\zeta(x, \theta)$  par,

$$\tilde{\zeta}(x, \theta) = \zeta(x, \theta/b(x)). \quad (197)$$

Avec la seule hypothèse que  $\zeta(\tau, \theta)$  est régulière sans singularité anormale<sup>††</sup>, le comportement général à grand  $x$  peut être calculé. On trouve que [66],

$$\begin{aligned} h(x) &\propto x^{-5/2} e^{-x/x_*}, \quad x_* \approx 5 \sim 10 \\ b(x) &\propto x \\ \tilde{\nu}_Q(x) &\rightarrow 1 \quad \text{quel que soit } Q \text{ et } S_P(x) \rightarrow P^{P-2} \\ \zeta(x, \theta) &\sim e^{-\theta b(x)} \\ \tilde{\zeta}(x, \theta) &\sim e^{-\theta}, \end{aligned} \quad (198)$$

quand  $x \gg 1$ . Remarquons que cette limite concerne les objets complètement non-linéaires, mais est valable à toutes les échelles, (linéaires ou nonlinéaires).

## 3. Résultats pour le modèle minimal

Le modèle minimal, de part sa simplicité, est très attrayant. Dans cette hypothèse le calcul des corrélations peut être mener explicitement. Dans ce cas, les dérivées successives de  $\varphi(y, \theta)$  par rapport à  $\theta$  donnent,

<sup>††</sup>i.e. autre que celle donné par l'équation implicite en  $\tau$  dans (166).

$$\varphi^{(1)}(y) = t(y, \theta)|_{\theta=0} \quad (199)$$

$$\varphi^{(Q)}(y) = \frac{d^{Q-1}}{d\theta^{Q-1}} t(y, \theta)|_{\theta=0}, \quad (200)$$

où

$$t(y) \equiv \tau(y, \theta) + \theta = \theta - y\zeta'(t). \quad (201)$$

Il en résulte que [23,66,67],

$$\varphi^{(1)}(y) = \tau(y); \quad (202)$$

$$\varphi^{(2)}(y) = -\frac{y\zeta''}{1+y\zeta''}; \quad (203)$$

$$\varphi^{(3)}(y) = -\frac{y\zeta'''}{(1+y\zeta'')^3}; \quad (204)$$

$$\varphi^{(4)}(y) = \frac{3(y\zeta''')^2}{(1+y\zeta'')^5} - \frac{y\zeta^{(4)}}{(1+y\zeta'')^4}, \quad (205)$$

où les dérivées se font par rapport à  $t$ , maintenant simplement relié à  $y$  à travers (201) avec  $\theta = 0$ ,  $t = -y\zeta'(t)$ .

### E. Modèles hiérarchiques et modèles en arbres, commentaires

Les résultats présentés ici sont basés sur des hypothèses spécifiques sur les corrélations du champ de matière. Comme différents niveaux d'hypothèses ont été employés il est utile de préciser les niveaux de résultats obtenus.

Remarquons que l'hypothèse hiérarchique simple (au sens uniquement des Eqs. (135, 136)) implique que,

- les halos sont corrélés de manière hiérarchique avec la même dépendance spatiale que les fonctions de corrélation de la matière;
- l'amplitude des fonctions de corrélations ne dépend que du paramètre réduit,  $x = m/m_c$ .

Le modèle hiérarchique *en arbre* implique en plus que

- les corrélations des halos suivent aussi une structure en arbre;
- leur amplitude a une forme spécifique (Eq. [198]) dans la limite des événements rares.

Enfin le modèle hiérarchique en arbre minimal implique de même que les halos soient corrélés de manière minimal. Il permet aussi de faire des prédictions quantitative spécifiques.

### F. Les conséquences observationnelles

Décrire les conséquences observationnelles est une tâche délicate. Il faut pouvoir identifier les halos décrits ici par la variable réduite  $x$  avec des objets astrophysiques décrits par leur luminosité, que ce soit optique ou X ou

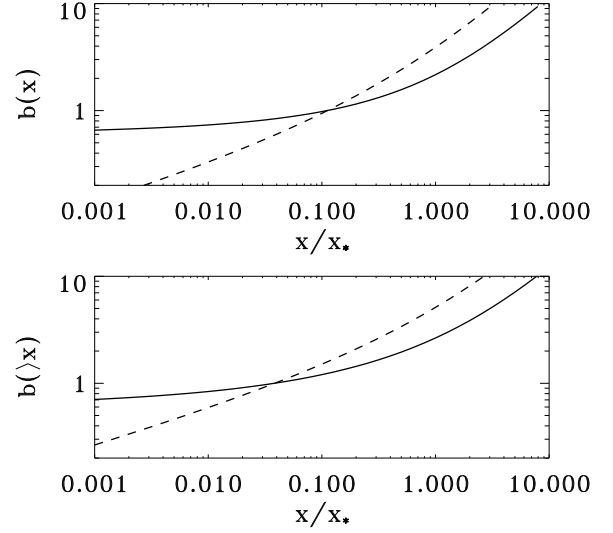


FIG. 19. Fonction de biais en fonction du paramètre réduit  $x$ . Les lignes en tirets correspondent au modèle minimal, et les lignes continues à un modèle alternatif (voir [66]). Dans le panneau du haut le biais est donné en fonction de  $x$ , dans celui de bas avec une condition de seuil sur  $x$ .

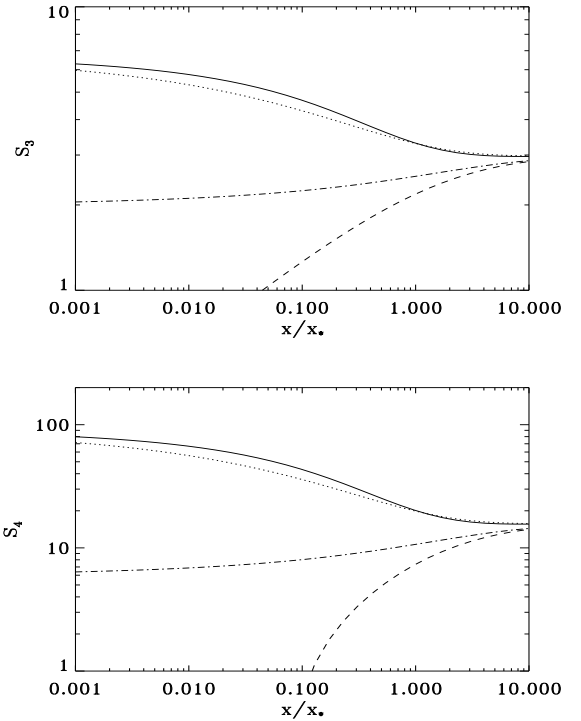


FIG. 20. L'amplitude des fonctions à 3 et 4 points, exprimées avec les paramètres  $S_3 \equiv 3Q_3$ , et  $S_4$  en fonction de  $x$ . Les lignes en tirets donnent  $S_3(x)$  et  $S_4(x)$  pour le modèle minimal et les lignes en tirets-pointillés donnent  $S_3(> x)$  et  $S_4(> x)$ . Les autres courbes sont pour un modèle alternatif.



par des propriétés plus dynamiques comme des dispersions de vitesse pour les amas de galaxies. Cette identification est loin d'être facile. On peut cependant remarquer que la plus grande partie de la masse de l'Univers, à une échelle donnée, est dans des objets dont le paramètre réduit est de l'ordre de  $x_*$ .

L'amplitude de la fonction de corrélation à 2 points pour des objets de paramètre réduit  $x_1$  et  $x_2$  est donnée par

$$\xi_2(x_1, x_2, r) = b(x_1)b(x_2) \xi_2(r). \quad (206)$$

Les résultats numériques montrent que  $b(x)$  est une fonction monotone et croissante de  $x$  avec un taux de variation plus faible pour les faibles valeurs de  $x$  (voir Fig. 19). C'est qualitativement un comportement qui est effectivement présent dans les données observationnelles [68]. Notons aussi la propriété générale de factorisation des facteurs de biais. C'est une conséquence des structures en arbres trouvées pour les fonctions de corrélation qui permettent d'écrire aussi bien des fonctions d'autocorrélation que des corrélations croisées.

Les amplitudes des fonctions d'ordre supérieur sont décrites par les paramètres  $S_p(x)$ . Les paramètres  $S_3$  et  $S_4$  sont donnés sur la Fig. 20. On peut voir qu'ils sont essentiellement finis et que leur convergence vers leur valeur asymptotique se fait assez rapidement dès que  $x > x_*$ . Notons que ces résultats sont valables aussi bien pour des distances entre objets dans le régime non-linéaire que dans le régime quasi-linéaire. C'est peut-être le début d'une explication pour les observations décrites dans les sections précédentes et qui ne seraient donc que lointainement reliés à la théorie des perturbations.

Quoi qu'il en soit ces résultats montrent que même en l'absence de mécanismes non-gravitationnels il est possible d'avoir des effets de biais. Il faudrait, pour avoir des prédictions qualitatives solides, connaître les solutions explicites du régime non-linéaire.

## VIII. CONCLUSIONS, PERSPECTIVES

La théorie des perturbations a permis de faire des prédictions aussi bien qualitatives que quantitatives sur l'émergence de propriétés non-Gaussiennes liées à la nature non-linéaire de la dynamique gravitationnelle.

Si les outils empruntés à la physique théorique ont été un apport très fructueux dans ce sujet, il n'en reste pas moins que l'étude de la formation des grandes structures de l'Univers recèle toujours un certain nombre de problèmes ouverts. Ainsi,

- La théorie des perturbations est loin d'avoir livré tous ses secrets. En particulier il serait extrêmement utile de comprendre les corrections en boucles.
- De nombreux aspects du régime non-linéaire ne sont pas compris. Par exemple on ne sait pas décrire la transition vers le régime multiflots qui

conduit à la virialisation de la matière dans les puits de potentiel. Il serait aussi très intéressant de pouvoir exhiber une solution explicite des équations dynamiques dans le régime non-linéaire (ne serait-ce qu'une forme asymptotique).

- L'exploitation des catalogues tridimensionnels ou bidimensionnels notamment avec la mise en évidence de propriétés non-Gaussiennes n'est pas encore optimale. La question se pose par exemple pour les cartes de distorsions gravitationnelles.

Les recherches que je mène actuellement m'ont plutôt conduit vers l'étude de différents aspects de la phénoménologie des effets de lentilles gravitationnelles.

Les investigations théoriques liées aux mesures d'effets de distorsions gravitationnelles faibles ne sont pas achevées. En particulier les modèles développés pour décrire le régime non-linéaire de la dynamique gravitationnelle ont commencé à être appliqués à ce type d'observations [69]. Il reste cependant des aspects qui n'ont pas encore été complètement explorés. Par exemple l'effet des corrélations intrinsèques des sources sur les mesures n'a été regardé que d'un point de vue de théorie des perturbations [48]. L'enjeu est véritablement de déterminer les limites réelles de ce type d'observations pour contraindre les paramètres cosmologiques. Ces recherches font l'objets de collaborations nombreuses dans le cadre du projet Descart [47].

Ces investigations m'ont aussi conduit à rechercher des effets de lentilles gravitationnelles dans d'autres situations. Ainsi le fond diffus cosmologique offre un terrain d'étude original. C'est en fait le plan source le plus distant qu'on puisse envisager (donc sur lequel les effets de distorsion ont la plus grande amplitude), et les lentilles y impriment des signatures spécifiques notamment dans le champ de polarisation. Nous avons même envisagés de corréler des cartes du fond diffus avec des cartes de distorsions faibles [54]. Ce projet devrait être intégré au programme scientifique du satellite Planck Surveyor [70].

Au delà de nouvelles contraintes sur les paramètres cosmologiques ces recherches visent à tester le modèle standard de formation des grandes structures notamment le paradigme d'instabilité gravitationnelle. Et si les données observationnelles les plus récentes semblent favoriser des modèles de type inflationnaire au détriment des modèles avec défauts topologiques, cela ne signifie pas que les transitions de phase qui ont dû se succéder au cours du refroidissement progressif de l'Univers n'ont pas laissé de traces. La plupart des travaux sur le sujet ont porté sur le spectre de puissance des anisotropies de température [71], cependant des effets non-Gaussiens ou des effets sur les propriétés de polarisation du fond cosmologique sont attendus [53]. De plus, le développement de techniques d'imagerie profonde de plus en plus performantes ouvre de nouvelles perspectives pour la détection directe de défauts topologiques, et plus spécifiquement de cordes cosmiques, au travers de leurs effets de lentilles sur des galaxies d'arrière-plan. Dans cette optique, en collaboration avec J.-P. Uzan nous avons reconsidéré la

phénoménologie des cordes cosmiques et leurs effets de distorsions gravitationnelles [72]. Nous avons abouti au développement d'un modèle purement phénoménologique pour la distribution d'énergie des cordes, modèle dit de "Poisson", dont on pense qu'il capture les aspects essentiels de cette phénoménologie tout en permettant des investigations analytiques. Pour aller plus loin il nous a semblé important de comprendre les mécanismes de formation de défauts topologiques, notamment quand ils se forment pendant ou à l'issue d'une phase inflationnaire (scénario tout à fait plausible d'un point de vue de la physique des hautes énergies [76]). Nous nous attachons donc actuellement à décortiquer la formation de cordes cosmiques dans les modèles d'inflation hybride.

D'autres aspects liés à la physique de l'Univers primordial, et plus particulièrement à la sortie de la phase inflationnaire, sont autant de domaines de recherche en plein développement. Ainsi le passage d'un univers ultra-froid, pendant la phase d'expansion rapide, à un univers chaud thermalisé dominé par des particules ultra-relativistes n'est pas complètement élucidé. Des phénomènes hors d'équilibre, comme les mécanismes de pré-chauffage [73], sont susceptibles d'avoir eu lieu et d'avoir des conséquences importantes sur la viabilité de certains modèles, notamment dû à la surproduction de gravitinos [74]. Et le lien nécessaire entre la physique des hautes énergies et la cosmologie primordiale n'a toujours pas été fait. L'inflaton, la forme de son potentiel, comme ses couplages avec les autres champs, sont loin d'avoir été formellement identifiés [75].

L'étude des mécanismes de pré-chauffage, intimement liés à la possibilité de formation de défauts topologiques, me semble une direction de recherche fructueuse. Cela éclaire de manière tout à fait intéressante les enjeux théoriques apportés par le développement spectaculaire de la cosmologie observationnelle.

### Remerciements

A cette occasion je voudrais vivement remercier ceux qui m'ont accompagné au cours d'une dizaine d'années de recherche: R. Schaeffer d'abord parce qu'il a su me donner les outils nécessaires à mon travail, tout en me laissant explorer mes propres chemins, A. Blanchard, F. Bouchet, R. Juszkiewicz, L. Kofman qui m'ont beaucoup soutenu, S. Colombi, Y. Mellier, L. van Waerbeke, P. Valageas et J.-P. Uzan qui partagent le plaisir d'une recherche fructueuse. Il me faut aussi remercier le SPhT notamment pour le soutien qu'il apporte au développement de la cosmologie théorique, mais aussi le *Canadian Institute of Theoretical Astrophysics* et l'*Institut d'Astrophysique de Paris* et leur directeur actuel respectif, D. Bond et B. Fort, pour leur hospitalité et les rapports étroits que j'ai pu y nouer.

- [1] Lemaître, G., 1931, *Mon. Not. R. astr. Soc.* **91**, 490
- [2] Les idées de l'inflation datent de la fin des années soixante-dix avec R. Brout, F. Englert, E. Gunzig, 1978, *Ann. Phys.* **115**, 78; Starobinsky, A.A., 1979, *JETP Lett.* **30**, 682; Starobinsky, A.A., 1980, *Phys. Lett.* **91B**, 99; Guth, A.H., (1981) *Phys. Rev. D* **23** 347; Linde, A. D., 1983, *Phys. Lett.* **129B**, 11; plus récemment voir la revue de Liddle, A. R. and Lyth, D. H. (1993) *Phys. Rept.*, **231** 1-105
- [3] Sahni, V., Coles, P., 1995, *Phys. Rep.* **262**, 1
- [4] Peebles, J., 1982, *Astrophys. J. Lett.* **263**, L1; Blumenthal, G. R., Faber, S., Primack, J.R., Rees, M.J., 1984, *Nature* **311**, 517
- [5] H. J. de Vega, N. Sanchez, astro-ph/0101568; astro-ph/0101567
- [6] Lahav, O., Lilje, P.B., Primack, J.R., Rees, M., 1991, *Mon. Not. R. astr. Soc.* **251**, 128
- [7] Pichon, C., Bernardeau F., 1999, *Astr. & Astrophys.* **343**, 663
- [8] Goroff, M.H., Grinstein, B., Rey, S.-J., Wise, M.B., 1986, *Astrophys. J.* **311**, 6
- [9] Bernardeau, F., 1992, *Astrophys. J.* **292**, 1
- [10] Scoccimarro, R., Frieman, J., 1999, *Astrophys. J.* **520**, 35
- [11] Peebles, P.J.E. 1980; *The Large-Scale Structure of the Universe*; Princeton University Press, Princeton, N.J., USA;
- [12] Juszkiewicz, R., Bouchet, F.R., Colombi, S. 1993, *Astrophys. J.* **412**, L9
- [13] Bernardeau, F., 1994, *Astrophys. J.* **433**, 1
- [14] Bouchet, F., Juszkiewicz, R., Colombi, S., Pellat, R., 1992, *Astrophys. J.* **394**, L5
- [15] Juszkiewicz, R., Weinberg, D. H., Amsterdamski, P., Chodorowski, M., Bouchet, F., 1995, *Astrophys. J.* **442**, 39
- [16] Bernardeau, F., Kofman, L., 1995, *Astrophys. J.* **443**, 479
- [17] Fry, J., 1984, *Astrophys. J.* **279**, 499
- [18] Lokas, E., Juszkiewicz, R., Weinberg, D.H., Bouchet, F.R., 1995, *Mon. Not. R. astr. Soc.* **274**, 730
- [19] Bernardeau, F., 1994, *Astrophys. J.* **427**, 51
- [20] Bernardeau, F., 1994, *Astr. & Astrophys.* **291**, 697
- [21] Des Cloiseaux, J., Jannink, G., 1987, *Les polymères en solution*, Les éditions de physique, Les Ulis, France.
- [22] Schaeffer, 1984, *Astr. & Astrophys.* **134**, L15
- [23] Bernardeau, F., Schaeffer, R., 1992, *Astr. & Astrophys.* **255**, 1
- [24] Baugh, C.M., Gaztañaga, E., Efstathiou, G., 1994, *Mon. Not. R. astr. Soc.* **274**, 1049
- [25] Balian, R., Schaeffer, R., 1989 *Astr. & Astrophys.* **220**, 1
- [26] Couchman H.M.P., 1991, *Astrophys. J. Lett.* **368**, L23
- [27] Makino, N, Sasaki, M., Suto, Y., 1992 *Phys. Rev. D* **46**, 585; Scoccimarro, R. 1997, *Astrophys. J.* **487**, 1; Scoccimarro, R., Frieman, J., 1996, *Astrophys. J.* **473**, 620; Lokas, E., Juszkiewicz, R., Bouchet, F.R., Hivon, E., 1996, *Astrophys. J.* **467**, 1; Scoccimarro, R., Colombi, S., Fry, J.N., Frieman, J.A. Hivon, E., Mellot, A., 1998, *Astrophys. J.* **496**, 586
- [28] Bouchet, F., Strauss, M.A., Davis, M., Fisher, K.B., Yahil, A., Huchra, J.P., 1993, *Astrophys. J.* **417**, 36
- [29] Hivon, E., Bouchet, F., Colombi, S., Juszkiewicz, R.,

- 1995, *Astr. & Astrophys.* **298**, 643
- [30] Gaztañaga, E., 1994, *Mon. Not. R. astr. Soc.* **268**, 913
- [31] Szapudi, I., Szalay, A. S., 1997, *Astrophys. J.* **481**, 1
- [32] Gaztañaga, E., Mähönen, 1996, *Astrophys. J.* **462**, L1
- [33] Fry, J. N., Gaztañaga, E., 1993, *Astrophys. J.* **413**, 447
- [34] Gaztañaga, E., Frieman J., 1994, *Astrophys. J.* **437**, L13
- [35] Limber, D.N., 1954, *Astrophys. J.* **119**, 655
- [36] Bernardeau, F., 1995, *Astr. & Astrophys.* **301**, 309
- [37] Gaztañaga, E., Bernardeau, F., 1998, *Astr. & Astrophys.* **331**, 829
- [38] Dekel, A., 1994, *Annual Review of Astr. & Astrophys.* **32**, 371
- [39] Bernardeau, F., Juszkiewicz, R., Dekel, A., Bouchet, F., 1995, *Mon. Not. R. astr. Soc.* **274**, 20; Bernardeau, F., Van de Weygaert, R., 1996, *Mon. Not. R. astr. Soc.* **279**, 693; Bernardeau, F., Van de Weygaert, R., Hivon, E. & Bouchet, F., 1997, *Mon. Not. R. astr. Soc.* **290**, 566
- [40] Misner, C.W. Thorne, K., Wheeler, J.A., 1973, *Gravitation*, San Francisco, Freeman; Schneider, P., Ehlers, J., Falco, E. E. 1992, *Gravitational Lenses*, Springer; Mellier, Y. (1999) *Annual Review of Astr. & Astrophys.* **37**, 127
- [41] Blandford, R. D., Saust, A. B., Brainerd, T. G., Villumsen, J. V., 1991, *Mon. Not. R. astr. Soc.* **251**, 600; Miralda-Escudé, J., 1991, *Astrophys. J.* **380**, 1; Kaiser, N., 1992, *Astrophys. J.* **388**, L72
- [42] Kaiser, N., 1995, *Astrophys. J.* **439**, 1; Bartelmann, M., Narayan, R., Seitz, S., Schneider, P., 1996, *Astrophys. J. Lett.* **464**, L115
- [43] van Waerbeke, L., Bernardeau, F., Mellier, Y. (1999) *Astr. & Astrophys.* **342**, 15
- [44] Sachs, R. K., 1961, *Proc. Roc. Soc. London A***264**, 309
- [45] Bernardeau, F., van Waerbeke, L., Mellier, Y., 1997, *Astr. & Astrophys.* **324**, 15
- [46] Van Waerbeke, L., Mellier, Y., Erben, T., Cuillandre, J.C., Bernardeau, F., Maoli, R., Bertin, E., Mc Cracken, H., Le Fèvre, O., Fort, B., Dantel-Fort, M., Jain, B., Schneider, P., 2000, *Astr. & Astrophys.* **358**, 30; Kaiser, N., Wilson, G., Luppino, G.A., 2000, astro-ph/0003338; Bacon, D., Réfrégier, A., Ellis, R., 2000, *Mon. Not. R. astr. Soc.* **318**, 625; Wittman, D.M., Tyson, J.A., Kirkman, D., Dell'Antonio, I., Bernstein, G., 2000, *Nature*, 405, 143. Voir aussi le communiqué de presse sur <http://cdsweb.u-strasbg.fr:2001/News/Lensing/> correspondant à la première référence.
- [47] Description et état d'avancement du projet scientifique Descart sur <http://terapix.iap.fr/Descart/>
- [48] Bernardeau, F. 1998a, *Astr. & Astrophys.* **338**, 375
- [49] Blanchard, A., Schneider, J. (1987) *Astr. & Astrophys.* **184**, 1; Seljak, U. (1996) *Astrophys. J.* **463**, 1
- [50] Bernardeau, F., 1997, *Astr. & Astrophys.* **324**, 15; Zaldarriaga, M., *Phys. Rev. D* **62**, 063510 (2000); Hu W., *Phys. Rev. D* **62**, 043007 (2000)
- [51] Bernardeau, F., 1998, *Astr. & Astrophys.* **338**, 767; Van Waerbeke, L., Bernardeau, F., Benabed, K., astro-ph/9910366.
- [52] Zaldarriaga, M., Seljak, U., 1998, *Phys. Rev. D* **58** 023003
- [53] Benabed, K., Bernardeau, F., *Phys. Rev. D* **61**, 123510 (2000)
- [54] Benabed, K., Bernardeau, F., Van Waerbeke, L., *Phys. Rev. D* **63**, 043501 (2001)
- [55] Groth, E., Peebles, P.J.E., 1977, *Astrophys. J.* **217**, 385
- [56] Davis, M., Peebles, P.J.E., 1977, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **34**, 425
- [57] Balian, R., Schaeffer, R., 1988, *Astrophys. J.* **335**, L43
- [58] Hamilton, A.J.S., Kumar, P., Lu, E., Matthews, A., 1991, *Astrophys. J.* **374**, L1
- [59] Peacock, J. A., Dodds, S. J., 1994, *Mon. Not. R. astr. Soc.* **267**, 1020; Jain, B, Mo, H. J., White, S. D. M., 1995, *Mon. Not. R. astr. Soc.* **276**, 25
- [60] Fry, J., 1984, *Astrophys. J.* **277**, L5
- [61] White, S.D.M., 1979, *Mon. Not. R. astr. Soc.* **186**, 145
- [62] Bernardeau, F., Schaeffer, R., 1991, *Astr. & Astrophys.* **250**, 23; Valageas, P., Schaeffer, R., 1999, *Astr. & Astrophys.* **345**, 329; Valageas, P., Schaeffer, R., 2000, *Astr. & Astrophys.* **359**, 821
- [63] Colombi, S., Bernardeau, F., Bouchet, F.R., Hernquist, L., 1997, *Mon. Not. R. astr. Soc.* **287**, 241
- [64] Press, W.H. Schechter, P., 1974 *Astrophys. J.* **28**, 19
- [65] Bardeen, J. M., Bond, J. R., Kaiser, N., Zsalay, A. S., 1986, *Astrophys. J.* **304**, 15
- [66] Bernardeau, F., Schaeffer, R., 1999, *Astr. & Astrophys.* **349**, 697
- [67] Munshi, D, Coles, P. Melott, A. L., 1999, *Mon. Not. R. astr. Soc.* **307**, 387
- [68] Benoist, C., Cappi, A., Da Costa, L. N., Maurogordato, S., Bouchet, F. R., Schaeffer, R., 1999, *Astrophys. J.* **514**, 563
- [69] Hui L., 1999, *Astrophys. J.* **519**, 9; Munshi, D., Coles, P., 2000, *Mon. Not. R. astr. Soc.* **313**, 148; Munshi, D., Jain, B., 2001, *Mon. Not. R. astr. Soc.* **322**, 107; Bernardeau, F., Valageas, P., 2000, *Astr. & Astrophys.* **364**, 1
- [70] <http://astro.estec.esa.nl/SA-general/Projects/Planck/>
- [71] Albrecht, A., Battye, R.A., Robinson, J., 1997, *Phys. Rev. Lett.*, **79**, 4736; Uzan, J.-P., Deruelle, N., Riazuelo, A., astro-ph/9810313; Bouchet, F., Peter, P., Riazuelo A., Sakellariadou, M., astro-ph/0005022; Albrecht, A., astro-ph/0009129
- [72] Uzan J.-P. & Bernardeau F., *Phys. Rev. D* **63**, 023004 (2001); Bernardeau F. & Uzan J.-P., *Phys. Rev. D* **63**, 023004 (2001)
- [73] Kofman, L., Linde, A., Starobinsky A., 1997, *Phys. Rev. D* **56** 3258; Garcia-Bellido, J., Linde, A., 1998, *Phys. Rev. D* **57** 6075; Green, P. B., Kofman, L., 1999, *Phys. Lett.* **B448**, 6
- [74] Kallosh, R., Kofman, L., Linde, A., Van Proeyen, A., *Phys. Rev. D***61** (2000) 103503, M. Lemoine, *Phys. Rev. D***60** (1999) 103522
- [75] Voir la revue de Lyth, D. H., Riotto, A. (1999) *Phys. Rept.*, **314** 1-146
- [76] Binetruy, P., Deffayet, C., Dudas, E., Ramond, P., 1998, *Phys. Lett.* **B441**, 163; Binetruy, P., Deffayet, C., Peter, P., 1998, *Phys. Lett.* **B441**, 52; Jeannerot, R., 1999, *Phys. Rev. D* **56** 6205; Tkachev, I., Khlebnikov, S., Kofman, L., Linde, A., 1998, *Phys. Lett.* **B440**, 262