

Mécanique quantique relativiste

Notes de cours du DEA Champs, particules, matière
et du Magistère interuniversitaire de physique 2^{ème} année,
année universitaire 1998-99.

par

Jean-Yves Ollitrault

Service de physique théorique, CEA-Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette cedex

et

L.P.T.P.E case 127, Université P. et M. Curie, 75252 Paris cedex 05

2 décembre 1998

A l'origine de ces notes, un premier cours donné au laboratoire Subatech de l'Ecole des mines de Nantes, au printemps 97; suivi d'un second, plus détaillé, à l'automne 98, enseignement commun au DEA Champs, particules, matière (Universités Paris 6, 7, 11) et à la deuxième année du Magistère interuniversitaire (pareillement) de physique.

Il s'agit d'une introduction à la mécanique quantique relativiste. Le formalisme a été réduit au minimum, afin d'arriver le plus vite possible à des calculs de processus physiques élémentaires. En particulier, la seconde quantification et la théorie des champs ne sont pas abordées : elles sont la suite logique de ce cours.

Le lecteur est supposé connaître la mécanique analytique (lagrangien, hamiltonien), la mécanique quantique non relativiste, et des rudiments de relativité restreinte. Les trois premiers chapitres rappellent des notions connues, dans une formulation adaptée à notre sujet. Les trois chapitres suivants traitent de la mécanique quantique relativiste d'une particule, de spin 0, 1/2 ou 1. Enfin, le dernier chapitre aborde de façon heuristique les processus à plusieurs particules, qui ne peuvent être traités rigoureusement que dans le cadre de la théorie des champs.

La plupart des chapitres sont suivis d'exercices et de problèmes, non corrigés mais, nous l'espérons, suffisamment détaillés pour pallier cette absence. Ils complètent le cours et le mettent en pratique.

Les ouvrages consacrés à ce sujet sont très nombreux. Ce cours s'inspire plus particulièrement de

Bjorken J.D. and Drell S. D., *Relativistic quantum mechanics*, McGraw-Hill ed. (1964),

qui va beaucoup plus loin, et de

Aitchison I.J.R. and Hey A.J.G., *Gauge theories in particle physics*, Adam Hilger ed., 2nd edition (1989),

plus élémentaire mais aussi plus moderne que le précédent.

Sommaire

Introduction	1
1 Transformation par rotation	5
1.1 Isométries	5
1.2 Scalaires, vecteurs et tenseurs	6
1.3 Représentations irréductibles	7
1.4 Spineurs	12
2 Relativité restreinte	15
2.1 Transformations de Lorentz	15
2.2 Indices contravariants et covariants	17
2.3 Cinématique des collisions	20
2.4 Equations de Maxwell	22
2.5 Force de Lorentz	24
2.6 Exercices et problèmes	26
3 Propagation des ondes	35
3.1 Position du problème	35
3.2 Transformée de Fourier	36
3.3 Choix du propagateur	36
3.4 Calcul du propagateur retardé	37
3.5 Formule des potentiels retardés	38
3.6 Propagation de l'onde libre	39
3.7 Exercices et problèmes	39
4 Particule de spin 0	43
4.1 Particule libre	43
4.2 Interprétation probabiliste	44
4.3 Couplage au champ électromagnétique	46
4.4 Diffusion par un potentiel	47
4.5 Section efficace de diffusion	51
4.6 Antiparticules	53
4.7 Perturbations d'ordre supérieur	54
4.8 Exercices et problèmes	57

5	Particule de spin 1/2	63
5.1	Particule libre	63
5.2	Covariance de l'équation de Dirac	68
5.3	Couplage au champ électromagnétique	72
5.4	Diffusion de Mott	74
5.5	Antiparticules	77
5.6	Particules de masse nulle	80
5.7	Propagateur de Dirac	81
5.8	Exercices et problèmes	82
6	Photons	91
6.1	Onde plane monochromatique	92
6.2	Calcul semi-classique	93
6.3	Interprétation probabiliste	93
6.4	Rayonnement	94
6.5	Bremsstrahlung	96
6.6	Catastrophe infrarouge	96
7	Quelques processus élémentaires	99
7.1	Diffusion de deux particules scalaires chargées	99
7.2	Variables de Mandelstam	101
7.3	Calcul de la section efficace	102
7.4	Création de paires; symétrie de croisement	104
7.5	Diffusion de particules identiques	104

Chapitre 1

Transformation par rotation

Ce premier chapitre rappelle quelques résultats bien connus sur les rotations et l'algèbre du moment cinétique. Dans le chapitre suivant, ces résultats seront généralisés aux transformations de Lorentz.

1.1 Isométries

Note préliminaire: dans tout ce cours, nous adopterons la convention suivante, qui est commode en algèbre linéaire, lorsque les quantités manipulées possèdent un ou plusieurs indices: si, dans un monôme, un indice est présent deux fois, on somme implicitement sur toutes les valeurs possibles de cet indice. Par exemple, si A , B et C désignent trois matrices carrées, telles que $C = AB$, on écrira un élément de C sous la forme $C_{ik} = A_{ij}B_{jk}$, sans indiquer la somme sur l'indice répété j . De même, la trace de A s'écrira $\text{tr}A = A_{ii}$, sans expliciter la somme sur i . Si un indice est répété plus de deux fois, c'est souvent signe d'une erreur de calcul...

Soit une transformation linéaire des coordonnées d'espace x_i ($i = 1, 2, 3$) de la forme

$$x_i \rightarrow x'_i = R_{ij}x_j. \quad (1.1)$$

En notant X le vecteur colonne de coordonnées x_i , cette équation se réécrit sous forme matricielle

$$X \rightarrow X' = RX. \quad (1.2)$$

Les isométries sont le groupe de transformations laissant inchangé le produit scalaire tXX (tX désignant le vecteur ligne transposé de X). La transformation R est une isométrie si

$${}^tXX = {}^tX'X' = {}^t(RX)RX = {}^tX({}^tRR)X \quad (1.3)$$

quel que soit X , soit si

$${}^tRR = 1. \quad (1.4)$$

En prenant le déterminant de cette équation, on obtient $(\det R)^2 = 1$, soit $\det R = \pm 1$. Les isométries de déterminant 1 sont les rotations, qui forment un sous-groupe du groupe des isométries. Les isométries de déterminant -1 s'obtiennent en multipliant les rotations par l'inversion d'espace (ou parité) qui est l'opérateur de matrice -1 .

On appelle $O(3)$ le groupe des isométries (groupe orthogonal à trois dimensions) et $SO(3)$ le sous-groupe des rotations (S pour groupe spécial, désignant les matrices de déterminant 1).

1.2 Scalaires, vecteurs et tenseurs

Nous allons maintenant étudier les différentes manières dont peuvent se transformer les quantités physiques par rotation.

1.2.1 scalaire

On appelle scalaire toute quantité invariante par rotation. L'élément de volume $d^3\vec{x}$ est un scalaire puisque $d^3\vec{x}' = |\det R| d^3\vec{x} = d^3\vec{x}$.

On dit qu'une fonction $f(\vec{x})$ (on parle aussi de champ) est scalaire si la fonction dans le nouveau système de coordonnées est telle que $f'(\vec{x}') = f(\vec{x})$. Par exemple, le potentiel électrostatique $V(\vec{x})$ est un scalaire. Notons cependant que la variation d'une fonction scalaire f dans une rotation n'est pas nulle puisque $f'(\vec{x}) \neq f(\vec{x})$. Cette variation sera étudiée dans la section 1.3.4.

1.2.2 Vecteur

En physique, le terme de vecteur ne s'applique pas à n'importe quel élément d'un espace vectoriel. Il désigne, de façon plus précise, un ensemble de trois quantités V_i qui se transforment comme les x_i par rotation:

$$V'_i = R_{ij}V_j \quad (1.5)$$

ou, sous forme matricielle:

$$V' = RV. \quad (1.6)$$

Par exemple, le potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{x})$ est un vecteur, en ce sens qu'il tourne avec le système de coordonnées: $\vec{A}'(\vec{x}') = R\vec{A}(\vec{x})$.

Un autre exemple de vecteur est l'opérateur de gradient $\vec{\nabla}$, dont les composantes se transforment suivant la loi

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_j} = R_{ji} \frac{\partial}{\partial x'_j} = ({}^tR)_{ij} \frac{\partial}{\partial x'_j}, \quad (1.7)$$

soit sous forme matricielle

$$\vec{\nabla}_{\vec{x}} = {}^tR \vec{\nabla}_{\vec{x}'}. \quad (1.8)$$

En inversant cette relation on obtient

$$\vec{\nabla}_{\vec{x}'} = {}^tR^{-1} \vec{\nabla}_{\vec{x}} = R \vec{\nabla}_{\vec{x}} \quad (1.9)$$

où nous avons utilisé la propriété ${}^tRR = 1$ qui caractérise les isométries. Cette dernière équation montre bien que le gradient se transforme comme un vecteur. Par exemple, le champ électrostatique $\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}V(\vec{x})$ est un vecteur.

1.2.3 Tenseurs de rang arbitraire

Un tenseur est une quantité à plusieurs indices, par exemple T_{ij} , qui se transforme comme un produit de vecteurs ayant les mêmes indices, V_iV_j , c'est à dire

$$T'_{ij} = R_{ik}R_{jl}T_{kl}. \quad (1.10)$$

L'opérateur de rotation pour le tenseur est donc simplement le produit des rotations agissant sur chaque indice.

Dans l'exemple précédent, il s'agit d'un tenseur à deux indices, qu'on peut écrire comme une matrice. Sous cette forme, l'équation précédente devient

$$T' = R T^t R = R T R^{-1}. \quad (1.11)$$

On reconnaît, à droite, la loi de transformation d'une matrice dans un changement de base.

Le nombre d'indices est appelé rang du tenseur (ici 2). Chaque indice pouvant prendre trois valeurs, un tenseur de rang r a 3^r composantes.

1.2.4 Tenseurs invariants

Si on prend, dans l'exemple précédent, $T_{ij} = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker, $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$), c'est à dire la matrice identité, alors $T' = T = 1$. On dit d'un tel tenseur, dont les composantes sont les mêmes dans tout système de coordonnées, qu'il est *invariant*.

Un autre exemple de tenseur invariant est le tenseur totalement antisymétrique ϵ_{ijk} , défini par son premier élément $\epsilon_{123} = 1$ et par la condition qu'il soit antisymétrique par n'importe quel échange de deux indices. Chaque indice se transformant suivant l'équation (1.5), on obtient, par définition du déterminant d'une matrice,

$$\epsilon'_{ijk} = \epsilon_{ijk} \det R. \quad (1.12)$$

Le tenseur totalement antisymétrique est donc inchangé par rotation ($\det R = 1$): il s'agit d'un tenseur invariant. Par parité, cependant, il change de signe. On parle alors de "pseudotenseur".

1.2.5 Contractions

Si V_i et W_j sont deux vecteurs, $V_i W_j$ est un tenseur de rang 2. Si on égale les deux indices i et j et si on somme sur toutes les valeurs de i , on obtient $V_i W_i$: ceci n'est autre que le produit scalaire des deux vecteurs, qui est scalaire par définition des isométries. On a donc obtenu un tenseur de rang 0 (un scalaire) à partir d'un tenseur de rang 2.

Plus généralement, lorsqu'on égale deux indices d'un tenseur de rang r et qu'on somme sur toutes les valeurs de ces indices, on obtient un tenseur de rang $r - 2$. On appelle cette opération une contraction. Par exemple, T_{ii} est un scalaire: c'est la trace de la matrice T , invariante par changement de coordonnées.

Autres exemples: la contraction de $\nabla_i V_j$ donne la divergence $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$, qui est un scalaire. Une double contraction du tenseur de rang 5 $\epsilon_{ijk} V_l W_m$ donne $\epsilon_{ijk} V_j W_k$ qui est un vecteur, le produit vectoriel de \vec{V} et \vec{W} .

1.3 Représentations irréductibles

Nous allons maintenant étudier de façon plus systématique la transformation des quantités physiques par rotation, en introduisant quelques outils de théorie des groupes.

1.3.1 Rotations infinitésimales

Une rotation R infinitésimale d'angle $\theta \ll 1$ autour de l'axe de coordonnées j effectue la transformation

$$R\vec{x} = \vec{x} + \theta\vec{e}_j \times \vec{x}, \quad (1.13)$$

soit explicitement

$$x'_k = R_{kl}x_l = x_k + \theta\epsilon_{kjl}x_l. \quad (1.14)$$

Les éléments de matrice de R sont donc donnés par

$$R_{kl} = \delta_{kl} + \theta\epsilon_{kjl}. \quad (1.15)$$

Cette matrice de rotation peut se décomposer sous la forme

$$R = 1 - i\theta J_j, \quad (1.16)$$

où J_j est une matrice 3×3 dite "générateur des rotations d'axe j ". Des deux équations précédentes, on déduit les éléments de matrice de J_j :

$$(J_j)_{kl} = -i\epsilon_{jkl}. \quad (1.17)$$

Explicitement, les matrices s'écrivent

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

Le facteur i dans la définition (1.16) peut sembler étrange, les matrices de rotation étant réelles. Il assure que J_3 est hermitique. De plus, nous verrons dans la section 1.4 que les matrices de rotation ne sont en fait pas toujours réelles.

Plus généralement, une rotation infinitésimale d'angle $\theta \ll 1$ autour d'un axe quelconque \vec{u} avec $|\vec{u}| = 1$ s'écrit

$$R = 1 - i\theta\vec{u} \cdot \vec{J}. \quad (1.19)$$

Les matrices J_i vérifient les relations de commutation

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k. \quad (1.20)$$

1.3.2 Représentations du groupe des rotations

Lorsqu'on étudie la transformation par rotation d'une quantité (tenseur, fonction d'onde...) évoluant dans un espace vectoriel \mathcal{E} , cela veut dire mathématiquement la chose suivante: à toute rotation R de $SO(3)$, on associe une application linéaire dans \mathcal{E} , qu'on notera par exemple $S(R)$, qui est l'opérateur de rotation agissant dans \mathcal{E} . Les $S(R)$ doivent vérifier les relations $S(R_1 R_2) = S(R_1)S(R_2)$, $S(R^{-1}) = S(R)^{-1}$. On dit qu'on a une *représentation* du groupe des rotations $SO(3)$ dans \mathcal{E} . Nous nous limiterons, par ailleurs, aux représentations *unitaires* telles que $S^\dagger(R)S(R) = 1$.

Les matrices $S(R)$ associées à une rotation infinitésimale R peuvent évidemment s'écrire sous la forme (1.19), où J_1 , J_2 et J_3 sont cette fois des opérateurs agissant dans \mathcal{E} , qui peut être de dimension quelconque. Le fait que $S(R)$ soit unitaire implique que les générateurs J_i sont hermitiques. Ces derniers définissent complètement la transformation

par rotation, puisqu'une rotation d'angle θ quelconque s'obtient comme le produit de N transformations infinitésimales d'angle θ/N avec $N \gg 1$:

$$S(R) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - i \frac{\theta}{N} \vec{u} \cdot \vec{J} \right)^N = \exp \left(-i\theta \vec{u} \cdot \vec{J} \right). \quad (1.21)$$

Ce qui est remarquable est que les relations (1.20) restent vraies: on montre en effet qu'elles se déduisent de la loi de composition des rotations, qui est la même par définition dans toutes les représentations. On dit que ces relations définissent l'algèbre de Lie du groupe $SO(3)$. Pour un autre groupe (par exemple $SO(N)$), le nombre de générateurs sera en général différent, mais leurs relations de commutation seront toujours de la forme (1.20), avec ϵ_{ijk} remplacé par d'autres nombres c_{ijk} qui caractérisent l'algèbre de Lie du groupe, dits *constantes de structure* du groupe.

Les relations (1.20) permettent de démontrer un certain nombre de résultats (voir cours sur le moment cinétique en mécanique quantique):

- $\vec{J}^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$ commute avec les J_i , et donc avec les matrices de rotation $S(R)$. Par conséquent, un sous-espace propre de \vec{J}^2 est stable par rotation.
- Les valeurs propres possibles de \vec{J}^2 sont de la forme $j(j+1)$ avec j entier ou demi-entier.
- Les valeurs propres possibles de J_3 dans un sous-espace propre de \vec{J}^2 sont au nombre de $2j+1$: $m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$. On notera $|j, m\rangle$ un vecteur propre associé.
- Partant d'un vecteur propre $|j, m_0\rangle$, on construit par action de $J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2$ (qui augmente m de ± 1) tous les $|j, m\rangle$ pour j donné. Ces vecteurs engendrent un sous-espace \mathcal{E}_j de dimension $2j+1$, stable par le groupe des rotations. La restriction à \mathcal{E}_j des rotations est à elle seule une représentation du groupe des rotations. Par contre, il n'existe pas de sous-espace propre de \mathcal{E}_j stable par le groupe des rotations. On dit alors qu'il s'agit d'une *représentation irréductible* de $SO(3)$. Toutes les représentations de même j sont équivalentes (c'est à dire isomorphes). Le nombre j suffit donc à caractériser les représentations irréductibles.

Prenons l'exemple des rotations agissant sur les coordonnées d'espace, étudiées dans la section 1.3.1. C'est une représentation de dimension 3. On vérifie facilement que les matrices J_i définies par les équations (1.18) vérifient $\vec{J}^2 = 2$, soit $j = 1$. La représentation est de dimension $3 = 2j+1$, ce qui signifie qu'elle est irréductible. $j = 1$ caractérisera donc la transformation d'un vecteur.

1.3.3 Retour sur la transformation des tenseurs

Une représentation de $SO(3)$ dans un espace \mathcal{E} se décompose en général en plusieurs représentations irréductibles dans des sous-espaces \mathcal{E}_j stables par rotation, dont \mathcal{E} est la somme directe. Prenons comme exemple la transformation des tenseurs de rang 2. L'espace de représentation \mathcal{E} est ici de dimension $3^2 = 9$.

L'opérateur de rotation $S(R)$ agissant sur le tenseur est ici le produit tensoriel de deux rotations agissant chacune sur un indice (voir l'équation (1.10)). Dans une rotation infinitésimale (1.19), le tenseur se transforme donc suivant l'opérateur

$$S(R) = (1 - i\theta \vec{u} \cdot \vec{J}_{(1)})(1 - i\theta \vec{u} \cdot \vec{J}_{(2)}) = 1 - i\theta \vec{u} \cdot (\vec{J}_{(1)} + \vec{J}_{(2)}) \quad (1.22)$$

en notant $\vec{J}_{(1)}$ et $\vec{J}_{(2)}$ les opérateurs \vec{J} agissant sur chaque indice.

Le générateur des rotations agissant sur les tenseurs est donc $\vec{J} = \vec{J}_{(1)} + \vec{J}_{(2)}$, somme de deux moments cinétiques qui commutent entre eux. On sait alors d'après le cours de mécanique quantique que les valeurs possibles de j sont $|j_1 - j_2|, |j_1 - j_2| + 1, \dots, j_1 + j_2$. Ici, $j_1 = j_2 = 1$, donc j prend les valeurs 0, 1 et 2, et l'espace des tenseurs se décompose en une somme directe de sous-espaces correspondant à $j = 0$, $j = 1$ et $j = 2$, de dimensions respectives 1, 3 et 5, dont la somme est bien 9, la dimension de l'espace de départ.

A quoi correspondent ces sous-espaces? Nous savons (voir section 1.2.4) que les tenseurs proportionnels à l'identité δ_{ij} sont invariants par rotation, et ils forment un sous-espace de dimension 1. Ils correspondent donc à $j = 0$, c'est à dire à une représentation scalaire.

D'autre part, les propriétés de symétrie des tenseurs sont inchangées par rotation, ce qui se déduit immédiatement de la loi de transformation (1.10). Par conséquent, les tenseurs antisymétriques forment un sous-espace stable par rotation, qui est de dimension 3. Il correspond à une représentation vectorielle $j = 1$. De fait, à tout tenseur antisymétrique on peut associer un vecteur par la relation $V_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}T_{jk}$, qui s'inverse en $T_{ij} = \epsilon_{ijk}V_k$.

Les tenseurs symétriques, quant à eux, occupent un espace à 6 dimensions. Chacun peut s'écrire sous la forme

$$T_{ij} = \frac{1}{3}T_{kk}\delta_{ij} + \left(T_{ij} - \frac{1}{3}T_{kk}\delta_{ij}\right). \quad (1.23)$$

Le premier terme correspond à la représentation $j = 0$ et le deuxième terme aux tenseurs symétriques de trace nulle, qui constituent la représentation irréductible $j = 2$, de dimension 5: la trace est en effet invariante par rotation.

1.3.4 Transformation d'une fonction scalaire

Nous avons déjà noté, dans la section 1.2.1, que la variation d'une fonction scalaire dans une rotation n'est pas nulle. Nous allons maintenant écrire la forme des générateurs des rotations agissant sur une telle fonction.

Considérons la rotation infinitésimale d'angle $\theta \ll 1$ autour de l'axe j , donnée par l'équation (1.14). La variation d'une fonction scalaire $f(\vec{x})$ dans cette rotation s'obtient en utilisant la définition d'une fonction scalaire, qui est $f'(\vec{x}') = f(\vec{x})$, puis en développant au premier ordre:

$$\begin{aligned} f'(\vec{x}') - f(\vec{x}) &= f'(\vec{x}') - f'(\vec{x}) \\ &= -\delta x_k \frac{\partial f'}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (1.24)$$

où $\delta x_k = x'_k - x_k$ désigne la variation de la coordonnée x_k . Au premier ordre, on peut confondre f' avec f . En remplaçant δx_k par son expression (1.14), on obtient alors

$$\begin{aligned} f'(\vec{x}') - f(\vec{x}) &= -\theta \epsilon_{kjl} x_l \frac{\partial f}{\partial x_k} \\ &= (1 - i\theta J_j) f(\vec{x}) \end{aligned} \quad (1.25)$$

où J_j est l'opérateur défini par

$$J_j = -i \epsilon_{jlk} x_l \frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (1.26)$$

Vectoriellement, ceci s'écrit comme un produit vectoriel

$$\vec{J} = \vec{x} \times (-i\vec{\nabla}). \quad (1.27)$$

On reconnaît l'expression de l'opérateur de moment cinétique orbital en mécanique quantique, où $\vec{P} = -i\vec{\nabla}$ désigne l'opérateur d'impulsion.

Ici, l'espace de représentation, noté \mathcal{E} dans la section 1.3.2, est l'espace des fonctions de trois variables, qui est de dimension infinie. Comme les rotations n'agissent que sur les coordonnées angulaires θ et ϕ en coordonnées sphériques, nous pouvons pour simplifier nous limiter à des fonctions de θ et ϕ , notées $f(\theta, \phi)$. L'espace est encore de dimension infinie. Nous savons d'après le cours de mécanique quantique que cette représentation se décompose en une somme infinie de représentations irréductibles correspondant à toutes les valeurs possibles de j entier:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2 \dots \quad (1.28)$$

Une base de \mathcal{E}_l , de dimension $2l + 1$, est donnée par les harmoniques sphériques $Y_{lm}(\theta, \phi)$, états propres de J_z avec la valeur propre m .

De façon plus générale, la variation par rotation d'un ensemble de champs $f_a(\vec{x})$, scalaires ou non, peut se décomposer comme suit:

$$f'_a(\vec{x}) - f_a(\vec{x}) = (f'_a(\vec{x}) - f'_a(\vec{x}')) + (f'_a(\vec{x}') - f_a(\vec{x})) \quad (1.29)$$

Le premier des deux termes est simplement la variation étudiée dans cette section, qu'on appelle partie orbitale de la transformation, et dont les générateurs ont toujours la forme (1.27). Le deuxième terme est la variation propre du champ, qui est par exemple nulle pour un champ scalaire. On l'appelle partie de spin de la transformation. Tous ces concepts sont souvent introduits en cours dans le cadre de la mécanique quantique, mais ils sont d'une portée beaucoup plus générale.

1.3.5 Opérateurs tensoriels

Dans ce qui précède, nous avons étudié la transformation par rotation d'un élément de l'espace de représentation \mathcal{E} . Nous allons maintenant regarder comment se transforment les éléments de matrice des opérateurs linéaires agissant dans \mathcal{E} .

Nous adopterons ici les notations de la mécanique quantique en notant $|\psi\rangle$ un élément de \mathcal{E} . Nous noterons également $|\psi'\rangle = S(R)|\psi\rangle$ sa transformation par la rotation R . On a de même $\langle\psi'| = \langle\psi|U^\dagger(R) = \langle\psi|U^{-1}(R)$.

On dit qu'un opérateur Σ est scalaire si ses éléments de matrice sont les mêmes après rotation, c'est à dire si

$$\langle\phi'|\Sigma|\psi'\rangle = \langle\phi|\Sigma|\psi\rangle. \quad (1.30)$$

Cette relation devant être vérifiée pour tout $|\phi\rangle$ et $|\psi\rangle$ appartenant à \mathcal{E} , cette équation se réécrit

$$S(R)^{-1}\Sigma S(R) = \Sigma. \quad (1.31)$$

C'est à dire que Σ doit commuter avec tous les $S(R)$, donc en particulier avec les générateurs J_i des rotations agissant dans \mathcal{E} :

$$[J_i, \Sigma] = 0. \quad (1.32)$$

Un opérateur scalaire est donc un opérateur qui commute avec le moment cinétique. \vec{J}^2 en est un exemple.

De même, on dit que trois opérateurs V_1 , V_2 et V_3 forment un opérateur vectoriel si les éléments de matrice de \vec{V} se transforment selon la rotation R , c'est à dire si

$$\langle \phi' | V_i | \psi' \rangle = R_{ik} \langle \phi | V_k | \psi \rangle, \quad (1.33)$$

soit

$$S(R)^{-1} V_i S(R) = R_{ik} V_k. \quad (1.34)$$

En écrivant cette relation pour la rotation infinitésimale d'axe j (1.15), avec $S(R) = 1 - i\theta J_j$, et en développant au premier ordre en θ , on obtient l'équation

$$[V_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} V_k \quad (1.35)$$

qui définit les opérateurs vectoriels. D'après l'équation (1.20), \vec{J} est lui-même un opérateur vectoriel. En mécanique quantique, les opérateurs de position \vec{x} et d'impulsion \vec{p} sont également des opérateurs vectoriels. On montre facilement, par exemple à partir des équations (1.32) et (1.35), que le produit scalaire de deux opérateurs vectoriels est un opérateur scalaire.

On définit enfin, de manière analogue, les opérateurs tensoriels de rang plus élevé.

1.4 Spineurs

Lorsque $j = 1/2$, l'espace des états est de dimension $2j + 1 = 2$. Dans une base appropriée, les générateurs des rotations s'écrivent $\vec{J} = \vec{\sigma}/2$, où les σ_i sont les matrices de Pauli définies par

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.36)$$

Plusieurs particularités du spin 1/2 sont à signaler:

- Les matrices de Pauli sont de carré 1 et anticommulent deux à deux.
- Deux d'entre elles sont à coefficients réels, ce qui implique d'après l'équation (1.19) que les matrices de rotation auront des coefficients complexes. L'espace de représentation sera nécessairement un espace vectoriel sur les complexes, et non plus sur les réels.

L'opérateur associé à une rotation R d'axe z et d'angle θ s'écrit, en utilisant (1.21),

$$S(R) = \exp\left(-i\frac{\theta}{2}\sigma_3\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i\sigma_3 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (1.37)$$

où nous avons utilisé la propriété $\sigma_3^2 = 1$. Pour $\theta = 2\pi$, on obtient $S(R) = -1$. Or une rotation d'angle 2π est l'identité. Il ne s'agit donc pas ici d'une représentation du groupe des rotations $SO(3)$, puisqu'on n'a plus la correspondance $S(R_1)S(R_2) = S(R_1R_2)$. Cette équation est ici vérifiée à un signe près. On parle alors de *représentation projective* (plus généralement, lorsque l'équation précédente est vérifiée à une phase près).

De quel groupe s'agit-il alors? Les opérateurs de rotation construits à partir des matrices de Pauli ont les propriétés suivantes: ils sont unitaires (les matrices de Pauli étant hermitiques) et de déterminant 1. Inversement, toutes les matrices unitaires de déterminant 1 s'écrivent sous la forme $S = \exp(i\vec{\theta} \cdot \vec{\sigma})$, où les θ_i sont réels. Il s'agit donc du groupe $SU(2)$ ($S =$ déterminant 1, $U =$ unitaire, 2 = deux dimensions).

Les groupes $SU(2)$ et $SO(3)$ ne sont pas isomorphes: on peut construire un morphisme de $SU(2)$ dans $SO(3)$ mais pas l'inverse. Bien que les groupes diffèrent, ils ont la même algèbre de Lie (1.20). Ce n'est pas surprenant car les relations de l'algèbre de Lie ne concernent que les transformations infinitésimales, c'est à dire ce qui se passe dans un voisinage de la transformation identité.

Concluons ce chapitre par un petit exercice. Nous avons déjà vu que \vec{J} est généralement un opérateur vectoriel, qui se transforme suivant l'équation (1.34). Nous allons le vérifier explicitement dans le cas des spineurs. Prenons pour cela pour R une rotation d'angle θ autour de z :

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.38)$$

L'équation à vérifier (1.34) s'écrit donc ici

$$\begin{aligned} S(R)^{-1}\sigma_1S(R) &= \sigma_1 \cos \theta - \sigma_2 \sin \theta \\ S(R)^{-1}\sigma_2S(R) &= \sigma_2 \sin \theta + \sigma_1 \cos \theta \\ S(R)^{-1}\sigma_3S(R) &= \sigma_3. \end{aligned} \quad (1.39)$$

où $S(R)$ est donné par l'équation (1.37). Puisqu'il commute avec σ_3 , la troisième équation est automatiquement vérifiée. D'autre part, σ_1 anticommute avec σ_3 , il découle de (1.37) que

$$\sigma_1S(R) = S(R)^{-1}\sigma_1. \quad (1.40)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} S(R)^{-1}\sigma_1S(R) &= \sigma_1S(R)^2 \\ &= \sigma_1(\cos \theta - i\sigma_3 \sin \theta) \\ &= \sigma_1 \cos \theta - \sigma_2 \sin \theta \end{aligned} \quad (1.41)$$

où nous avons utilisé la relation $\sigma_1\sigma_3 = -i\sigma_2$. C'est le résultat cherché. Il nous sera utile dans le chapitre 5.

Chapitre 2

Relativité restreinte

Ce chapitre introduit la notation covariante, qui permet de faire apparaître l'invariance relativiste des lois physiques et sera utilisée dans la suite du cours. Elle est ici appliquée aux lois de l'électrodynamique classique.

2.1 Transformations de Lorentz

2.1.1 Temps propre

On note les coordonnées d'espace-temps (t, \vec{x}) sous la forme x^μ avec $\mu = 0, 1, 2, 3$. L'indice est mis en haut, pour des raisons qui seront expliquées dans la section suivante. On notera également X le quadrivecteur colonne dont les composantes sont les x^μ .

L'intervalle de temps propre τ entre le point X et l'origine est défini, au signe près, par l'équation

$$\tau^2 = t^2 - c^2 \vec{x}^2, \quad (2.1)$$

où c désigne la vitesse de la lumière dans le vide. Un signal lumineux partant de l'origine pourra atteindre les points X tels que $\tau^2 = 0$ et $t > 0$. On appelle cône de lumière issu de l'origine l'ensemble des points tels que $\tau^2 = 0$. On dit également que l'intervalle X est du genre temps si $\tau^2 > 0$, du genre espace si $\tau^2 < 0$ et du genre lumière si $\tau^2 = 0$. Dans toute la suite, nous choisirons un système d'unités où $c = 1$. Avec cette convention, l'unité de longueur est fixée dès qu'on a choisi une unité de temps.

L'élément de temps propre est une forme quadratique des coordonnées x^μ , qui s'écrit sous forme matricielle

$$\tau^2 = {}^t X G X \quad (2.2)$$

où ${}^t X$ désigne le vecteur transposé et G la matrice de la forme quadratique, dite tenseur métrique:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

On écrit plus souvent un produit matriciel tel que (2.2) en explicitant les composantes:

$$\tau^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad (2.4)$$

où $g_{\mu\nu}$ désigne l'élément (μ, ν) de la matrice G . Noter que les indices pour $g_{\mu\nu}$ sont en bas. Retenons dès à présent que lorsqu'une expression comprend une paire d'indices répétés, il doit toujours y avoir un indice en haut et un en bas. Nous l'expliquerons dans la section 2.2.5.

2.1.2 Transformation de Lorentz

Soit une transformation linéaire des x^μ de la forme

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (2.5)$$

ou sous forme matricielle:

$$X' = \Lambda X. \quad (2.6)$$

La transformation Λ est dite transformation de Lorentz si elle laisse inchangé l'élément de temps propre (2.2), c'est à dire si l'on a pour tout X

$${}^t X G X = {}^t X' G X'. \quad (2.7)$$

En utilisant l'équation (2.6) on trouve que ceci équivaut à

$$G = {}^t \Lambda G \Lambda, \quad (2.8)$$

relation qui définit les transformations de Lorentz.

Une propriété essentielle des transformations de Lorentz est que la vitesse de la lumière, définie par un intervalle de temps propre nul, est la même dans le nouveau système de coordonnées. Cependant, ce n'est pas une condition suffisante pour avoir une transformation de Lorentz, puisqu'une dilatation des coordonnées, de la forme $x'^\mu = \lambda x^\mu$, conserve la vitesse de la lumière mais multiplie l'élément de temps propre τ par un facteur λ , et n'est donc pas une transformation de Lorentz pour $\lambda \neq \pm 1$.

Les transformations de Lorentz ont en outre la propriété de laisser inchangé l'élément de volume d'espace temps d^4x . En effet, la variation de l'élément de volume dans la transformation (2.6) est

$$d^4x' = |\det \Lambda| d^4x. \quad (2.9)$$

D'autre part, en prenant le déterminant de l'équation (2.8), on voit immédiatement que $\det \Lambda = \pm 1$.

De par leur définition, les transformations de Lorentz forment un groupe, dit groupe de Lorentz homogène. On appelle transformations de Lorentz propres les transformations de déterminant 1. Elles forment évidemment un sous-groupe du groupe de Lorentz. On appelle transformations de Lorentz orthochrones les transformations ne renversant pas le temps, c'est à dire dont la première composante $\Lambda^0{}_0 > 0$. Elles forment également un sous-groupe du groupe de Lorentz, mais c'est moins évident. Les quatre choix possibles pour les signes de $\det \Lambda$ et $\Lambda^0{}_0 > 0$ correspondent aux quatre composantes connexes du groupe de Lorentz.

2.1.3 Exemples

Les isométries d'espace à trois dimensions sont évidemment des transformations de Lorentz. Elles forment un sous-groupe du groupe de Lorentz. L'inversion d'espace, ou parité, a pour matrice

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Les transformations spéciales de Lorentz d'axe x sont les transformations propres orthochrones laissant inchangés y et z . On montre facilement qu'elles sont de la forme

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi & 0 & 0 \\ -\sinh \phi & \cosh \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

où ϕ est un réel quelconque, dit rapidité de la transformation spéciale. L'origine des coordonnées d'espace du nouveau référentiel, $\vec{x}'' = \vec{0}$, se déplace dans l'ancien référentiel à la vitesse $\vec{v} = \tanh \phi \vec{e}_x$. On définit par ailleurs le facteur de contraction de Lorentz γ par $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2} = \cosh \phi$. Les transformations spéciales d'axe x forment un sous-groupe du groupe de Lorentz. La composée de deux transformations spéciales de rapidités ϕ et ϕ' est une transformation spéciale de rapidité $\phi'' = \phi + \phi'$. La vitesse v'' de la transformation composée est donc égale à

$$v'' = \frac{v + v'}{1 + vv'} \quad (2.12)$$

qui définit la composition des vitesses en relativité.

2.1.4 Transformations infinitésimales

Une transformation infinitésimale des coordonnées s'écrit $\Lambda = 1 + \Omega$ où 1 est la matrice identité et Ω une matrice dont tous les éléments sont petits. En développant (2.8) au premier ordre en Ω , on obtient la condition pour que Λ soit une transformation de Lorentz infinitésimale:

$${}^t\Omega G + G\Omega = 0. \quad (2.13)$$

Cette équation exprime que la matrice $G\Omega$ est antisymétrique. L'ensemble des Ω forme donc un espace vectoriel de dimension 6. Ceci reflète que les transformations de Lorentz infinitésimales peuvent s'écrire comme produits de rotations infinitésimales autour des trois axes de coordonnées et de transformations spéciales infinitésimales suivant les 3 axes. On montre que toute transformation de Lorentz propre et orthochrone peut s'écrire comme produit de transformations infinitésimales. Dans le langage de la topologie, ceci exprime le fait que le sous-groupe propre orthochrone est la composante connexe de l'identité.

2.2 Indices contravariants et covariants

Nous allons maintenant étudier la transformation des quantités physiques sous le groupe de Lorentz. Cette étude est légèrement plus compliquée que pour les rotations,

car les transformations de Lorentz ne sont plus des isométries, ce qui oblige à introduire deux types d'indices, contravariant et covariant, qu'on place respectivement en haut et en bas.

2.2.1 Scalaire

On appelle naturellement scalaire de Lorentz toute quantité invariante par transformation de Lorentz. L'élément de temps propre $d\tau$ le long d'une trajectoire de l'espace-temps $X^\mu(s)$, où s est une paramétrisation quelconque de la trajectoire, est un scalaire de Lorentz, relié à l'intervalle de temps dt par $d\tau = \sqrt{dt^2 - d\vec{x}^2} = dt\sqrt{1 - \vec{v}^2}$, où $\vec{v} = d\vec{x}/dt$ est la vitesse. L'élément de volume d'espace-temps d^4x est également un scalaire de Lorentz.

2.2.2 Vecteur contravariant

Un vecteur contravariant V^μ , est un ensemble de quatre quantités qui se transforment comme les x^μ par transformation de Lorentz:

$$V'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu \quad (2.14)$$

ou, sous forme matricielle:

$$V' = \Lambda V. \quad (2.15)$$

Un exemple de vecteur contravariant est la quadrivitesse d'une trajectoire $X^\mu(s)$, définie par

$$u^\mu \equiv \frac{dX^\mu}{d\tau} = \left(\frac{1/\sqrt{1-\vec{v}^2}}{\vec{v}/\sqrt{1-\vec{v}^2}} \right). \quad (2.16)$$

Le quadrivecteur énergie-impulsion d'une particule de masse m sur cette trajectoire est défini par

$$p^\mu = m u^\mu = m \frac{dX^\mu}{d\tau} = \begin{pmatrix} E \\ \vec{p} \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Notons la relation $\vec{v} = \vec{p}/E$.

La densité de charge $\rho(x)$ et la densité de courant $\vec{j}(x)$ peuvent être réunies pour former un quadrivecteur contravariant $j^\mu(x) = (\rho(x), \vec{j}(x))$. Pour le montrer, considérons une particule de charge q sur une trajectoire $\vec{X}(t)$:

$$\begin{aligned} \rho(t, \vec{x}) &= q \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{X}(t)) \\ \vec{j}(t, \vec{x}) &= q \frac{d\vec{X}}{dt} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{X}(t)) \end{aligned} \quad (2.18)$$

où $\delta^{(3)}(\vec{x}) \equiv \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ désigne la distribution de Dirac à trois dimensions. En posant $X^\mu(T) = (T, \vec{X}(T))$, les équations (2.18) peuvent se récrire

$$j^\mu(x) = q \int dT \frac{dX^\mu}{dT} \delta^{(4)}(x - X(T)) \quad (2.19)$$

où $\delta^{(4)}$ désigne la distribution de Dirac à quatre dimensions, définie par

$$\int d^4x f(x) \delta^{(4)}(x) = f(0) \quad (2.20)$$

où $f(x)$ est une fonction arbitraire des coordonnées d'espace-temps. La forme (2.19) est manifestement invariante par reparamétrisation puisque dT s'élimine. D'autre part, l'élément de volume d^4x étant scalaire, $\delta^{(4)}(x)$ est aussi scalaire. On en déduit que j^μ se transforme comme dX^μ , c'est à dire comme un vecteur contravariant.

2.2.3 Vecteur covariant

Un vecteur covariant est par définition un vecteur qui se transforme comme l'opérateur de gradient $\partial/\partial x^\mu$, noté ∂_μ :

$$\partial_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu. \quad (2.21)$$

Ceci se récrit sous forme matricielle (cf. Eq.(1.9)):

$$\nabla' = {}^t \Lambda^{-1} \nabla. \quad (2.22)$$

Mais, contrairement aux isométries, les transformations de Lorentz ne vérifient pas ${}^t \Lambda^{-1} = \Lambda$. Au lieu de cela, on déduit de l'équation (2.8)

$${}^t \Lambda^{-1} = G \Lambda G^{-1}. \quad (2.23)$$

En utilisant pour G la valeur (2.3), on voit qu'elle coïncide avec son inverse G^{-1} , mais nous les distinguerons ici pour plus de généralité. Des deux équations précédentes, on déduit

$$(G^{-1} \nabla') = \Lambda (G^{-1} \nabla) \quad (2.24)$$

qui montre que $G^{-1} \nabla$ se transforme comme un vecteur contravariant. A tout vecteur contravariant V^μ , on peut donc associer un vecteur covariant par

$$V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu \quad (2.25)$$

soit explicitement, en utilisant (2.3),

$$\begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V^0 \\ -V^1 \\ -V^2 \\ -V^3 \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Inversement, à tout vecteur covariant on associe un vecteur contravariant par

$$V^\mu = g^{\mu\nu} V_\nu \quad (2.27)$$

où $g^{\mu\nu}$ est un élément de G^{-1} . D'après (2.3), on a bien sûr $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$.

2.2.4 Tenseurs

Un tenseur peut avoir des indices covariants et contravariants. Par exemple, $T^{\mu\nu}{}_\rho$ se transforme comme $V^\mu V^\nu V_\rho$.

Un tenseur de rang 2 covariant $T_{\mu\nu}$ se transforme, en utilisant (2.21), suivant la loi

$$T_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu T'_{\alpha\beta} \quad (2.28)$$

soit, sous forme matricielle,

$$T = {}^t \Lambda T' \Lambda. \quad (2.29)$$

En comparant les équations (2.8) et (2.29), on voit que le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ covariant garde la même expression dans chaque système de coordonnées (tenseur invariant). Ceci justifie a posteriori qu'on ait choisi de placer ses indices en bas.

2.2.5 Contractions

Si V^μ est un vecteur contravariant et W_μ un vecteur covariant, il découle des lois de transformation (2.15) et (2.22) que $W_\mu V^\mu = {}^t W V$ est un scalaire de Lorentz (le “produit scalaire” de W et V , improprement nommé puisqu’il peut être négatif). En revanche, ni $W^\mu V^\mu$ ni $W_\mu V_\mu$ ne sont des scalaires, ce qui explique qu’on ne puisse contracter qu’un indice covariant avec un indice contravariant: on obtiendrait des expressions qui ne seraient valables que dans un référentiel particulier.

Quelques exemples: le “carré scalaire” du quadrivecteur d’énergie impulsion (2.17) est simplement $p_\mu p^\mu = m^2$; l’équation de conservation du courant $j^\mu(x)$ défini par l’équation (2.19) s’écrit comme la contraction avec l’opérateur de gradient:

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (2.30)$$

Sous cette forme, il est manifeste que l’équation de conservation du courant est invariante par transformation de Lorentz, puisque chaque membre de l’équation est un scalaire de Lorentz. On dit qu’elle est écrite sous forme covariante.

Notations: si a^μ et b^μ sont deux quadrivecteurs, on notera souvent $a \cdot b = a^\mu b_\mu$ et $a^2 = a^\mu a_\mu$. Ainsi, on écrira pour le quadrivecteur d’énergie–impulsion $p^2 \equiv E^2 - \vec{p}^2 = m^2$.

2.2.6 Tenseur totalement antisymétrique

On définit $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ par son premier élément $\epsilon^{0123} = 1$ et par la condition qu’il soit antisymétrique par n’importe quel échange de deux indices. De même qu’à trois dimensions (voir Eq.(1.12)), il s’agit d’un pseudotenseur invariant, c’est à dire qu’il se transforme suivant

$$\epsilon^{\prime\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \det \Lambda. \quad (2.31)$$

Notons que la forme covariante du tenseur totalement antisymétrique a le signe opposé, comme on peut le voir en utilisant les équations (2.3) et (2.25): $\epsilon_{0123} = -1$.

2.3 Cinématique des collisions

Les processus étudiés en physique des particules sont essentiellement de deux types: désintégration d’une particule instable de masse M en deux ou plusieurs particules plus légères; collision de deux particules de quadrivecteurs d’énergie impulsion k_1 et k_2 , avec deux ou plusieurs particules dans l’état final. Dans les deux cas, l’énergie et l’impulsion totale sont conservées dans le processus, ce qui donne quatre équations contraignant les impulsions des particules émises.

2.3.1 Seuil de réaction

Un paramètre important d’un processus est l’énergie totale disponible dans le référentiel du centre de masse, qui est par définition un référentiel dans lequel l’impulsion totale est nulle. Dans le cas d’une désintégration, cette énergie coïncide avec la masse M de la particule qui se désintègre. Dans le cas d’une collision, on peut l’exprimer simplement en fonction des quadrivecteurs k_1 et k_2 . En effet, dans le référentiel du centre de masse $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{0}$ par définition, et donc $(k_1^0 + k_2^0)^2 = (k_1^0 + k_2^0)^2 - (\vec{k}_1 + \vec{k}_2)^2 = (k_1 + k_2)^2$. Mais

le carré du quadrivecteur $(k_1 + k_2)^2$, souvent noté s (voir section 7.2), est un invariant de Lorentz, qui garde donc la même expression dans tout référentiel. L'énergie dans le référentiel du centre de masse E_{cm} est donc donnée dans *tout* référentiel par l'équation $E_{\text{cm}}^2 = s = (k_1 + k_2)^2$.

Une réaction est cinématiquement possible si et seulement si l'énergie dans le référentiel du centre de masse est supérieure à l'énergie de masse des particules produites, ce qu'on appelle le seuil de réaction. Ceci donne les conditions $M > \sum_i m_i$ pour une désintégration et $(k_1 + k_2)^2 > (\sum_i m_i)^2$ pour une collision.

Dans le reste de cette section, nous nous limiterons aux processus de désintégration. Les résultats équivalents pour les processus de collision s'obtiennent immédiatement en remplaçant M par l'énergie dans le référentiel du centre de masse \sqrt{s} .

2.3.2 Deux particules dans l'état final

S'il n'y a que deux particules de masses m_1 et m_2 dans l'état final, celui-ci est décrit par six paramètres correspondant aux impulsions des deux particules. Etant donné les quatre contraintes que constituent la conservation de l'énergie et de l'impulsion totales, il n'y a en fait que deux degrés de liberté, qui peuvent être choisis comme étant la direction d'une des deux particules (repérée par deux angles θ et ϕ dans un système de coordonnées sphériques).

Dans le référentiel du centre de masse, les énergies des deux particules E_1 et E_2 ne dépendent pas de la direction d'émission, et sont donc déterminées de façon unique. Il est toujours plus commode d'effectuer les calculs de cinématique avec les quadrivecteurs d'énergie impulsion. Nous notons donc $P = (M, \vec{0})$, $p_1 = (E_1, \vec{p}_1)$ et $p_2 = (E_2, \vec{p}_2)$. La conservation de l'énergie et de l'impulsion au cours de la désintégration s'écrit

$$P = p_1 + p_2. \quad (2.32)$$

Pour calculer l'énergie E_1 de la première particule, on élimine p_2 au moyen de la relation $(p_2)^2 = m_2^2$:

$$(P - p_1)^2 = (p_2)^2 = m_2^2. \quad (2.33)$$

En développant le membre de gauche et en utilisant les relations $P^2 = M^2$, $p_1^2 = m_1^2$ et $P \cdot P_1 = M E_1$, cette dernière n'étant valable que dans le référentiel du centre de masse, on obtient

$$M^2 + m_1^2 - 2M E_1 = m_2^2 \quad (2.34)$$

d'où

$$E_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}. \quad (2.35)$$

Dans un référentiel différent, l'énergie des particules sortantes dépend de l'angle θ de leur impulsion avec la direction de l'impulsion totale. Cette relation s'obtient par la même méthode que ci-dessus, en élevant au carré le quadrivecteur qu'on cherche à éliminer.

2.3.3 Trois particules dans l'état final

Lorsqu'il y a trois particules de masses m_1 , m_2 et m_3 dans l'état final, leurs impulsions donnent neuf paramètres, soit cinq degrés de liberté en tenant compte des contraintes de conservation de l'énergie et de l'impulsion. Trois de ces degrés de liberté peuvent être

représentés par des angles : deux pour le plan contenant \vec{p}_1 et \vec{p}_2 (bien défini s'il ne sont pas colinéaires) et un pour l'orientation de \vec{p}_1 dans ce plan. Dans le référentiel du centre de masse, par symétrie, les énergies des particules sortantes ne dépendent pas de ces angles. La dynamique de la collision est donc entièrement déterminée par les deux degrés de liberté restants, pour lesquels on choisit habituellement les variables de Dalitz m_{12} et m_{13} définies par

$$\begin{aligned} m_{12}^2 &= (p_1 + p_2)^2 = (P - p_3)^2 = M^2 + m_3^2 - 2ME_3 \\ m_{13}^2 &= (p_1 + p_3)^2 = (P - p_2)^2 = M^2 + m_2^2 - 2ME_2. \end{aligned} \quad (2.36)$$

La troisième variable $m_{23}^2 = (p_2 + p_3)^2$ est reliée aux deux premières par

$$m_{12}^2 + m_{13}^2 + m_{23}^2 = M^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2. \quad (2.37)$$

Pour un processus donné, par exemple la désintégration β^- du neutron $n \rightarrow pe^- \bar{\nu}_e$, l'ensemble des valeurs de m_{12} et m_{13} permises cinématiquement est une région convexe du plan (m_{12}^2, m_{13}^2) , dont les limites dépendent des valeurs de M , m_1 , m_2 et m_3 (voir exercice 2.6.4). Dans ce plan, chaque événement sera représenté par un point. L'ensemble des points observés constitue ce qu'on appelle un *diagramme de Dalitz*. Ces variables sont commodes à plus d'un titre : d'une part, elles sont invariantes de Lorentz par construction, et peuvent donc être calculées dans n'importe quel référentiel ; d'autre part, si la réaction s'effectue en deux étapes successives, par exemple $M \rightarrow m' m_3 \rightarrow m_1 m_2 m_3$, alors la masse de la particule intermédiaire est précisément la variable de Dalitz $m' = m_{12}$, et les événements correspondants seront regroupés sur une ligne verticale dans le diagramme de Dalitz.

2.4 Equations de Maxwell

Nous allons maintenant montrer que les équations de Maxwell sont invariantes par transformation de Lorentz, si on choisit de transformer le potentiel scalaire $V(x)$ et le potentiel vecteur $\vec{A}(x)$ comme un vecteur contravariant $A^\mu(x) = (V(x), \vec{A}(x))$.

2.4.1 Tenseur du champ électromagnétique

C'est un tenseur de rang 2 antisymétrique défini par

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.38)$$

On vérifie que ses composantes correspondent aux coordonnées du champ électrique $\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \partial\vec{A}/\partial t$ et du champ magnétique $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

La forme contravariante $F^{\mu\nu}$ s'obtient en remplaçant \vec{E} par $-\vec{E}$ dans (2.39).

2.4.2 Tenseur dual

On définit le tenseur dual, qui est en fait un pseudotenseur, par

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}. \quad (2.40)$$

Il s'écrit explicitement

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

On voit qu'on passe de $F^{\mu\nu}$ à $\tilde{F}^{\mu\nu}$ au moyen des substitutions

$$\begin{aligned} \vec{E} &\rightarrow \vec{B} \\ \vec{B} &\rightarrow -\vec{E}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Par conséquent, le dual du dual de $F^{\mu\nu}$ est $-F^{\mu\nu}$.

2.4.3 Invariants bilinéaires

A partir de $F^{\mu\nu}$, on peut construire par contraction un scalaire de Lorentz et un pseudo-scalaire:

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} &= -2(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \\ \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} &= -4\vec{E} \cdot \vec{B}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Ceci montre en particulier que si \vec{E} et \vec{B} sont orthogonaux dans un référentiel, ils le restent dans tout référentiel. De même, s'ils ont même norme dans un référentiel, ils ont même norme dans tout référentiel. Pour l'onde électromagnétique plane dans le vide, ces deux propriétés sont simultanément vérifiées (voir exercice 2.6.7).

2.4.4 Premier groupe d'équations de Maxwell

Le premier groupe d'équations de Maxwell

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.44)$$

s'écrit sous forme covariante, en utilisant (2.39)

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0 \quad (2.45)$$

ou encore, en utilisant (2.41),

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (2.46)$$

Ces équations sont automatiquement satisfaites si $F_{\mu\nu}$ s'exprime au moyen de potentiels suivant l'équation (2.38). Vérifions, par exemple, l'équation (2.46). Les équations (2.38) et (2.40) donnent

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\mu \partial_\rho A_\sigma - \partial_\mu \partial_\sigma A_\rho). \quad (2.47)$$

$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ étant antisymétrique par échange de μ et ρ , sa contraction par le tenseur symétrique $\partial_\mu \partial_\rho$ donne 0, et de même pour le deuxième terme par échange de μ et σ . L'équation (2.46) est donc automatiquement vérifiée.

2.4.5 Deuxième groupe d'équations de Maxwell

Le deuxième groupe d'équations de Maxwell

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}\quad (2.48)$$

(nous choisissons un système d'unités où $\epsilon_0 = 1$) s'écrit sous forme covariante

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu. \quad (2.49)$$

Les équations de Maxwell, qui s'écrivent sous forme covariante, sont donc invariantes par transformation de Lorentz.

La conservation du courant apparaît comme une conséquence directe des équations de Maxwell écrites sous la forme (2.49). En effet, en contractant le premier membre par ∂_ν on obtient $\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu}$, qui est la contraction d'un tenseur symétrique par un tenseur antisymétrique, et vaut donc 0:

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu j^\nu = 0 \quad (2.50)$$

qui est bien l'équation de conservation du courant, (2.30).

2.4.6 Invariance de jauge

Si on change A^μ en $A^\mu + \partial^\mu \Lambda$, où Λ est une fonction arbitraire, alors $F_{\mu\nu}$ défini par l'équation (2.38) est inchangé. On appelle ceci une transformation de jauge. Elle ne modifie pas les quantités physiques.

Par un choix convenable de Λ , on peut assurer la condition $\partial_\mu A^\mu = 0$, dite condition de jauge de Lorentz. C'est une condition covariante, qui reste vérifiée dans tout référentiel contrairement à, par exemple, la jauge de Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Dans la jauge de Lorentz, les équations de Maxwell (2.49) se réécrivent, en utilisant (2.38):

$$\square A^\mu = j^\mu \quad (2.51)$$

avec la notation $\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \partial^2 / \partial t^2 - \Delta$.

2.5 Force de Lorentz

2.5.1 Ecriture covariante

La loi de force de Lorentz s'exerçant sur une particule de charge q est

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (2.52)$$

où $\vec{p} = m\gamma\vec{v}$ est la quantité de mouvement, distincte de l'impulsion canonique comme nous le verrons dans la section 2.5.2. Cette équation s'écrit sous forme covariante

$$m \frac{du^\mu}{d\tau} = q F^{\mu\nu} u_\nu. \quad (2.53)$$

La ligne précédente contient quatre équations, soit une de plus que (2.52). L'équation supplémentaire est la loi de variation de l'énergie cinétique, reliée à la variation de la quantité de mouvement par la relation $E^2 - \vec{p}^2 = m^2$:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\vec{p}}{E} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{v} \cdot \vec{E}. \quad (2.54)$$

Cette écriture covariante de la loi de force de Lorentz achève la preuve que l'électrodynamique classique, résumée par les équations (2.49) et (2.53), est une théorie invariante par transformation de Lorentz.

2.5.2 Formulation lagrangienne

L'action d'une particule de charge q et de masse m sur une trajectoire $x^\mu(s)$, s désignant une paramétrisation arbitraire, s'écrit

$$S = \int L(x^\mu, dx^\mu/ds) ds \quad (2.55)$$

avec

$$\mathcal{L} \left(x^\mu, \frac{dx^\mu}{ds} \right) = -m \sqrt{\frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx_\mu}{ds}} - q A_\mu(x(s)) \frac{dx^\mu}{ds}. \quad (2.56)$$

Sous cette forme, l'action est explicitement invariante de Lorentz. Elle est en outre indépendante de la paramétrisation choisie: le produit $\mathcal{L} ds$ est manifestement indépendant de s .

Vérifions que ce lagrangien est bien équivalent à la loi de force de Lorentz. Les équations de Lagrange s'écrivent

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (dx^\mu/ds)} \right). \quad (2.57)$$

De l'équation (2.56) on déduit

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = -q(\partial_\mu A_\nu) \frac{dx^\nu}{ds} \quad (2.58)$$

et

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (dx^\mu/ds)} = -m \frac{\frac{dx_\mu}{ds}}{\sqrt{\frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds}}} - q A_\mu(x(s)). \quad (2.59)$$

Avant d'aller plus loin, nous choisissons comme paramètre le temps propre: $s = \tau$ (on ne peut pas fixer la paramétrisation plus tôt car il est nécessaire que les dx^μ/ds soient indépendants pour pouvoir écrire les équations de Lagrange). Avec cette paramétrisation, les deux équations précédentes se réduisent à

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} &= -q(\partial_\mu A_\nu) u^\nu \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (dx^\mu/ds)} &= -m u_\mu - q A_\mu(x), \end{aligned} \quad (2.60)$$

où nous avons fait apparaître la quadrivitesse définie par (2.16). L'équation du mouvement (2.57) devient alors

$$m \frac{du^\mu}{d\tau} = q(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) u_\nu. \quad (2.61)$$

En utilisant (2.17) et (2.38), on reconnaît bien la loi de force de Lorentz, Eq.(2.53).

2.5.3 Limite non relativiste

En choisissant pour paramètre le temps t , le lagrangien se récrit

$$\mathcal{L} = -m\sqrt{1 - \vec{v}^2} - qV(x) + q\vec{v} \cdot \vec{A}(x) \quad (2.62)$$

qui, dans la limite non relativiste où $v \ll 1$, se réduit à

$$\mathcal{L} = -m + \frac{m\vec{v}^2}{2} - qV(x) + q\vec{v} \cdot \vec{A}(x) \quad (2.63)$$

qui est, à une constante additive près, le lagrangien de la mécanique classique.

2.5.4 Energie et impulsion

A partir de l'expression (2.62), on calcule l'impulsion canonique définie comme

$$\vec{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}} + q\vec{A} \quad (2.64)$$

et l'énergie

$$E = \vec{v} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}} - \mathcal{L} = \frac{m}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}} + qV. \quad (2.65)$$

Autrement dit, on introduit le champ électromagnétique au moyen de la substitution $p^\mu \rightarrow p^\mu - qA^\mu$. En particulier, la relation $p^\mu p_\mu = m^2$ devient

$$(p^\mu - qA^\mu)(p_\mu - qA_\mu) = m^2. \quad (2.66)$$

On remarquera que, comme dans le cas non relativiste, l'impulsion canonique (2.64) ne coïncide pas avec la quantité de mouvement en présence d'un champ magnétique. De même, l'énergie est ici l'énergie mécanique totale, somme de l'énergie de masse, de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle électrostatique, et diffère donc de l'énergie apparaissant dans l'équation (2.54), qui ne contient pas l'énergie potentielle. Notons aussi que p^μ n'est pas une quantité invariante de jauge.

2.6 Exercices et problèmes

Les exercices 2.6.1 à 2.6.6 sont des exercices de cinématique relativiste, qui se traitent simplement en utilisant les méthodes exposées dans la section 2.3. Les exercices 2.6.7 et 2.6.8 permettent de se familiariser avec la notation covariante et les résultats de la section 2.4. Les problèmes 2.6.9 et 2.6.10 portent sur la formulation lagrangienne étudiée dans la section 2.5.2, et sur son application à l'ancienne théorie des quanta. Enfin, le problème 2.6.11 étudie les représentations du groupe de Lorentz.

2.6.1 Vitesse relative

Soit deux particules d'impulsions p^μ et q^μ . Donner une expression covariante de leur vitesse relative, définie comme la vitesse de l'une dans le référentiel où l'autre est au repos. (on pourra calculer $p \cdot q$ dans le référentiel de repos d'une des deux particules).

2.6.2 Expériences de cible fixe et collisionneurs

1. On envoie une particule d'énergie cinétique K , de masse m , sur une particule identique au repos (expérience de *cible fixe*). Calculer l'énergie dans le référentiel du centre de masse.
2. On accélère deux particules d'impulsions opposées, de masse m et d'énergie cinétique K^* (collisionneur de particules). Que doit valoir K dans l'expérience de cible fixe de la question 1 pour atteindre la même énergie dans le référentiel du centre de masse? Discuter les limites $K^* \ll m$ et $K^* \gg m$. Expliquer pourquoi la plupart des expériences actuelles de physique des hautes énergies se font au moyen de collisionneurs (LEP au CERN, HERA à Hambourg, Tevatron au Fermilab près de Chicago, SLC à Stanford).

Application numérique: Le collisionneur RHIC, qui sera mis en service à Brookhaven (près de New-York) en 1999, fera entrer en collision deux faisceaux de noyaux de plomb à des énergies de 100 GeV par nucléon. Calculer l'énergie K d'une expérience équivalente de cible fixe. On comparera le résultat à l'énergie la plus haute disponible actuellement dans ce type d'expériences, au SPS du CERN qui accélère du plomb à 160 GeV par nucléon.

3. On fait entrer en collision deux faisceaux de particules ultrarelativistes ($E \gg m$) de même direction et de sens opposés, d'énergies respectives E_1 et E_2 . Calculer l'énergie dans le centre de masse.

Application numérique: Le collisionneur HERA fait entrer en collision des protons de 820 GeV avec des électrons de 30 GeV. Calculer l'énergie dans le référentiel du centre de masse.

2.6.3 Photoproduction de pions

Soit la réaction $\gamma p \rightarrow \pi^0 p$ à basse énergie, où p désigne un proton, de masse $M = 939$ MeV, γ un photon et π^0 le pion neutre, de masse $m \simeq 135$ MeV. On note respectivement P , $k = (k^0, \vec{k})$ et $q = (q^0, \vec{q})$ les quadrivecteurs impulsion du proton incident, du photon incident et du pion émis. Le proton est initialement au repos.

1. Calculer, littéralement puis numériquement, l'énergie minimale que doit avoir le photon pour que la réaction $\gamma p \rightarrow \pi^0 p$ soit possible.
2. Calculer l'énergie du photon incident en fonction de l'énergie E du pion émis et de l'angle θ de l'impulsion du pion avec la direction du photon incident.
3. A quoi se réduisent les résultats précédents dans la limite où $m \ll M$? Commenter.

2.6.4 Désintégration du muon

Le muon est une particule analogue à l'électron, mais 200 fois plus lourde, qui se désintègre suivant la réaction $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$. On notera M la masse du muon, et p_1, p_2, p_3 les quadrivecteurs d'énergie impulsion respectifs des particules e^- , $\bar{\nu}_e$ et ν_μ . Les masses de ces particules sont très faibles devant la masse du muon, et on les considérera nulles dans cet exercice.

1. Etant donné les énergies p_1^0 et p_2^0 des deux premières particules, calculer quelle équation doit vérifier l'angle θ entre les directions de \vec{p}_1 et \vec{p}_2 . A quelles conditions sur p_1^0 et p_2^0 cette équation a-t-elle des solutions?

2. Dédurre de la question précédente la région permise pour cette réaction dans le plan (m_{12}, m_{13}) des variables de Dalitz définies dans la section 2.3.3.

2.6.5 Effet Compton

L'effet Compton est la collision élastique d'un photon d'impulsion \vec{k} avec un électron de masse m et d'impulsion \vec{p} . On notera \vec{k}' l'impulsion du photon diffusé, $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ l'énergie de l'électron et θ l'angle entre \vec{k} et \vec{p} .

1. Vérifier que $p \cdot k = (p + k) \cdot k'$. En déduire que l'énergie du photon diffusé vaut

$$|\vec{k}'| = \frac{E - p \cos \theta}{E + |\vec{k}| - \hat{k}' \cdot (\vec{p} + \vec{k})} |\vec{k}| \quad (2.67)$$

en notant $\hat{k}' \equiv \vec{k}'/|\vec{k}'|$ la direction de \vec{k}' .

2. On suppose l'électron au repos. Calculer la valeur de $|\vec{k}'|$ en fonction de $|\vec{k}|$ et de l'angle θ' entre \vec{k} et \vec{k}' .

3. Dans le cas plus général où $\vec{p} \neq \vec{0}$, déduire de (2.67) l'énergie maximale du photon diffusé.

4. On suppose l'électron ultrarelativiste. Vérifier que dans la limite où le photon incident est de basse énergie, l'énergie maximale du photon diffusé est donnée par

$$|\vec{k}'|_{\max} = \left(\frac{2E \sin(\theta/2)}{m} \right)^2 |\vec{k}|. \quad (2.68)$$

Préciser à quelle condition sur $|\vec{k}|$ cette équation est valable. Vérifier la validité des approximations et calculer $|\vec{k}'|_{\max}$ dans le cas d'un faisceau laser d'énergie 1 eV interagissant avec un faisceau d'électrons de $E = 4$ GeV allant en sens inverse. Un tel dispositif permet en particulier d'obtenir, en utilisant un laser polarisé, des photons de haute énergie partiellement polarisés.

2.6.6 Taux de collision

On fait entrer en collision deux faisceaux de particules, de vitesses respectives \vec{v}_1 et \vec{v}_2 . Les densités de particules par unité de volume valent respectivement n_1 et n_2 dans chaque faisceau, et la section efficace de la collision est σ . Nous allons chercher à établir l'expression du taux de collision par unité de volume et de temps. Pour avoir une image géométrique du processus, on supposera que les particules du faisceau 1 sont ponctuelles et que les particules du faisceau 2 sont des billes de rayon R . La section efficace vaut alors $\sigma = \pi R^2$.

1. Calculer le nombre de collisions par unité de volume et de temps dans un référentiel où $\vec{v}_2 = \vec{0}$ (on ne prend pas en compte les collisions multiples).

2. En déduire le taux de collision dans un référentiel quelconque lorsque les vitesses \vec{v}_1 et \vec{v}_2 sont non relativistes.

3. Quel est l'aspect des billes en mouvement relativiste? Le taux de collision est-il augmenté ou diminué par les effets relativistes?

4. Pour calculer ce taux de collision, on se place dans un nouveau référentiel défini par $x' = \gamma_2 x$ (avec $\gamma_2 = 1/\sqrt{1 - v_2^2/c^2}$), l'axe des x étant choisi colinéaire à \vec{v}_2 . y , z et t sont inchangés. En utilisant le résultat de la question 2, calculer le taux de collision dans ce référentiel. En déduire l'expression suivante dans le référentiel de départ :

$$\frac{dN}{d^4x} = \sigma n_1 n_2 \sqrt{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - \left(\frac{\vec{v}_1 \times \vec{v}_2}{c}\right)^2} \quad (2.69)$$

5. Vérifier que l'expression précédente peut se mettre sous la forme

$$\frac{dN}{d^4x} = \sigma \frac{n_1}{\gamma_1} \frac{n_2}{\gamma_2} \sqrt{(u_1 \cdot u_2)^2 - 1} \quad (2.70)$$

où u_1 et u_2 désignent les quadrivitesse des particules. En déduire que le résultat obtenu est bien covariant. Comment aurait-on pu l'obtenir directement à partir du résultat de la question 1 ?

2.6.7 Onde électromagnétique plane

Une onde plane polarisée linéairement est, par définition, une solution des équations de Maxwell dans le vide, de la forme

$$A^\mu(x) = \epsilon^\mu f(n \cdot x) \quad (2.71)$$

où ϵ^μ et n^μ sont des quadrivecteurs indépendants de x , et f est une fonction scalaire. On remarquera que cette expression de $A^\mu(x)$ est covariante.

1. En utilisant (2.38), donner l'expression de $F^{\mu\nu}(x)$ pour l'onde plane.
2. Vérifier que la transformation $\epsilon^\mu \rightarrow \epsilon^\mu + \lambda n^\mu$, λ désignant un réel arbitraire, est une transformation de jauge.
3. Ecrire les équations de Maxwell (2.49) dans le vide.
4. Calculer les invariants du champ électromagnétique (2.43). Quels résultats familiers retrouve-t-on ?
5. Vérifier que si $n^2 \neq 0$, les solutions des équations de Maxwell sont de "pure jauge", c'est à dire qu'elles peuvent être ramenées à $A^\mu = 0$ par une transformation de jauge.
6. On se place dorénavant dans le cas où $n^2 = 0$. Montrer que le champ satisfait automatiquement la condition dite "de jauge de Lorentz" bien qu'on n'ait pas encore fixé la jauge.
7. Montrer que $\epsilon^2 < 0$ pour un champ qui n'est pas de pure jauge. On peut donc imposer la normalisation $\epsilon^2 = -1$, sans perte de généralité.
8. Montrer qu'on peut, par une transformation de jauge, imposer $\epsilon^0 = 0$ (noter que cette condition n'est pas covariante). Dans quelle jauge est-on alors ? Montrer qu'on peut choisir $n^0 = 1$ (normalisation de n), et vérifier qu'on retrouve alors la forme familière de $V(t, \vec{x})$ et $\vec{A}(t, \vec{x})$ pour une onde plane.

2.6.8 Champ d'une charge en mouvement

1. Calculer la transformation du champ électromagnétique $F_{\mu\nu}$ dans la transformation spéciale de Lorentz (2.11), et en déduire la transformation de \vec{E} et \vec{B} , qu'on décomposera en composantes parallèle et perpendiculaire à l'axe x de la transformation. Récrire le résultat dans le système d'unités international où $c \neq 1$ (rappelons que \vec{E} et \vec{B} n'ont pas la même dimension dans ce système). Que devient-il dans la limite non relativiste $\phi \ll 1$? Que reconnaît-on?

2. Soit une charge e en mouvement le long de l'axe x à la vitesse $\vec{v} = v\vec{e}_x$ ($x = vt$) et un observateur immobile au point de coordonnées $(0, b, 0)$. Calculer en fonction de t les coordonnées de l'observateur dans le référentiel en translation à la vitesse $-\vec{v}$, où la charge reste à l'origine. Calculer le champ électromagnétique vu par l'observateur dans ce référentiel puis, en utilisant le résultat de la question précédente, dans le référentiel de départ. Montrer que les seules composantes non nulles sont

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{e}{4\pi} \frac{-t \sinh \phi}{(b^2 + t^2 \sinh^2 \phi)^{3/2}} \\ E_y &= \frac{e}{4\pi} \frac{b \cosh \phi}{(b^2 + t^2 \sinh^2 \phi)^{3/2}} \\ B_z &= \frac{e}{4\pi} \frac{b \sinh \phi}{(b^2 + t^2 \sinh^2 \phi)^{3/2}} \end{aligned} \quad (2.72)$$

où ϕ est la rapidité, reliée à v par $v = \tanh \phi$.

3. Dans le cas où la charge est ultrarelativiste, déduire des résultats précédents que le champ vu par l'observateur n'est important que pendant un temps très court dont on donnera l'ordre de grandeur. Montrer en outre qu'il se réduit au champ d'une onde électromagnétique plane dans le vide se dirigeant suivant l'axe x . Cette observation permet de relier les interactions électromagnétiques des particules chargées ultrarelativistes aux interactions des "photons équivalents". C'est la méthode dite des quanta virtuels, due à Weiszäcker et Williams (1934), qui joue un rôle important en physique des particules.

2.6.9 Atome d'hydrogène

Nous allons étudier le mouvement d'un électron relativiste de charge e dans un champ électrostatique central $A^0 = -Ze/(4\pi|\vec{x}|)$, $\vec{A} = \vec{0}$. On notera $\alpha = Ze^2/(4\pi\hbar)$. Quelle est la dimension de α dans notre système d'unités où $\epsilon_0 = c = 1$?

1. Moment cinétique

A partir de l'expression de l'action (2.62), calculer le moment cinétique \vec{L} de l'électron en fonction de sa position \vec{r} et de sa vitesse $\vec{v} = d\vec{r}/dt$. Montrer que le mouvement est plan. On notera z l'axe perpendiculaire au plan de la trajectoire, et on prend des coordonnées polaires (r, θ) dans le plan de la trajectoire. La loi des aires est-elle vérifiée?

2. Formule de Sommerfeld

Dans l'ancienne théorie des quanta, le spectre des états liés (d'énergie $E < m$) est donné par les conditions de quantification

$$\oint p_r dr = 2\pi\hbar k$$

$$\oint p_\theta d\theta = 2\pi\hbar l \quad (2.73)$$

où k et l sont des entiers et $l > 0$. On a noté $p_r \equiv \partial\mathcal{L}/\partial\dot{r}$ et $p_\theta \equiv \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\theta}$, et l'intégrale porte sur une période de r ou de θ (attention, ces deux quantités n'ont pas la même période temporelle dans le cas relativiste, comme nous le verrons dans la question 3.)

- a) Que donne la deuxième condition de quantification?
- b) Vérifier que

$$\vec{p}^2 = p_r^2 + \frac{\vec{L}^2}{r^2}. \quad (2.74)$$

En utilisant l'équation (2.66), en déduire l'expression de p_r en fonction de r et des constantes du mouvement \vec{L} et E .

- c) On donne l'intégrale

$$\int \sqrt{-a + \frac{2b}{r} - \frac{c}{r^2}} dr = \frac{\pi}{2} \left(\frac{b}{\sqrt{a}} - \sqrt{c} \right) \quad (2.75)$$

où a , b et c sont positifs, $b^2 - ac > 0$, et les bornes de l'intégrale sont les deux racines de l'équation $ar^2 - 2br + c = 0$. On vérifiera que cette formule est bien homogène.

Déduire de la première condition de quantification (2.73) que les niveaux d'énergie sont donnés par la formule de Sommerfeld (1916), qui reproduit la structure fine de l'atome d'hydrogène:

$$E = \frac{m}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{(n - \delta_l)^2}}} \quad (2.76)$$

avec $n = k + l$ (nombre quantique principal) et $\delta_l = l - \sqrt{l^2 - \alpha^2}$. On remarque que les effets relativistes lèvent la dégénérescence entre les niveaux de même n et de l différents.

Nous verrons que la théorie de Dirac, qui est quantique et prend en compte les effets du spin de l'électron, aboutit à la même formule (par une coïncidence qu'on dit fortuite).

- d) Développer E en puissances de α jusqu'à l'ordre α^4 inclus. Commenter l'ordre de grandeur des corrections relativistes, leur dépendance en n et l .

3. Précession du périhélie

La levée de dégénérescence, soulignée dans la question précédente, entre les niveaux de même n et de l différents, se traduit dans le problème classique par le fait que les orbites ne sont pas fermées. Nous allons le vérifier en déterminant l'équation de la trajectoire. Il est pour cela commode d'effectuer le changement de variable $u = 1/r$.

- a) Calculer $v^2/(1 - v^2)$ en fonction de E et u .
- b) Vérifier que la vitesse est donnée par $v^2 = (r^2 d\theta/dt)^2 (u^2 + (du/d\theta)^2)$.
- c) En utilisant ce résultat, calculer $v^2/(1 - v^2)$ en fonction de \vec{L} , u et $du/d\theta$.
- d) Éliminer v entre les résultats des questions a) et c), et en déduire l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par $u(\theta)$.
- e) Chercher une solution du type $u = A \cos(B\theta + C) + D$ où A , B , C et D sont des constantes. Calculer B . En déduire l'avance du périhélie, $\delta\theta$, à chaque révolution. Calculer $\delta\theta$ pour une orbite presque circulaire et faiblement relativiste, parcourue à la vitesse $v \ll c$.

2.6.10 Potentiel scalaire

L'interaction avec un champ électromagnétique décrite dans la section 2.5 n'est pas la seule qui soit compatible avec l'invariance par transformation de Lorentz. Une autre interaction possible est décrite par l'action

$$S = \int - (m + U(X(s))) \sqrt{\frac{dX^\mu}{ds} \frac{dX_\mu}{ds}} ds \quad (2.77)$$

où $U(x)$ est une fonction donnée, scalaire de Lorentz. De tels potentiels interviennent, par exemple, dans l'interaction forte entre nucléons. L'action (2.77) est invariante par reparamétrisation et scalaire de Lorentz.

1. Que devient l'action à la limite non relativiste où $v \ll 1$ et $U \ll m$? A quelle grandeur physique correspond $U(x)$? Peut-on distinguer $U(x)$ d'un potentiel électrostatique?
2. En procédant comme dans la section 2.5.4, calculer l'impulsion et l'énergie en fonction de \vec{v} et $U(\vec{x})$. Comment sont-elles reliées?
3. En suivant la démarche de la section 2.5.2, vérifier que l'équation du mouvement s'écrit sous forme covariante

$$(m + U) \frac{du^\mu}{d\tau} = \partial^\mu U - u^\mu u^\nu \partial_\nu U. \quad (2.78)$$

4. Etudier le mouvement dans un potentiel central $U(\vec{x}) = -1/(4\pi|\vec{x}|)$ avec cette interaction, en suivant la démarche des questions 1 et 3 de l'exercice 2.6.9. On montrera en particulier que la loi des aires est ici exactement vérifiée, et que le périhélie retarde au lieu d'avancer.

2.6.11 Représentations du groupe de Lorentz

Nous allons ici classifier les représentations irréductibles du groupe propre orthochrone de Lorentz (ce sont les transformations de Lorentz pouvant s'écrire comme produit de transformations infinitésimales). Ceci signifie que nous allons chercher quels sont les nombres qui permettent de classifier ces représentations, comme le nombre quantique j pour les rotations.

La première étape est, comme pour la transformation par rotation, de déterminer les relations de commutations entre les générateurs des transformations infinitésimales, c'est à dire de généraliser les équations (1.20) aux transformations de Lorentz. Nous savons que ces relations de commutation sont les mêmes dans n'importe quelle représentation. Nous allons donc les établir, comme nous l'avons fait pour les rotations, dans l'espace des coordonnées, maintenant de dimension 4, dans lequel nous connaissons les expressions des transformations de Lorentz, représentées par des matrices 4×4 . Une fois que nous aurons obtenu les relations de commutation entre les générateurs, nous pourrons en déduire (comme dans le cours sur le moment orbital en mécanique quantique) les propriétés générales sur leurs valeurs propres, qui seront vraies dans n'importe quelle représentation.

1. Les transformations propres orthochrones de Lorentz peuvent s'écrire comme produits de rotations infinitésimales et de transformations spéciales infinitésimales. Nous avons déjà obtenu les générateurs des rotations infinitésimales dans le chapitre 1. Les générateurs des

transformations spéciales infinitésimales d'axe j , notés K_j , sont définis de manière analogue (comparer avec l'équation (1.16)):

$$\Lambda = 1 - i\phi K_j \quad (2.79)$$

où Λ est la transformation spéciale de Lorentz d'axe j et de rapidité $\phi \ll 1$, donnée par (2.11) pour $j = 1$. Ecrire les matrices des K_j . Vérifier qu'elles sont antihermitiques.

2. La transformation infinitésimale de Lorentz la plus générale s'écrit sous la forme $x'^{\mu} = x^{\mu} + \omega^{\mu\nu} x_{\nu}$, où $\omega^{\mu\nu}$ est un tenseur antisymétrique quelconque de composantes petites devant 1. On écrit parfois les six générateurs des transformations infinitésimales de Lorentz (déjà obtenus à la question précédente) sous la forme d'un tenseur antisymétrique $\Sigma_{\mu\nu}$, défini par

$$\Lambda = 1 - \frac{i}{2} \omega^{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu} \quad (2.80)$$

(comparer à l'équation (1.19)). En écrivant l'expression de $\omega^{\mu\nu}$ pour une rotation infinitésimale d'axe x et pour une transformation spéciale de Lorentz infinitésimale d'axe x , vérifier que $J_1 = \Sigma_{23}$ et $K_1 = \Sigma_{01}$.

3. On définit $N_i = (J_i + iK_i)/2$ et $M_i = (J_i - iK_i)/2$. Vérifier que les relations de commutation des N_i et des M_j sont celles de deux moments cinétiques indépendants.

4. D'après ces relations, qui restent vraies dans n'importe quelle représentation, les représentations irréductibles du groupe de Lorentz peuvent alors être classifiées suivant les valeurs propres de $N_i N_i$ et de $M_i M_i$, que nous noterons respectivement $n(n+1)$ et $m(m+1)$, n et m prenant des valeurs entières ou demi-entières. Nous repérerons donc une représentation irréductible par le couple de nombres quantiques (n, m) . On appelle spin de la représentation la quantité $n + m$. Quelle est la dimension d'une représentation (n, m) ?

5. Vérifier que $n = m = 1/2$ pour les matrices obtenues à la question 3, et en déduire que la représentation par des quadrivecteurs est irréductible.

6. Le moment cinétique est $J_i = N_i + N_i^{\dagger}$. En déduire comment se décompose une représentation (n, m) vis-à-vis du groupe des rotations. En particulier, comment se décompose la représentation par des quadrivecteurs étudiée plus haut?

7. Considérons à présent la transformation des tenseurs à deux composantes $T^{\mu\nu}$. En suivant la démarche de la section 1.3.3 montrer qu'elle peut être décomposée en quatre représentations irréductibles dont on donnera les dimensions respectives. En utilisant le fait que la "trace" T_{μ}^{μ} et les propriétés de symétrie des tenseurs sont conservées dans les transformations de Lorentz, identifier dans cette décomposition les tenseurs antisymétriques, les tenseurs symétriques de trace nulle et les tenseurs proportionnels à $g^{\mu\nu}$. Quelle est la représentation du champ électromagnétique $F^{\mu\nu}$? Comment se transforme-t-il par rotation?

8. Nous venons de voir que la représentation par un tenseur antisymétrique n'est pas irréductible, mais qu'elle se décompose en deux sous-représentations. Nous allons maintenant étudier à quoi elles correspondent. On dit qu'un tenseur antisymétrique $A^{\mu\nu}$ est self-dual s'il vérifie la relation $A^{\mu\nu} = i\tilde{A}^{\mu\nu}$ (et anti-self-dual si c'est le signe opposé). Comment se traduit cette condition en termes de \vec{E} et \vec{B} pour le champ électromagnétique? En déduire que $F^{\mu\nu}$ peut toujours s'écrire comme somme d'un tenseur self-dual et d'un tenseur anti-self-dual. D'autre part, la condition de self dualité ci-dessus est clairement invariante par

transformation de Lorentz, donc l'ensemble des tenseurs self-duaux est une représentation du groupe de Lorentz. Quelle est sa dimension?

Déduire des lois de transformation de \vec{E} dans une rotation infinitésimale et dans une transformation spéciale de Lorentz infinitésimale que $N_1^\dagger = 0$ pour un tenseur self-dual, et en déduire que les tenseurs self-duaux correspondent à une représentation $(1, 0)$.

Ecrire la condition de self-dualité pour une onde plane électromagnétique se propageant dans la direction z , et vérifier qu'elle correspond à un état de polarisation bien défini. Lequel?

Chapitre 3

Propagation des ondes

Les propagateurs sont les fonctions qui permettent de résoudre l'équation du mouvement d'un champ. Ils jouent un rôle important en théorie des champs, et en particulier dans les calculs de processus élémentaires. Nous en donnons ici un premier exemple, dans le cadre de l'électrodynamique classique. Il nous permettra d'introduire des concepts et des outils de calcul qui seront utiles dans la suite du cours.

3.1 Position du problème

Nous allons chercher à résoudre les équations de Maxwell dans la jauge de Lorentz (2.51) pour des sources extérieures $j^\mu(x)$ données. Elles ont la forme d'équations d'onde avec second membre. On sait alors qu'il y a une infinité de solutions, qu'on obtient à partir d'une solution particulière en lui ajoutant une solution quelconque de l'équation sans second membre $\square\phi = 0$. Une solution particulière est fournie par la formule des potentiels retardés. Nous allons ici démontrer cette formule.

Pour résoudre l'équation (2.51), il suffit de trouver une fonction $G(x)$, dite propagateur ou fonction de Green, solution de l'équation

$$\square G(x) = \delta^{(4)}(x). \quad (3.1)$$

La solution de cette équation n'est pas non plus unique, pour la même raison.

Connaissant une solution $G(x)$ de l'équation précédente, on obtient une solution de (2.51) par convolution avec le courant $j^\mu(x)$:

$$A^\mu(x) = \int d^4x' G(x - x') j^\mu(x'). \quad (3.2)$$

En effet, on vérifie immédiatement

$$\begin{aligned} \square_x A^\mu(x) &= \int d^4x' \square_x G(x - x') j^\mu(x') \\ &= \int d^4x' \delta^{(4)}(x - x') j^\mu(x') \\ &= j^\mu(x). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Reste à déterminer $G(x)$, que nous allons calculer explicitement.

3.2 Transformée de Fourier

Nous définissons la transformée de Fourier $\tilde{F}(\omega, \vec{k})$ d'une fonction quelconque $F(t, \vec{x})$ par

$$\tilde{F}(\omega, \vec{k}) = \int d^4x F(t, \vec{x}) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}. \quad (3.4)$$

Ceci peut également s'écrire sous forme covariante, en introduisant le quadrivecteur $k^\mu \equiv (\omega, \vec{k})$:

$$\tilde{F}(\omega, \vec{k}) = \int d^4x F(t, \vec{x}) e^{ik^\mu x_\mu}. \quad (3.5)$$

Si $F(t, \vec{x})$ est une fonction scalaire de Lorentz, il en sera alors de même de $\tilde{F}(\omega, \vec{k})$.

La transformée inverse est donnée par

$$F(t, \vec{x}) = \int \frac{d\omega d^3\vec{k}}{(2\pi)^4} \tilde{F}(\omega, \vec{k}) e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}. \quad (3.6)$$

On a les correspondances

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} F &\rightarrow -i\omega \tilde{F} \\ \vec{\nabla} F &\rightarrow i\vec{k} \tilde{F} \end{aligned} \quad (3.7)$$

soit sous forme covariante

$$\partial_\mu F \rightarrow -ik_\mu \tilde{F}. \quad (3.8)$$

En utilisant ces relations, l'équation du propagateur (3.1) se réécrit

$$(-\omega^2 + \vec{k}^2) \tilde{G}(\omega, \vec{k}) = 1. \quad (3.9)$$

3.3 Choix du propagateur

Clairement, \tilde{G} n'est pas déterminée de façon unique par l'équation (3.9) lorsque $\omega^2 - \vec{k}^2 = 0$. Cette indétermination est liée à la non-unicité de G . Nous allons calculer la fonction de Green retardée, définie par la condition $G(t, \vec{x}) = 0$ si $t < 0$, quel que soit \vec{x} .

Comment se traduit cette condition sur la transformée de Fourier $\tilde{G}(\omega, \vec{k})$? On a la propriété générale suivante:

$f(t) = 0$ pour $t < 0$ si $\tilde{f}(\omega)$ est analytique dans le demi-plan $Im(\omega) \geq 0$. (si $\tilde{f}(\omega)$ s'annule pour $|\omega|$ infini).

Démonstration: $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega / 2\pi$. Pour $t < 0$ et $Im(\omega) > 0$, $|\tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t}|$ tend vers 0 pour $|\omega|$ grand. Par conséquent, l'intégrale sur un demi-cercle de rayon suffisamment grand (voir Figure 3.1) donne une contribution négligeable. En l'additionnant à l'intégrale sur l'axe réel, on obtient un contour d'intégration fermé. Or, on sait que l'intégrale sur un contour fermé est nulle si la fonction est analytique dans le contour, c'est à dire si elle n'a pas de pôles à l'intérieur du contour.

Dans le cas qui nous intéresse, les pôles sont en $\omega = \pm|\vec{k}|$, soit juste à la limite du demi plan complexe $Im(\omega) \geq 0$. On lève l'ambiguïté en les déplaçant légèrement au-dessous de l'axe réel, en $\omega = \pm|\vec{k}| - i\epsilon$ avec $\epsilon > 0$ arbitrairement petit. On obtient alors

$$\tilde{G}_{\text{ret}}(\omega, \vec{k}) = \frac{-1}{(\omega + i\epsilon)^2 - \vec{k}^2}. \quad (3.10)$$

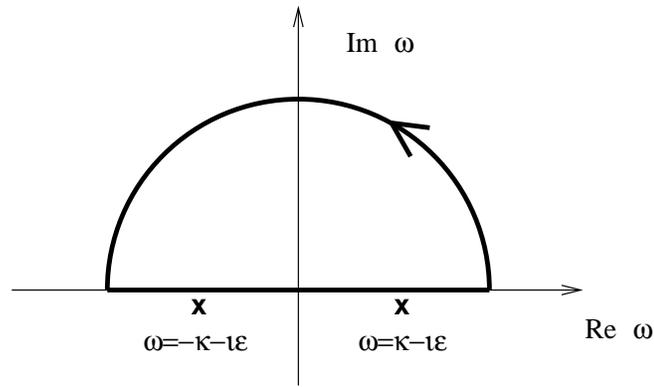


FIG. 3.1 - Pour $t < 0$, l'intégrale peut se calculer en refermant le contour d'intégration par le haut. La flèche indique le sens du contour d'intégration, ici positif.

3.4 Calcul du propagateur retardé

Il faut calculer la transformée de Fourier inverse:

$$G_{\text{ret}}(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{-e^{-i\omega t}}{(\omega + i\epsilon - |\vec{k}|)(\omega + i\epsilon + |\vec{k}|)}. \quad (3.11)$$

Pour $t < 0$, on a vu que l'intégrale est nulle. Pour $t > 0$, on peut la calculer en refermant le contour à l'infini par le bas. La seule contribution vient alors des pôles situés en $\omega = \pm|\vec{k}| - i\epsilon$, et se calcule en utilisant le théorème des résidus.

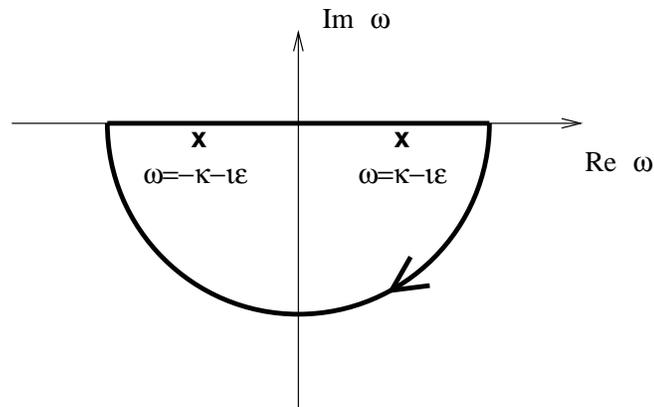


FIG. 3.2 - Pour $t > 0$, l'intégrale peut se calculer en refermant le contour d'intégration par le bas. La flèche indique le sens du contour, ici négatif.

Le théorème des résidus dit que

$$\oint_{\mathcal{C}} d\omega \frac{f(\omega)}{\omega - \omega_0} = 2i\pi f(\omega_0) \quad (3.12)$$

où \mathcal{C} est un contour fermé du plan complexe entourant ω_0 dans le sens positif, et $f(\omega)$ est une fonction analytique dans \mathcal{C} . Pour un contour dans le sens négatif (comme dans (3.11)) le résultat a le signe opposé.

L'application de (3.12) à l'intégrale (3.11) donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{-e^{-i\omega t}}{(\omega + i\epsilon - |\vec{k}|)(\omega + i\epsilon + |\vec{k}|)} = i \left(\frac{e^{-i|\vec{k}|t}}{2|\vec{k}|} + \frac{e^{i|\vec{k}|t}}{-2|\vec{k}|} \right) \quad (3.13)$$

D'où

$$G(t, \vec{x}) = -i \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \frac{e^{i|\vec{k}|t} - e^{-i|\vec{k}|t}}{2|\vec{k}|}. \quad (3.14)$$

On calcule les intégrales qui restent en choisissant des coordonnées sphériques d'axe \vec{x} . L'élément d'intégration s'écrit $d^3 \vec{k} = k^2 dk d \cos \theta d\phi$.

$$\begin{aligned} G(t, \vec{x}) &= -\frac{i}{2(2\pi)^2} \int_0^\infty k dk (e^{ikt} - e^{-ikt}) \int_{-1}^1 d \cos \theta e^{ik|\vec{x}| \cos \theta} \\ &= -\frac{i}{2(2\pi)^2} \int_{-\infty}^\infty k dk (e^{ikt} - e^{-ikt}) \int_{-1}^1 d \cos \theta e^{ik|\vec{x}| \cos \theta} \\ &= \frac{-1}{2(2\pi)^2 |\vec{x}|} \int_{-\infty}^\infty dk (e^{ik(t+|\vec{x}|)} - e^{ik(t-|\vec{x}|)}) \\ &= -\frac{1}{4\pi |\vec{x}|} (\delta(t + |\vec{x}|) - \delta(t - |\vec{x}|)) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Puisque $t > 0$, le premier terme s'annule. Il vient finalement

$$G_{\text{ret}}(t, \vec{x}) = \frac{\delta(t - |\vec{x}|)}{4\pi |\vec{x}|}. \quad (3.16)$$

Le propagateur retardé n'est non nul que sur le cône de lumière issu de l'origine. L'équation (3.1) définissant G étant invariante par transformation de Lorentz, on peut donner une expression covariante de G en utilisant la formule

$$\delta(f(x)) = \sum_{x_0} \frac{\delta(x - x_0)}{|f'(x_0)|}. \quad (3.17)$$

où la somme porte sur les racines de $f(x_0) = 0$. Ceci permet d'écrire

$$G_{\text{ret}}(t, \vec{x}) = \frac{\theta(t)}{2\pi} \delta(x^\mu x_\mu). \quad (3.18)$$

où $\theta(t)$ désigne la fonction de Heaviside, définie par $\theta(t) = 0$ pour $t < 0$ et $\theta(t) = 1$ pour $t > 0$. Notons que cette expression n'est invariante que par les transformations orthochrones: la condition retardée n'est pas invariante par renversement du temps.

3.5 Formule des potentiels retardés

Calculons le potentiel $A^\mu(x)$ obtenu à partir de la fonction de Green retardée (3.16):

$$A_{\text{ret}}^\mu(t, \vec{x}) = \int d^3 \vec{x}' dt' G_{\text{ret}}(t - t', \vec{x} - \vec{x}') j^\mu(t', \vec{x}'). \quad (3.19)$$

Intégrons sur t' . La fonction de Green n'est non nulle que pour $t - t' = |\vec{x} - \vec{x}'|$, et il vient

$$A_{\text{ret}}^\mu(t, \vec{x}) = \int d^3 \vec{x}' \frac{j^\mu(t - |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}')}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (3.20)$$

qui est la formule bien connue des potentiels retardés.

3.6 Propagation de l'onde libre

Les propagateurs permettent également d'obtenir une solution explicite du problème de la propagation de l'onde libre, solution de $\square A^\mu = 0$. Connaissant A^μ et $\partial A^\mu / \partial t$ sur tout l'espace à un instant initial t_0 , on cherche à déterminer $A^\mu(t, \vec{x})$ avec $t > t_0$.

Nous allons démontrer que

$$A^\mu(X) = \int_{t=t_0} d^3 \vec{x} \left[G_{\text{ret}}(X - x) \frac{\partial A^\mu}{\partial t}(x) - \frac{\partial G_{\text{ret}}}{\partial t}(X - x) A^\mu(x) \right]. \quad (3.21)$$

Des formules analogues, dites formules de Kirchhoff, sont utilisées pour les calculs de diffraction, où l'on cherche à calculer l'amplitude d'une onde en tout point à partir de sa valeur sur une surface d'onde.

Première étape: Si $f(\vec{x})$ et $g(\vec{x})$ sont deux fonctions s'annulant à l'infini,

$$\int f(\vec{x}) \Delta g(\vec{x}) d^3 \vec{x} = \int \Delta f(\vec{x}) g(\vec{x}) d^3 \vec{x} \quad (3.22)$$

C'est à dire que l'opérateur Δ est hermitique. Il suffit pour le démontrer de remarquer que $f\Delta g - g\Delta f = \partial_i(f\partial_i g - g\partial_i f)$.

Deuxième étape: Soit deux fonctions $f(t, \vec{x})$ et $g(t, \vec{x})$, nulles pour $|\vec{x}|$ infini. Alors on déduit aisément de (3.22) que

$$\int_{t_0}^{t_1} d^4 x (f \square g - g \square f) = \left[\int d^3 \vec{x} \left(f \frac{\partial g}{\partial t} - g \frac{\partial f}{\partial t} \right) \right]_{t_0}^{t_1}. \quad (3.23)$$

Troisième étape: Appliquons le résultat précédent avec $f(x) = A^\mu(x)$ et $g(x) = G_{\text{ret}}(X - x)$, et t_1 tel que t soit compris entre t_0 et t_1 . On obtient immédiatement le résultat (3.21).

3.7 Exercices et problèmes

3.7.1 Fonction de Green avancée

Montrer que la fonction de Green avancée, nulle pour $t > 0$, vaut

$$G_{\text{av}}(t, \vec{x}) = \frac{\delta(t + |\vec{x}|)}{4\pi|\vec{x}|}. \quad (3.24)$$

3.7.2 Propagateurs à 1+1 et 2+1 dimensions

La fonction de Green retardée à 2+1 dimensions est la solution de

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) G_{\text{ret}}(t, x, y) = \delta^{(3)}(t, x, y) \quad (3.25)$$

nulle pour $t < 0$. Montrer qu'on l'obtient par intégration de la fonction de Green à 3+1 dimensions:

$$G_{\text{ret}}(t, x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{\text{ret}}(t, x, y, z) dz. \quad (3.26)$$

En déduire que

$$G_{\text{ret}}(t, x, y) = \frac{\theta(t - \sqrt{x^2 + y^2})}{2\pi\sqrt{t^2 - x^2 - y^2}}. \quad (3.27)$$

On remarquera qu'ici, le champ électrique est non nul en tous les points intérieurs du cône de lumière, et pas seulement sur la surface de celui-ci. Montrer de même que la fonction de Green retardée à 1+1 dimensions vaut

$$G_{\text{ret}}(t, x) = \frac{\theta(t - |x|)}{2}. \quad (3.28)$$

3.7.3 Rayonnement d'une particule accélérée

Le but de ce problème est d'étudier quelques aspects du champ électromagnétique créé par une particule de charge q , de masse m , en mouvement le long d'une trajectoire donnée $X^\mu(\tau)$. On notera $a \cdot b = a^\mu b_\mu$, $a^2 = a^\mu a_\mu$, et $u^\mu(\tau) = dX^\mu/d\tau$.

1. Potentiels de Liénard-Wiechert :

En utilisant les expressions covariantes de la fonction de Green retardée (3.18) et du courant créé par la particule (2.19), montrer que le potentiel en un point quelconque x^μ s'exprime, dans la jauge de Lorentz,

$$A^\mu(x) = \frac{q}{2\pi} \int u^\mu \theta(x^0 - X^0) \delta[(x - X)^2] d\tau. \quad (3.29)$$

Montrer que pour un point donné x de l'espace-temps, il existe une et une seule valeur de τ , notée par la suite τ_0 , telle que $x^0 > X^0(\tau_0)$ et $(x - X(\tau_0))^2 = 0$. On notera également $R = \|\vec{x} - \vec{X}(\tau_0)\|$, $\vec{n} = (\vec{x} - \vec{X}(\tau_0))/R$. Montrer qu'avec ces notations, on a

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{q}{4\pi R(1 - \vec{v} \cdot \vec{n})} \\ \vec{A}(x) &= \frac{q\vec{v}}{4\pi R(1 - \vec{v} \cdot \vec{n})}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

2. Champ électromagnétique :

Vérifier que

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta[(x - X)^2] = -\frac{x_\mu - X_\mu}{u \cdot (x - X)} \frac{d}{d\tau} \delta[(x - X)^2] \quad (3.31)$$

et en déduire, en partant de l'équation (3.29), que

$$F_{\mu\nu}(x) = \frac{q}{2\pi} \int \frac{d}{d\tau} \left[\frac{u_\nu(x_\mu - X_\mu) - u_\mu(x_\nu - X_\nu)}{u \cdot (x - X)} \right] \theta(x^0 - X^0) \delta[(x - X)^2] d\tau. \quad (3.32)$$

Montrer que ceci peut également s'écrire, avec les mêmes notations qu'à la première question,

$$F_{\mu\nu}(x) = \frac{q}{4\pi u(\tau_0) \cdot (x - X(\tau_0))} \frac{d}{d\tau} \left[\frac{u_\nu(x_\mu - X_\mu) - u_\mu(x_\nu - X_\nu)}{u \cdot (x - X)} \right]_{\tau=\tau_0}. \quad (3.33)$$

Développer cette expression et exprimer $F_{\mu\nu}$ en fonction de R , u^μ , $\dot{u}^\mu = du^\mu/d\tau$ et $n^\nu = (1, \vec{n})$. On voit que $F_{\mu\nu}$ peut s'écrire comme la somme de deux termes dont l'un ne dépend pas de l'accélération \dot{u}^μ et l'autre en dépend linéairement. Quelle est leur signification physique respective? Comment se comportent-ils lorsque $R \rightarrow +\infty$?

Vérifier que $\vec{F}_{\mu\nu} n^\nu = 0$. En déduire que $\vec{B} = \vec{n} \times \vec{E}$.

3. Puissance rayonnée :

Calculer explicitement le champ électrique \vec{E} puis le vecteur de Poynting dans un référentiel où la charge est au repos (c'est à dire $\vec{v} = 0$) à l'instant τ_0 . En déduire, par intégration sur la sphère de centre $\vec{X}(\tau_0)$ et de rayon R , la puissance totale $P(\tau_0)$ rayonnée par la charge au temps τ_0 en fonction de son accélération $\|d\vec{v}/dt\|$.

On peut également vérifier que l'impulsion emportée par le champ rayonné est nulle dans ce référentiel ; nous l'admettons. Calculer l'énergie et l'impulsion rayonnées pendant l'intervalle $d\tau$ dans un référentiel où la particule a la vitesse \vec{v} . En déduire que la puissance rayonnée $P(\tau)$ est un invariant de Lorentz.

En déduire que l'expression de $P(\tau)$ dans un référentiel quelconque est

$$P(\tau) = -\frac{q^2}{4\pi} \frac{2}{3} \left(\frac{du^\mu}{d\tau} \frac{du_\mu}{d\tau} \right).$$

4. Rayonnement synchrotron :

Une particule de charge e , de masse m et d'énergie $E \gg m$ est en mouvement circulaire dans un synchrotron de rayon R . Calculer l'énergie ε_R qu'elle perd en rayonnement à chaque tour.

Application numérique : le collisionneur LEP, mis en service au CERN en 1989, mesure environ 10 km de diamètre et on y accélère des électrons jusqu'à 50 GeV. Calculer ε_R avec ces valeurs. C'est le coût de l'énergie qu'il faut fournir aux électrons à chaque tour, pour compenser les pertes par rayonnement, qui limite la valeur de l'énergie E . Le coût de la construction de l'accélérateur étant par ailleurs proportionnel à son rayon R , comment doit varier R avec E pour minimiser le coût global?

On projette actuellement d'utiliser le tunnel du LEP pour accélérer des protons jusqu'à 7 TeV (projet LHC). Que vaut alors ε_R ? Quel est ici le facteur qui limite l'énergie?

Chapitre 4

Particule de spin 0

Nous abordons maintenant la mécanique quantique relativiste proprement dite, en commençant par le plus simple, c'est à dire une particule sans spin.

4.1 Particule libre

Dans ce cours, nous travaillerons dans le système d'unités naturel de la mécanique quantique relativiste, dans lequel $\hbar = c = 1$. Il suffit alors de choisir une unité d'énergie (souvent exprimées en électron-Volt, eV) pour fixer les unités de masse ($[M] = [E]$), de longueur et de temps ($[L] = [T] = [E]^{-1}$).

4.1.1 Equation de Klein–Gordon

Le passage de la mécanique du point à la mécanique ondulatoire se fait selon les correspondances:

$$\begin{aligned} E &\rightarrow i \frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{p} &\rightarrow -i \vec{\nabla}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Ceci s'écrit sous forme covariante

$$p^\mu \rightarrow i \partial^\mu. \quad (4.2)$$

Pour une particule libre non relativiste, cette prescription conduit à l'équation de Schrödinger.

$$E = \frac{p^2}{2m} \rightarrow i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m} \Delta \psi. \quad (4.3)$$

Pour une particule relativiste, la relation correcte entre énergie et impulsion est $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. Si on appliquait directement ceci à une équation d'onde, en développant en puissances de p^2 , qui devient $-\Delta$, on obtiendrait des dérivées d'ordre arbitraire de la fonction d'onde. Pour éviter ces difficultés, on préfère écrire $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$.

Mais en faisant cette modification, on introduit également comme solution possible $E = -\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, et une solution d'énergie négative n'est pas physiquement satisfaisante. Nous verrons que l'interprétation des solutions à énergie négative est le problème essentiel, caractéristique, de la mécanique quantique relativiste.

La relation $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$ se traduit par l'équation d'onde

$$(\square + m^2)\phi = 0, \quad (4.4)$$

dite équation de Klein–Gordon. Cette équation est manifestement invariante par transformation de Lorentz (2.6), c'est à dire que si ϕ est solution, ϕ' défini par $\phi'(x') = \phi(x)$ est également solution. Cette dernière équation exprime que ϕ est un scalaire de Lorentz, c'est à dire que la particule décrite par l'équation est une particule scalaire, de spin nul.

4.1.2 Solution générale de l'équation

Toute solution de l'équation de Klein–Gordon peut s'écrire comme combinaison linéaire d'ondes planes monochromatiques, de la forme

$$\phi_{\vec{p},\pm}(t, \vec{x}) = e^{-i(E_{\pm}t - \vec{p}\cdot\vec{x})} \quad (4.5)$$

avec $E_{\pm} = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. $\phi_{\vec{p},+}(x)$ et $\phi_{\vec{p},-}(x)$ sont les ondes planes d'impulsion \vec{p} , d'énergie respectivement positive et négative.

On peut décomposer une solution $\phi(x)$ quelconque de la façon suivante dans un volume fini V , où les valeurs possibles de l'impulsion \vec{p} sont discrètes:

$$\phi(x) = \sum_{\vec{p}} (\lambda_{\vec{p},+}\phi_{\vec{p},+}(x) + \lambda_{\vec{p},-}\phi_{\vec{p},-}(x)) \quad (4.6)$$

Comment calculer, pour une solution $\phi(x)$ donnée, les coefficients $\lambda_{\vec{p},\pm}$ de la décomposition (4.6). Autrement dit, comment “projeter” $\phi(x)$ sur une onde plane donnée $\phi_{\vec{p},\pm}(x)$? Contrairement à ce qui se passe pour l'équation de Schrödinger, il ne suffit pas d'effectuer la transformée de Fourier spatiale de $\phi(x)$, car à une valeur donnée de l'impulsion \vec{p} correspondent ici deux valeurs différentes de l'énergie $\pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. Pour pouvoir projeter séparément sur les deux valeurs de l'énergie, il faut faire intervenir $\partial\phi/\partial t$. On vérifie en effet que les coefficients s'obtiennent en calculant l'intégrale suivante sur tout l'espace, à un instant t donné :

$$i \int d^3\vec{x} \left(\phi_{\vec{p},\pm}^* \frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{\partial\phi_{\vec{p},\pm}^*}{\partial t} \phi \right) = \pm 2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} V \lambda_{\vec{p},\pm}. \quad (4.7)$$

4.2 Interprétation probabiliste

4.2.1 Amplitude de probabilité

Suivant l'équation (4.7), il est naturel de définir l'amplitude de probabilité pour un état $\phi_1(x)$ d'être dans l'état $\phi_2(x)$ par l'intégrale sur tout l'espace, à un instant t donné,

$$\langle \phi_2 | \phi_1 \rangle = i \int d^3\vec{x} \left(\phi_2^* \frac{\partial\phi_1}{\partial t} - \frac{\partial\phi_2^*}{\partial t} \phi_1 \right), \quad (4.8)$$

dite aussi *recouvrement* entre ϕ_1 et ϕ_2 . On peut montrer que c'est une quantité scalaire de Lorentz, qui ne dépend pas du référentiel où on l'évalue.

Notre définition de l'amplitude de probabilité diffère de celle de l'équation de Schrödinger, où le recouvrement entre deux fonctions d'onde $\psi_1(t, \vec{x})$ et $\psi_2(t, \vec{x})$ est défini par

$$\langle \psi_2 | \psi_1 \rangle = \int d^3\vec{x} \psi_2^*(t, \vec{x}) \psi_1(t, \vec{x}). \quad (4.9)$$

Cette différence, liée au fait que l'équation de Klein–Gordon est du second ordre en temps, est la difficulté essentielle de ce chapitre. Nous verrons au chapitre 5 que ce problème n'apparaît pas pour des particules de spin 1/2, décrites par l'équation de Dirac.

Les ondes planes (4.5) vérifient

$$\langle \phi_{\vec{p},\pm} | \phi_{\vec{p},\pm} \rangle = \pm 2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} V. \quad (4.10)$$

Par conséquent, la forme bilinéaire (4.8) n'est donc pas définie positive si on inclut les états d'énergie négative. On choisira de normaliser les ondes planes suivant

$$\phi(t, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2|E|V}} e^{-i(Et - \vec{p}\cdot\vec{x})}, \quad (4.11)$$

de norme ± 1 suivant que $E = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$.

Notons que la définition du recouvrement fixe la dimension de la fonction d'onde de Klein–Gordon. Puisque l'amplitude de probabilité est sans dimension, on déduit de l'équation (4.8) que la fonction d'onde ϕ doit être homogène à l'inverse d'une longueur [$\phi \equiv L^{-1} = E$]. La fonction d'onde de Klein–Gordon n'a donc pas la même dimension que la fonction d'onde de Schrödinger [$\psi \equiv E^{3/2}$].

4.2.2 Limite non relativiste

Soit une solution $\phi(x)$ d'énergie positive et non relativiste, c'est à dire une superposition d'ondes planes avec $|\vec{p}| \ll m$, et $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \simeq m + \vec{p}^2/2m$. Alors, la fonction $\psi(x)$ définie par

$$\phi(x) = \frac{e^{-imt}}{\sqrt{2m}} \psi(x) \quad (4.12)$$

sera naturellement solution de l'équation de Schrödinger.

D'autre part, l'énergie totale étant presque égale à l'énergie de masse, $i\partial\phi/\partial t \simeq m\phi$. Le recouvrement (4.8) devient alors

$$\langle \phi_2 | \phi_1 \rangle = 2m \int d^3\vec{x} \phi_2^*(t, \vec{x}) \phi_1(t, \vec{x}). \quad (4.13)$$

En utilisant (4.12), on retrouve alors le recouvrement usuel (4.9) de l'équation de Schrödinger:

$$\langle \phi_2 | \phi_1 \rangle = \int d^3\vec{x} \psi_2^*(t, \vec{x}) \psi_1(t, \vec{x}). \quad (4.14)$$

4.2.3 Courant de probabilité

Partant de la définition du recouvrement (4.8), il est naturel de définir la densité de probabilité comme

$$\rho(\vec{x}, t) = i \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \phi \right), \quad (4.15)$$

réelle comme il se doit.

Cependant, on a $\rho < 0$ pour une solution à énergie négative, ce qui est gênant pour une probabilité. Mais nous n'avons pas encore d'interprétation physique pour les solutions à énergie négative, donc nous laissons ce problème de côté pour l'instant.

On définit le courant de probabilité par

$$\vec{j}(x) = -i \left(\phi^* \vec{\nabla} \phi - (\vec{\nabla} \phi^*) \phi \right). \quad (4.16)$$

En utilisant l'équation (4.12), on vérifie qu'il coïncide, dans la limite non relativiste, avec le courant défini pour l'équation de Schrödinger.

La densité $\rho(x)$ et le courant $\vec{j}(x)$ forment un quadrivecteur $j^\mu = (\rho, \vec{j})$:

$$j^\mu(x) = i (\phi^* \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^*) \phi) \quad (4.17)$$

La conservation de la probabilité s'exprime par la conservation de ce courant:

$$\partial_\mu j^\mu(x) = i (\phi^* \square \phi - (\square \phi^*) \phi) = 0 \quad (4.18)$$

en utilisant l'équation de Klein–Gordon (4.4).

Pour l'onde plane (4.11), le courant, calculé au moyen de l'équation (4.17), est une constante:

$$j^\mu(x) = \frac{1}{2|E|V} 2p^\mu. \quad (4.19)$$

Le courant et la densité sont donc reliés par $\vec{j} = \rho \vec{p}/E = \rho \vec{v}$, où $\vec{v} = \vec{p}/E$ désigne la vitesse de groupe de l'onde plane, qui correspond à la vitesse des particules classiques.

4.3 Couplage au champ électromagnétique

Pour faire de la physique intéressante, il faut mettre des interactions, que nous voulons d'autre part compatibles avec la relativité. Dans les deux sections qui suivent, nous examinons le cas de l'interaction avec un champ électromagnétique. Un autre type d'interaction, plus simple, sera étudié dans l'exercice 4.8.6.

4.3.1 Forme de l'équation d'onde

Pour une particule de charge e dans un champ électromagnétique $A^\mu(x)$, la relation entre énergie et impulsion est donnée par (2.66). En appliquant la règle de correspondance $p^\mu \rightarrow i\partial^\mu$, on est donc amené à écrire l'équation d'onde sous la forme

$$(i\partial^\mu - eA^\mu(x))(i\partial_\mu - eA_\mu(x))\phi(x) = m^2\phi(x), \quad (4.20)$$

soit encore, en introduisant la dérivée covariante définie par $D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu(x)$,

$$(D_\mu D^\mu + m^2)\phi(x) = 0. \quad (4.21)$$

En développant, cette équation se réécrit

$$(\square + m^2)\phi = -ie (\partial_\mu(A^\mu \phi) + A^\mu \partial_\mu \phi) + e^2 A^\mu A_\mu \phi \quad (4.22)$$

où le second membre décrit le couplage au champ électromagnétique.

Il est important de connaître la dimension des diverses quantités intervenant dans l'équation (4.20). Dans le système d'unité où $\hbar = c = \epsilon_0 = 1$, A^μ a la dimension d'une énergie: en effet, $\vec{E}^2/2$ est la densité d'énergie par unité de volume, homogène à $[E]^4$, donc \vec{E} est homogène à $[E]^2$ et V et \vec{A} à $[E]$. Ceci implique que la charge e est sans dimension: $e^2/(4\pi) = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) \simeq 1/137,036$ est dite constante de structure fine. Le fait que e soit petit devant 1 est fondamental: il nous permettra de faire des développements en puissance de e , c'est à dire de la théorie de perturbations.

4.3.2 Invariance de jauge

La transformation

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= \phi(x)e^{-ie\Lambda(x)} \\ A'^\mu(x) &= A^\mu(x) + \partial^\mu\Lambda(x),\end{aligned}\tag{4.23}$$

avec $\Lambda(x)$ arbitraire, laisse inchangée l'équation de Klein–Gordon, comme on le vérifie aisément en regardant la transformation de la dérivée covariante D_μ :

$$D'_\mu\phi' = (\partial_\mu + ieA'_\mu)\phi' = e^{-ie\Lambda}(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi = e^{-ie\Lambda}D_\mu\phi.\tag{4.24}$$

Le courant de probabilité est alors donné par l'équation (4.17), en remplaçant la dérivée ∂_μ par la dérivée covariante D_μ . On notera que le courant de probabilité est invariant de jauge.

4.4 Diffusion par un potentiel

Nous allons calculer l'amplitude de diffusion d'une particule de Klein–Gordon par un champ électromagnétique donné $A^\mu(x)$, traité comme une petite perturbation. Nous rappelons d'abord la théorie des perturbations du temps au premier ordre pour l'équation de Schrödinger, puis nous étendrons cette étude à l'équation de Klein–Gordon.

4.4.1 Rappels sur l'équation de Schrödinger

Pour une particule non relativiste soumise à un potentiel pouvant dépendre du temps $W(x)$, l'équation de Schrödinger s'écrit

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - H_0\right)|\psi\rangle = W|\psi\rangle\tag{4.25}$$

où l'on a noté $H_0 = -\Delta/2m$ le hamiltonien libre. Nous allons calculer l'amplitude de diffusion d'une particule par le potentiel $W(x)$, au premier ordre en $W(x)$. On suppose que pour $t \rightarrow -\infty$, $|\psi\rangle$ est une solution de l'équation de Schrödinger libre, notée $|\psi_i\rangle$, et on va calculer la probabilité d'être dans un autre état libre, noté $|\psi_f\rangle$, à $t \rightarrow +\infty$. Ces deux états sont respectivement notés états “in” (entrant) et “out” (sortant).

Il faut donc calculer l'amplitude de transition

$$\mathcal{A}_{fi} = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \psi_f | \psi \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_t d^3\vec{x} \psi_f^*(x) \psi(x)\tag{4.26}$$

où ψ et ψ_f sont respectivement solutions de

$$\begin{aligned}\left(i\frac{\partial}{\partial t} - H_0\right)|\psi\rangle &= W|\psi\rangle \\ \left(i\frac{\partial}{\partial t} - H_0\right)|\psi_f\rangle &= 0.\end{aligned}\tag{4.27}$$

La deuxième équation se réécrit

$$\langle \psi_f | \left(-i\frac{\partial}{\partial t} - H_0\right) = 0\tag{4.28}$$

où la dérivée temporelle agit à gauche. Combinant les équations d'évolution de $|\psi\rangle$ et $\langle\psi_f|$, on obtient

$$i\frac{\partial}{\partial t}\langle\psi_f|\psi\rangle = \langle\psi_f|W|\psi\rangle. \quad (4.29)$$

Par intégration sur le temps, en supposant le recouvrement nul à $t = -\infty$ (l'état initial et l'état final différent), on en déduit l'amplitude de transition

$$\mathcal{A}_{fi} = -i \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle\psi_f|W|\psi\rangle = -i \int_t d^4x \psi_f^*(x)W(x)\psi(x). \quad (4.30)$$

Cette équation est exacte, mais on ne connaît pas la fonction d'onde $\psi(x)$. On va supposer que ψ coïncide avec l'onde incidente ψ_i . On obtient alors le résultat suivant, correct au premier ordre dans la perturbation $W(x)$:

$$\mathcal{A}_{fi} = -i \int_t d^4x \psi_f^*(x)W(x)\psi_i(x). \quad (4.31)$$

4.4.2 Extension à l'équation de Klein–Gordon

Considérons l'équation

$$(\square + m^2)\phi(x) = -W(x)\phi(x), \quad (4.32)$$

où $W(x)$ désigne un opérateur agissant sur ϕ (notons que $W(x)$ ne correspond pas à une énergie potentielle: sa dimension est $[E]^2$ au lieu de $[E]$). En raisonnant de la même façon que pour l'équation de Schrödinger, on suppose que pour $t \rightarrow -\infty$, ϕ est une onde libre $\phi_i(x)$, et on va calculer la probabilité d'être dans une autre onde libre, notée $\phi_f(x)$, pour $t \rightarrow \infty$.

D'après la définition du recouvrement pour l'équation de Klein–Gordon (4.8), l'amplitude de transition s'écrit cette fois

$$\mathcal{A}_{fi} = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_t d^3\vec{x} i \left(\phi_f^* \frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{\partial\phi_f^*}{\partial t} \phi \right) \quad (4.33)$$

où ϕ et ϕ_f sont respectivement solutions de

$$\begin{aligned} (\square + m^2)\phi &= -W\phi \\ (\square + m^2)\phi_f &= 0. \end{aligned} \quad (4.34)$$

On a par conséquent

$$\phi_f^* \square \phi - (\square \phi_f^*) \phi = -\phi_f^* W \phi. \quad (4.35)$$

En intégrant sur tout l'espace-temps et en utilisant l'équation (3.23), il vient

$$\left[\int_t d^3\vec{x} i \left(\phi_f^* \frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{\partial\phi_f^*}{\partial t} \phi \right) \right]_{t=-\infty}^{t=+\infty} = -i \int d^4x \phi_f^* W \phi. \quad (4.36)$$

Si le recouvrement est nul pour $t \rightarrow -\infty$, l'amplitude de transition s'écrit

$$\mathcal{A}_{fi} = -i \int d^4x \phi_f^* W \phi. \quad (4.37)$$

Notons qu'avec les conventions choisies, le résultat est identique à celui obtenu pour l'équation de Schrödinger, Eq.(4.30).

C'est une formule exacte, mais on ne connaît pas $\phi(x)$. Au premier ordre dans la perturbation $W(x)$, on peut remplacer ϕ par ϕ_i , d'où

$$\mathcal{A}_{fi} = -i \int d^4x \phi_f^* W \phi_i. \quad (4.38)$$

4.4.3 Diffusion par un champ électromagnétique

Au premier ordre en A^μ , l'équation de Klein–Gordon en présence d'un champ électromagnétique, Eq.(4.22), s'écrit sous la forme (4.32) avec $W = ie(\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu)$. L'amplitude de transition au premier ordre est donnée par (4.38):

$$\mathcal{A}_{fi} = e \int d^4x \left(\phi_f^* \partial^\mu (A_\mu \phi_i) + \phi_f^* A_\mu \partial^\mu \phi_i \right). \quad (4.39)$$

En intégrant le premier terme par parties, en supposant que A^μ s'annule pour $t = \pm\infty$, on peut mettre l'amplitude sous la forme

$$\mathcal{A}_{fi} = -i \int d^4x j^\mu(x) A_\mu(x) \quad (4.40)$$

où l'on a introduit le courant de transition

$$j^\mu(x) = ie \left(\phi_f^* \partial^\mu \phi_i - (\partial_\mu \phi_f^*) \phi_i \right), \quad (4.41)$$

qui, au facteur e près, ressemble à un courant de probabilité (4.17) mélangeant ϕ_i et ϕ_f .

4.4.4 Invariance de jauge

En utilisant les équations du mouvement de ϕ_i et ϕ_f , $(\square + m^2)\phi_i = (\square + m^2)\phi_f = 0$, on montre aisément que le courant de transition (4.41) est un courant conservé:

$$\partial_\mu j^\mu = -ie \left(\phi_f^* \square \phi_i - (\square \phi_f^*) \phi_i \right) = 0. \quad (4.42)$$

On en déduit que l'amplitude de transition est invariante dans la transformation de jauge $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$, avec $\Lambda(x)$ arbitraire, nulle à l'infini. La variation de l'amplitude dans cette transformation est en effet donnée par (4.40):

$$\delta \mathcal{A}_{fi} = -i \int d^4x j^\mu(x) \partial_\mu \Lambda(x). \quad (4.43)$$

En intégrant par parties, en utilisant que $\Lambda(x)$ est nulle à l'infini,

$$\delta \mathcal{A}_{fi} = i \int d^4x (\partial_\mu j^\mu(x)) \Lambda(x) = 0. \quad (4.44)$$

La conservation du courant de transition est donc intimement liée à l'invariance de jauge de l'équation.

4.4.5 Diagramme de Feynman

Choisissons pour ϕ_i et ϕ_f des ondes planes normalisées, d'impulsions respectives p_i et p_f :

$$\begin{aligned}\phi_i(x) &= \frac{1}{\sqrt{2|E_i|V}} e^{-ip_i^\mu x_\mu} \\ \phi_f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2|E_f|V}} e^{-ip_f^\mu x_\mu}.\end{aligned}\quad (4.45)$$

Le courant de transition (4.41) vaut alors

$$j^\mu(x) = e \left(p_i^\mu + p_f^\mu \right) e^{-i(p_i - p_f) \cdot x} \frac{1}{\sqrt{2V|E_i|}} \frac{1}{\sqrt{2V|E_f|}} \quad (4.46)$$

et l'amplitude de transition (4.40) s'écrit

$$\mathcal{A}_{fi} = -ie \left(p_i^\mu + p_f^\mu \right) \tilde{A}_\mu(p_f - p_i) \frac{1}{\sqrt{2V|E_i|}} \frac{1}{\sqrt{2V|E_f|}} \quad (4.47)$$

où l'on a fait apparaître la transformée de Fourier du champ électromagnétique, définie par l'équation (3.4).

Retenons que l'amplitude de transition est le produit des facteurs de normalisation $1/\sqrt{2|E|V}$ par une quantité scalaire de Lorentz et indépendante du volume de normalisation, dite amplitude réduite.

Ce processus se représente par le diagramme de Feynman de la figure 4.1. On représente le champ électromagnétique par une ligne ondulée. La croix marque le fait qu'il s'agit d'un champ extérieur donné. La particule scalaire est représentée par des tirets, avec une flèche donnant le sens de propagation de la charge électrique. L'intersection entre les deux lignes, dite "vertex", représente l'interaction entre la particule et le champ.

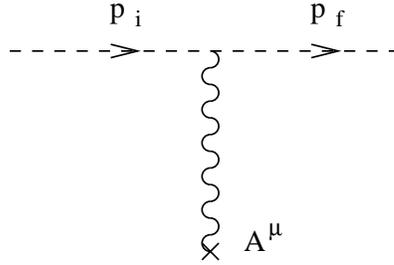


FIG. 4.1 - Diagramme de Feynman de la diffusion coulombienne.

Les règles de Feynman permettent, à partir d'un diagramme, de calculer l'amplitude réduite correspondante, qui s'écrit comme le produit de poids associés aux diverses parties du diagramme (vertex, lignes externes, lignes internes quand il y en a). De ce processus, nous pouvons déduire nos premières règles de Feynman: le poids associé au vertex d'interaction électromagnétique d'une particule scalaire est $-ie(p_i^\mu + p_f^\mu)$. Le poids associé au champ extérieur est $\tilde{A}_\mu(p_f - p_i)$. C'est lui qui apporte la différence d'impulsion $p_f - p_i$. L'énergie et l'impulsion sont ainsi conservés aux vertex, comme le courant électrique aux nœuds d'un circuit. Enfin, le poids des lignes externes des particules scalaires est simplement 1.

4.5 Section efficace de diffusion

Nous allons calculer la section efficace de diffusion par une charge ponctuelle fixe située en $\vec{x} = \vec{0}$. Rappelons que la section efficace est le nombre de diffusions par unité de temps, divisé par le flux de particules incident. Pour calculer le nombre de diffusions par unité de temps, il faut calculer la probabilité de transition par unité de temps vers un état final donné, puis multiplier par le nombre d'états finals possibles.

4.5.1 Amplitude de transition

Pour un champ indépendant du temps $A^\mu(\vec{x})$, la transformée de Fourier (3.4) se réduit à

$$\tilde{A}^\mu(\omega, \vec{k}) = 2\pi\delta(\omega)\tilde{A}^\mu(\vec{k}) \quad (4.48)$$

où $\tilde{A}^\mu(\vec{k})$ désigne la transformée de Fourier spatiale du champ:

$$\tilde{A}^\mu(\vec{k}) = \int d^3\vec{x} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} A^\mu(\vec{x}). \quad (4.49)$$

En remplaçant (4.48) dans l'équation (4.47), on en déduit qu'il y a conservation de l'énergie lorsque le champ est indépendant du temps. On retrouve ainsi un résultat familier de la théorie des perturbations en mécanique quantique.

Si le champ est purement électrostatique, l'amplitude de transition devient, pour des états d'énergie positive (pour lesquels $E = |E|$):

$$\mathcal{A}_{fi} = -\frac{ie}{V}\tilde{A}^0(\vec{p}_f - \vec{p}_i)2\pi\delta(E_f - E_i). \quad (4.50)$$

Dans le cas particulier d'un champ créé par une charge ponctuelle fixe $-e$ située à l'origine, $\vec{A}(\vec{x}) = \vec{0}$ et $A^0(\vec{x})$ est déterminé par l'équation de Poisson

$$\Delta A^0(\vec{x}) = -j^0(\vec{x}) = e\delta^3(\vec{x}). \quad (4.51)$$

On connaît bien sûr la solution, qui est

$$A^0(\vec{x}) = -\frac{e}{4\pi|\vec{x}|}. \quad (4.52)$$

Mais ce qui nous intéresse ici est plutôt la transformée de Fourier, qui se déduit immédiatement de (4.51):

$$\tilde{A}^0(\vec{k}) = -\frac{e}{|\vec{k}|^2}. \quad (4.53)$$

4.5.2 Probabilité de transition

La probabilité de transition est $|\mathcal{A}_{fi}|^2$. Mais on ne peut pas élever au carré $\delta(\omega)$. L'origine physique de ce problème est qu'une onde plane correspond à un flux incident continu de particules. La bonne quantité à calculer n'est donc pas la probabilité totale de transition, mais la probabilité de transition par unité de temps. Il faut donc raisonner sur un laps de temps fini T , et remplacer dans l'équation (4.50) la distribution de Dirac par son expression intégrale:

$$2\pi\delta(\omega) = \int_0^T e^{i\omega t} dt. \quad (4.54)$$

On peut alors calculer le module au carré

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T e^{i\omega t} dt \right|^2 &= \int_0^T e^{i\omega t} dt \int_0^T e^{-i\omega t} dt \\ &= 2\pi\delta(\omega) T. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Nous avons écrit le premier facteur sous la forme $2\pi\delta(\omega)$, et le deuxième facteur vaut simplement T si $\omega = 0$. On en déduit donc la probabilité de transition par unité de temps vers l'état f :

$$\frac{dp_{fi}}{dt} = \frac{|A_{fi}|^2}{T} = \frac{e^2}{V^2} \left| \tilde{A}_0(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \right|^2 2\pi\delta(E_f - E_i) \quad (4.56)$$

4.5.3 Nombre de transitions

Pour obtenir le nombre de transitions par unité de temps, il faut multiplier (4.56) par le nombre d'états finals possibles. Dans l'élément d'espace des impulsions $d^3\vec{p}_f$, ce nombre vaut $V d^3\vec{p}_f / (2\pi)^3$. Le module de l'impulsion est fixé par la condition de conservation de l'énergie. On choisit donc pour variable l'énergie en écrivant $d^3\vec{p}_f = p_f^2 dp_f d\Omega = p_f E_f dE_f d\Omega$ (on a utilisé la relation $E_f^2 = p_f^2 + m^2$). Ce choix de variable est souvent utile pour simplifier les calculs. En intégrant sur E_f , on obtient l'expression suivante pour le nombre de diffusions dans l'angle solide $d\Omega$ par unité de temps:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{e^2}{(2\pi)^2 V} \left| \tilde{A}_0(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \right|^2 p_f E_f d\Omega. \quad (4.57)$$

4.5.4 Formule de Rutherford relativiste

Pour obtenir la section efficace, il reste à diviser par le flux incident, qui est le nombre de particules traversant une unité de surface perpendiculaire à la direction incidente par unité de temps. Ici, nous avons une seule particule incidente, de vitesse \vec{v}_i , dans une boîte de volume V . On vérifie (en prenant une boîte rectangulaire) que le flux vaut $|\vec{v}_i|/V$. On en déduit la section efficace

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{e^2}{(2\pi)^2 v_i} \left| \tilde{A}_0(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \right|^2 p_i E_i \\ &= \frac{e^2 E^2}{(2\pi)^2} \left| \tilde{A}_0(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \right|^2 \end{aligned} \quad (4.58)$$

où l'on a posé $E \equiv E_i = E_f$. Le résultat, comme il se doit, est indépendant du volume V arbitraire choisi pour effectuer le calcul.

Pour la diffusion par une charge ponctuelle, le champ diffuseur est donné par l'équation (4.53). Le transfert d'impulsion s'exprime en fonction de l'angle de diffusion θ entre \vec{p}_i et \vec{p}_f suivant $|\vec{p}_f - \vec{p}_i| = 2p \sin \theta/2$. On en déduit le résultat final

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 E^2}{4p^4 \sin^4 \theta/2} \quad (4.59)$$

avec $\alpha = e^2/4\pi$. Cette formule généralise au cas relativiste la formule de Rutherford.

4.6 Antiparticules

4.6.1 Interprétation de Feynman

Stueckelberg (1941) et Feynman (1949) ont proposé l'interprétation suivante des états d'énergie négative dans les processus de diffusion:

Une particule d'énergie $-E$ et d'impulsion $-\vec{p}$ dans l'état initial (resp. final) est en fait une antiparticule d'énergie E et d'impulsion \vec{p} dans l'état final (resp. initial).

Cette interprétation est compatible avec la conservation de l'énergie et de l'impulsion. Elle est aussi compatible avec la conservation de la charge si on associe à l'antiparticule une charge $-e$. Ceci permet de réinterpréter le courant (4.17) comme le courant électrique divisé par e : il correspond bien au courant de probabilité pour un état d'énergie positive, mais à l'opposé pour un état d'énergie négative.

4.6.2 Création de paires

Pour illustrer ce qui précède par un exemple, reprenons l'amplitude de transition dans un champ électromagnétique (4.47). Si $E_i < 0$ et $E_f > 0$, on l'interprétera comme l'amplitude de création d'une paire, d'une particule d'impulsion $p_1^\mu \equiv p_f^\mu$ et d'une antiparticule d'impulsion $p_2^\mu \equiv -p_i^\mu$. L'amplitude (4.47) devient

$$\mathcal{A}_{fi} = -ie (p_1^\mu - p_2^\mu) \tilde{A}_\mu(p_2 + p_1) \frac{1}{\sqrt{2V|E_1|}} \frac{1}{\sqrt{2V|E_2|}} \quad (4.60)$$

Ce processus est représenté par le même diagramme de Feynman que la diffusion coulombienne, Figure 4.1.

Quelques remarques: 1) tout d'abord, la pulsation du champ, qui vaut $E_1 + E_2$, doit donc être supérieure à $2m$ pour qu'il y ait création de paires, soit dans le système d'unités usuel $\omega > 2mc^2/\hbar \sim 10^{21} s^{-1}$, des ordres de grandeur au dessus des champs que l'on sait réaliser en laboratoire. Cependant, le calcul n'est pas totalement académique: la même amplitude apparaît quand on étudie la désintégration d'une particule de spin 1 massive (par exemple le boson Z^0) en deux scalaires plus légers. 2) On remarquera que dans le référentiel du centre de masse de la paire créée, où $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0}$, la direction de \vec{p}_1 est corrélée à la direction de polarisation du champ électromagnétique puisque $(p_1^\mu - p_2^\mu) \tilde{A}_\mu = -2\vec{p}_1 \cdot \vec{A}$. On émet plus facilement des paires parallèlement à la polarisation.

Le nombre moyen de paires créées se calcule en sommant les probabilités élémentaires sur tous les états possibles:

$$P = \int \frac{V d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{V d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3} |\mathcal{A}_{fi}|^2. \quad (4.61)$$

En remplaçant l'amplitude par son expression, on aboutit au résultat final

$$P = \int \frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} \left| e (p_2^\mu - p_1^\mu) \tilde{A}_\mu(p_1 + p_2) \right|^2. \quad (4.62)$$

Le résultat est bien indépendant du volume V choisi pour effectuer le calcul. D'autre part, cette expression est invariante de Lorentz. Pour le montrer, il suffit de vérifier que $d^3\vec{p}/E$

est invariant de Lorentz. En utilisant l'équation (3.17), nous pouvons le récrire sous la forme

$$\frac{d^3\vec{p}}{2E} = \int_{p^0} d^4p \delta(p^\mu p_\mu - m^2) \theta(p^0). \quad (4.63)$$

Le membre de droite est manifestement invariant de Lorentz. La probabilité de création de paires est donc bien indépendante du référentiel choisi pour la calculer. Le calcul de l'intégrale sur \vec{p}_1 et \vec{p}_2 est l'objet de l'exercice 4.8.5.

4.6.3 Conjugaison de charge

A une solution $\phi(x)$ de l'équation (4.20), on associe la fonction $\phi_c(x)$ définie par $\phi_c(x) \equiv \pm\phi^*(x)$. Le signe est a priori arbitraire, on le choisit en fonction du contexte. Cette conjugaison complexe change le signe de l'impulsion et de l'énergie. D'autre part, $\phi_c(x)$ est solution de l'équation (4.20) où e est changé en $-e$. Enfin, la conjugaison de charge (notée C) est une transformation involutive: en l'effectuant deux fois, on retombe sur la fonction de départ.

Cette transformation échange particule et antiparticule, et montre donc qu'elles jouent des rôles symétriques.

4.6.4 Particule autoconjuguée

On peut imposer que la fonction d'onde de Klein–Gordon $\phi(x)$ coïncide avec sa conjuguée de charge, c'est à dire qu'elle soit réelle. En l'absence d'interaction, la solution générale est alors une superposition linéaire de solutions de la forme $e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x}-Et)} + e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{x}-Et)}$. Les probabilités de trouver une particule ou une antiparticule d'impulsion donnée sont identiques. Il n'y a plus lieu de distinguer particule et antiparticule. Ces fonctions sont donc adaptées à la description des particules qui sont leur propre antiparticule. comme par exemple le pion neutre π^0 .

Peut-on imposer que $\phi(x)$ soit réelle en présence d'interactions? Si la particule porte une charge électrique, on sait que particule et antiparticules diffèrent, puisqu'elles portent des charges opposées. Ceci se voit également sur l'équation du mouvement (4.22), où la fonction d'onde acquiert une partie imaginaire à cause du facteur i . Par contre, $\phi(x)$ reste réelle en présence de l'interaction scalaire (4.92) étudiée dans l'exercice 4.8.6.

4.7 Perturbations d'ordre supérieur

Revenons à la forme générale de l'équation de Klein–Gordon en présence d'une perturbation, Eq.(4.32). Nous avons obtenu pour l'amplitude de transition vers un état libre $\phi_f(x)$ une formule au premier ordre en $W(x)$, Eq.(4.38). Nous allons maintenant voir comment calculer les ordres supérieurs. Pour cela, nous devons au préalable définir le propagateur de l'équation de Klein–Gordon.

4.7.1 Propagateur de Klein–Gordon

On définit le propagateur $G(x)$ de l'équation de Klein–Gordon de façon analogue à celui de l'équation de Maxwell, Eq.(3.1). La différence essentielle provient du terme de masse.

D'autre part, nous choisissons un signe approprié à la résolution de l'équation (4.32), où la perturbation $W(x)$ apparaît avec un signe négatif dans le second membre:

$$(\square + m^2) G(x) = -\delta^{(4)}(x). \quad (4.64)$$

Ceci se réécrit en transformée de Fourier

$$\tilde{G}(p) = \frac{1}{E^2 - \vec{p}^2 - m^2} = \frac{1}{p^\mu p_\mu - m^2}, \quad (4.65)$$

avec une ambiguïté dans le choix du propagateur lorsque le dénominateur s'annule, soit lorsque $E = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. En suivant la même démarche que pour l'équation de Maxwell (section 3.3), on montre que le propagateur retardé, nul pour $t < 0$ en tout point, s'écrit

$$\tilde{G}(p) = \frac{1}{(E + i\epsilon)^2 - \vec{p}^2 - m^2}. \quad (4.66)$$

Nous ne ferons pas le calcul explicite de $G_{\text{ret}}(x)$, qui conduit à une expression plus compliquée que pour l'équation de Maxwell, en raison de la masse (la propagation ne se fait plus à la vitesse de la lumière) et présente peu d'intérêt pour les calculs de diagrammes qui, on l'a vu, font apparaître des transformées de Fourier quand on intègre sur x , puisqu'on choisit des ondes planes pour les particules entrantes et sortantes.

4.7.2 Application aux calculs de perturbation

Voyons maintenant comment on peut utiliser le propagateur pour résoudre

$$(\square + m^2)\phi(x) = -W(x)\phi(x). \quad (4.67)$$

Vérifions tout d'abord que si la perturbation $W(x)$ s'annule pour $t \rightarrow -\infty$, et si $\phi(x)$ tend vers $\phi_i(x)$, onde libre, alors $\phi(x)$ est donné par

$$\phi(x) = \phi_i(x) + \int d^4x' G_{\text{ret}}(x - x')W(x')\phi(x'). \quad (4.68)$$

On vérifie immédiatement que $\phi(x)$ ainsi défini est bien solution de (4.67) en appliquant l'opérateur $\square_x + m^2$, en utilisant (4.64) et l'équation du mouvement $(\square + m^2)\phi_i = 0$. D'autre part, $\phi(x)$ vérifie bien la condition aux limites $\phi(x) \rightarrow \phi_i(x)$ en $t \rightarrow -\infty$ puisque W s'annule par hypothèse et G_{ret} est nul pour $t < 0$.

On n'a cependant pas résolu l'équation puisque la fonction inconnue ϕ apparaît dans le second membre de (4.68). Cependant, on peut remplacer ϕ dans le second membre en utilisant une fois de plus l'équation:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi_i(x) + \int d^4x' G_{\text{ret}}(x - x')W(x')\phi_i(x') \\ &\quad + \int d^4x' d^4x'' G_{\text{ret}}(x - x')W(x')G_{\text{ret}}(x' - x'')W(x'')\phi(x'') \end{aligned} \quad (4.69)$$

et ainsi de suite. On obtient ainsi un développement en puissances de la perturbation W . L'expression de l'amplitude de transition (4.37) devient ainsi

$$A_{fi} = -i \int d^4x \phi_f^*(x)W(x)\phi_i(x)$$

$$-i \int d^4x d^4x' \phi_f^*(x) W(x) G_{\text{ret}}(x-x') W(x') \phi_i(x') + \dots \quad (4.70)$$

et ainsi de suite. Le deuxième terme se comprend de la façon suivante: la particule incidente interagit en x' avec la perturbation, puis se propage librement depuis x' jusqu'en x (d'où le propagateur), et interagit une seconde fois en x .

Les mêmes formules décrivent la théorie de perturbations dépendant du temps pour l'équation de Schrödinger, si on remplace le propagateur par celui de l'équation de Schrödinger.

Nous allons maintenant récrire l'amplitude en prenant pour ϕ_i et ϕ_f les ondes planes (4.45). On représente le propagateur par sa transformée de Fourier:

$$G(x-x') = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iq \cdot (x-x')} \tilde{G}(q). \quad (4.71)$$

Nous supposons pour plus de simplicité que $W(x)$ est un nombre, c'est à dire qu'il ne contient pas d'opérateur de dérivation comme dans le cas de l'interaction électromagnétique. En intégrant (4.70) sur x et x' , on voit alors apparaître la transformée de Fourier de $W(x)$:

$$\mathcal{A}_{fi} = -i \tilde{W}(p_f - q) \tilde{G}(q) \tilde{W}(q - p_i) \frac{1}{\sqrt{2V|E_i|}} \frac{1}{\sqrt{2V|E_f|}}. \quad (4.72)$$

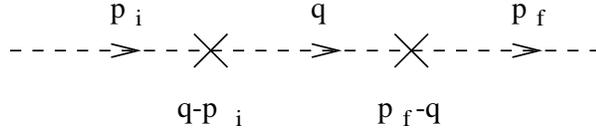


FIG. 4.2 - Diffusion au second ordre.

Cette amplitude se représente par le diagramme de Feynman de la figure 4.2. Les croix représentent les interactions avec la perturbation, qui apporte la différence d'impulsion. Elles contribuent un poids \tilde{W} . La ligne pointillée entre les deux croix représente la propagation de la particule entre les deux interactions, à laquelle est associée le poids $\tilde{G}(q)$.

4.7.3 Propagateur de Feynman

D'après l'interprétation des états d'énergie négative en termes d'antiparticules, une antiparticule sortante est représentée par une solution d'énergie négative dans l'état initial. Si on veut respecter un principe de causalité, il faut donc utiliser la fonction de Green avancée et non retardée pour les états d'énergie négative. Il faut donc placer le pôle d'énergie négative au-dessus de l'axe réel, c'est à dire choisir

$$\tilde{G}_F(E, \vec{p}) = \frac{-1}{(E + i\epsilon \text{signe}(E))^2 - \vec{p}^2 - m^2} \quad (4.73)$$

qui se récrit plus simplement

$$\tilde{G}_F(E, \vec{p}) = \frac{-1}{E^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{-1}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (4.74)$$

dit *propagateur de Feynman*. Ce propagateur joue un rôle fondamental en théorie des champs. Remarquons qu'il s'exprime comme une fonction analytique de la variable p^2 , ce qui n'est pas le cas du propagateur retardé.

Bien qu'il s'agisse d'un point important pour la théorie, le choix du propagateur n'a aucune importance pour les calculs de perturbation à l'ordre le plus bas (diagrammes sans boucles internes). pour lesquels on n'a jamais $p^2 = m^2$ sur les lignes internes portant un propagateur.

4.8 Exercices et problèmes

L'exercice 4.8.1 présente une formulation hamiltonienne de l'équation de Klein–Gordon. Les exercices 4.8.2 à 4.8.4 présentent des exemples de solutions exactes de l'équation de Klein–Gordon, qui généralisent au cas relativiste des résultats familiers de la mécanique quantique. L'exercice 4.8.5 complète le calcul de création de paires effectué dans la section 4.6. Enfin, l'exercice 4.8.6 reprend l'étude des sections 4.4 et 4.5 en remplaçant l'interaction électromagnétique par une interaction scalaire.

4.8.1 Hamiltonien de Klein–Gordon

Il est possible de récrire l'équation de Klein Gordon sous forme hamiltonienne (Feschbach et Villars, Rev. Mod. Phys. 30 (1958) 24). Partant d'une solution $\phi(x)$ de l'équation de Klein–Gordon libre, on définit la fonction d'onde à deux composantes

$$\psi \equiv \begin{pmatrix} \theta \equiv \sqrt{\frac{m}{2}} \left(\phi + \frac{i}{m} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \\ \chi \equiv \sqrt{\frac{m}{2}} \left(\phi - \frac{i}{m} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \end{pmatrix}. \quad (4.75)$$

1. Montrer que ψ satisfait à une équation de Schrödinger de hamiltonien

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \frac{-\Delta}{2m} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} m. \quad (4.76)$$

On remarquera que ce hamiltonien n'est pas hermitique, ce qui entraîne que la probabilité $\int d^3\vec{x} \psi^\dagger \psi = \int d^3\vec{x} (|\theta|^2 + |\chi|^2)$ n'est pas conservée au cours du temps.

2. Comment s'exprime la densité de probabilité (4.15) en fonction de θ et χ ?
3. Que deviennent θ et χ pour une solution d'énergie positive dans la limite non relativiste?

4.8.2 Marche de potentiel

On considère l'équation de Klein–Gordon à une dimension d'espace avec une énergie potentielle électrostatique $V(x)$, définie par $V(x) = 0$ si $x < 0$ et $V(x) = V > 0$ si $x > 0$. Par analogie avec l'équation de Schrödinger, on s'attend à ce qu'une particule d'énergie positive venant de la gauche soit totalement réfléchiée si son énergie cinétique est inférieure à la marche de potentiel V , soit si $V > E - m$. Nous allons voir que ce n'est pas toujours le cas.

Nous allons étudier la réflexion d'une onde monochromatique d'énergie E . On écrit la valeur de ϕ pour $x < 0$ sous la forme

$$\phi(t, x) = e^{i(px-Et)} + r e^{-i(px-Et)}, \quad (4.77)$$

et pour $x > 0$ sous la forme

$$\phi(t, x) = te^{i(p'x - Et)}, \quad (4.78)$$

où r et t sont des coefficients complexes constants.

1. Calculer p et p' en fonction de E . A quelle condition sur V a-t-on p' imaginaire pur? Que se passe-t-il alors physiquement?

2. Expliquer pourquoi ϕ et $\partial\phi/\partial x$ doivent être continues pour $x = 0$. En déduire que

$$r = \frac{p - p'}{p + p'}. \quad (4.79)$$

On notera que l'équation de Schrödinger conduit au même résultat. Nous admettrons que la fraction d'énergie réfléchie est $|r|^2$. A quelle condition sur V y a-t-il réflexion totale?

4.8.3 Niveaux de Landau

On se propose de calculer les niveaux d'énergie d'une particule scalaire de charge e placée dans un champ magnétique uniforme et constant.

1. On choisit $\vec{A} = (0, Bx, 0)$. Calculer le champ magnétique \vec{B} .

2. Ecrire l'équation de Klein–Gordon en présence de ce champ. On cherche une solution de la forme

$$\varphi(t, x, y, z) = e^{i(p_y y + p_z z - Et)} f(x). \quad (4.80)$$

Etablir l'équation vérifiée par $f(x)$.

3. Montrer qu'on peut se ramener, par un changement d'origine, à une équation du type

$$\left(-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \omega^2 x^2 \right) f_1(x) = \varepsilon f_1(x), \quad (4.81)$$

qui est l'équation de Schrödinger pour un oscillateur harmonique à une dimension. On sait alors que les valeurs possibles de ε sont non dégénérées, égales à $(n + 1/2)\omega$ avec n entier positif ou nul. En déduire les niveaux d'énergie (niveaux de Landau).

4. Que représentent physiquement p_y et p_z ? Comment les résultats obtenus seraient-ils modifiés si l'on avait choisi la jauge $\vec{A} = (-By, 0, 0)$?

4.8.4 Atome d'hydrogène

On sait que l'équation de Klein–Gordon est l'équation d'onde d'une particule scalaire (sans spin) et ne peut donc décrire correctement l'électron. Cependant, le calcul du spectre de l'atome d'hydrogène dans le cadre de l'équation de Klein–Gordon est simple et instructif. Dans tout ce problème, on se place dans la limite où le proton est infiniment lourd, et peut être considéré comme une charge fixe et ponctuelle, choisie pour origine des coordonnées.

1. Rappels sur l'équation de Schrödinger:

Montrer que pour un état stationnaire de l'atome d'hydrogène, la partie radiale de l'équation de Schrödinger peut s'écrire sous la forme adimensionnée :

$$\left[-\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \frac{\lambda(\lambda+1)}{\rho^2} - \frac{2}{\rho} \right] \psi(\rho) = \epsilon \psi(\rho) \quad (4.82)$$

ψ étant la partie radiale de la fonction d'onde. Exprimer ϵ , λ , ρ en fonction des quantités physiques. Nous admettrons (cf. Cohen-Tannoudji, Mécanique quantique, tome 1, p. 805 sq.) que les valeurs négatives de ϵ sont non dégénérées et quantifiées par un entier n' strictement positif :

$$\epsilon_{n'} = -\frac{1}{(n' + \lambda)^2} \quad (4.83)$$

Dans le cas particulier de l'équation de Schrödinger, λ est un entier positif ou nul, et on définit $n = n' + \lambda$, qui est aussi entier, comme le nombre quantique principal. Cependant, le calcul qui mène de (4.82) à (4.83) n'utilise pas le fait que λ est entier, et le résultat (4.83) peut donc être utilisé dans un cas plus général.

2. Cas relativiste:

Pour un état stationnaire d'énergie E de l'atome d'hydrogène, montrer que l'équation de Klein-Gordon s'écrit

$$\left[\vec{p}^2 + m^2 - \left(E + \frac{\alpha}{r} \right)^2 \right] \psi(x) = 0 \quad (4.84)$$

avec $\alpha = e^2/4\pi$. Mettre cette équation sous la forme (4.82). Posant $\lambda = l - \delta_l$, l étant le nombre quantique orbital et δ_l une petite correction dont on donnera l'expression, en déduire que les niveaux d'énergie sont donnés par l'équation (2.76), mais avec une valeur un peu différente pour δ_l . Comment faudrait-il modifier les règles de quantification de Bohr-Sommerfeld pour obtenir le résultat exact ?

4.8.5 Création de paires

1. Pour calculer la probabilité de création de paires (4.62), il est naturel de prendre pour variable $q = p_1 + p_2$ car c'est le champ électromagnétique extérieur qui est donné. Récrire la probabilité sous la forme

$$P = e^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{A}_\mu(q) \tilde{A}_\nu^*(q) J^{\mu\nu}(q) \quad (4.85)$$

où

$$J^{\mu\nu}(q) = \int \frac{d^3 \vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p_1 - p_2) (p_1^\mu - p_2^\mu) (p_1^\nu - p_2^\nu). \quad (4.86)$$

2. Vérifier que

$$q_\mu J^{\mu\nu}(q) = 0. \quad (4.87)$$

Montrer que c'est une conséquence de l'invariance de jauge de l'amplitude de transition.

3. En utilisant des arguments de covariance, expliquer pourquoi $J^{\mu\nu}(q)$ est nécessairement de la forme $J^{\mu\nu}(q) = A(q)q^\mu q^\nu + B(q)g^{\mu\nu}$ où A et B sont des fonctions scalaires. Dédire alors de (4.87) que $J^{\mu\nu}(q)$ est de la forme

$$J^{\mu\nu}(q) = (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)C(q) \quad (4.88)$$

où $C(q)$ est une fonction scalaire qui reste à déterminer.

4. Exprimer en fonction de $\tilde{A}^\mu(q)$ la transformée de Fourier $\tilde{F}^{\mu\nu}(q)$ du champ électromagnétique $F^{\mu\nu}(x)$. Récrire la probabilité de création de paires en faisant apparaître $\tilde{F}^{\mu\nu}(q)\tilde{F}_{\mu\nu}^*(q)$.

5. On définit

$$I(q) \equiv \int \frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^4(q - p_1 - p_2). \quad (4.89)$$

Expliquer pourquoi $I(q)$ est un scalaire de Lorentz. On peut donc le calculer dans un référentiel où $\vec{q} = 0$ (pourquoi un tel référentiel existe-t-il?). Intégrer alors sur \vec{p}_2 puis sur \vec{p}_1 (on prendra comme variable d'intégration E_1 plutôt que p_1 , comme dans la section 4.5.3). Vérifier que

$$I(q) = \frac{1}{8\pi} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \theta(q^0 - 2m). \quad (4.90)$$

6. En utilisant (4.86), montrer que

$$g_{\mu\nu} J^{\mu\nu}(q) = (4m^2 - q^2)I(q). \quad (4.91)$$

En utilisant (4.88), en déduire la valeur de $C(q)$ puis la probabilité totale de création de paires.

4.8.6 Couplage à un potentiel scalaire

Soit un potentiel scalaire $U(x)$ et l'équation

$$\square\phi + (m + U(x))^2\phi = 0. \quad (4.92)$$

C'est simplement la version quantique du potentiel scalaire étudié dans l'exercice 2.6.10.

1. On suppose U uniforme et constant. Quelle est alors la relation entre E et p pour une onde plane? Dans la limite non relativiste où $|p| \ll m$ et $|U| \ll m$, que vaut l'énergie mécanique pour une particule? pour une antiparticule? Comparer avec un potentiel électrostatique constant.

2. Reprendre l'exercice 4.8.2 en remplaçant l'énergie potentielle électrostatique V par le potentiel scalaire U . Montrer que cette fois, il y a toujours réflexion totale si $U > E - m$.

3. Reprendre le calcul de diffusion de la section 4.4 avec cette interaction, au premier ordre en $U(x)$. Que vaut l'amplitude de transition réduite? Par comparaison avec l'équation (4.59), en déduire la section efficace de diffusion par un potentiel central $U(\vec{x}) = -1/(4\pi|\vec{x}|)$. Vérifier que le résultat coïncide avec (4.59) à la limite non relativiste. Comment s'explique cette coïncidence?

4. Calculer de même la probabilité de création de paires par le champ scalaire $U(x)$. Vérifier qu'elle s'écrit sous la forme

$$P = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} m^2 \tilde{U}(q) \tilde{U}^*(q) I(q) \quad (4.93)$$

où $I(q)$ est défini par l'équation (4.89).

Chapitre 5

Particule de spin 1/2

En 1928, Dirac est parvenu à écrire une équation d'onde pour des particules relativistes de spin 1/2 qui, sous sa forme la plus simple, décrit bien l'électron. Cette équation donnait une explication, dans le cadre de la théorie quantique moderne (et plus non de l'ancienne théorie des quanta) de la structure fine du spectre de l'atome d'hydrogène. D'autre part, elle a permis à Dirac de postuler l'existence des positons, antiparticules associées aux électrons, découverts dans l'étude du rayonnement cosmique dès 1933.

5.1 Particule libre

5.1.1 Construction de l'équation

L'équation de Klein–Gordon est une équation à une composante du second ordre en temps. On peut la récrire sous la forme d'une équation du premier ordre à deux composantes, qui correspondent aux deux signes de l'énergie (voir exercice 4.8.1). L'équation de Dirac, quant à elle, est une équation du premier ordre, mais à quatre composantes: elle décrit une particule qui a deux degrés de liberté de spin.

Pour la construire, nous suivons l'approche historique, qui est la plus rapide. On cherche une équation analogue à l'équation de Schrödinger:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi \quad (5.1)$$

où $\psi(x)$ est un spineur à quatre composantes complexes, qu'on écrit sous forme d'une matrice colonne:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

et le hamiltonien H est de la forme

$$H = \vec{\alpha} \cdot \vec{P} + \beta m, \quad (5.3)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et β désignant des matrices 4×4 à coefficients constants, et $\vec{P} = -i\vec{\nabla}$.

On veut que les solutions satisfassent à l'équation $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$, ce qui impose

$$H^2 = (\vec{\alpha} \cdot \vec{P} + \beta m)^2 = \vec{P}^2 + m^2. \quad (5.4)$$

En développant, on en déduit que les matrices $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et β

- anticommulent deux à deux.
- sont de carré 1 (la matrice identité).

On impose en outre que le hamiltonien H soit hermitique, ce qui implique que les matrices α_i et β soient hermitiques. Toutes ces propriétés sont également vérifiées par les matrices de Pauli (1.36) qui réalisent la transformation d'un spin 1/2, la seule différence étant qu'on a ici quatre matrices au lieu de trois.

5.1.2 Propriétés des matrices de Dirac

Nous allons montrer que pour avoir 4 matrices vérifiant les propriétés ci-dessus, il faut qu'elles soient au moins de taille 4×4 . Ceci nous permettra d'introduire des propriétés utiles pour la suite.

Considérons les matrices obtenues en multipliant les matrices de Dirac entre elles de toutes les façons possibles. Comme elles anticommulent entre elles, l'ordre dans lequel on les multiplie n'a d'incidence que sur le signe global. D'autre part, comme elles sont de carré 1, elles apparaissent au plus une fois dans le produit. Il y a donc 16 matrices possibles:

- 1
- $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$
- $\alpha_1\alpha_2, \alpha_1\alpha_3, \alpha_1\beta, \alpha_2\alpha_3, \alpha_2\beta, \alpha_3\beta$
- $\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \alpha_1\alpha_2\beta, \alpha_1\alpha_3\beta, \alpha_2\alpha_3\beta$
- $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta$.

Notons Γ_i une quelconque de ces matrices. Elles ont les propriétés suivantes.

- $\Gamma_i^2 = \pm 1$ puisque les matrices de Dirac anticommulent deux à deux et sont de carré 1.
- Pour une matrice donnée $\Gamma_i \neq 1$, il existe toujours une autre matrice Γ_j qui anticommute avec elle. Si $\Gamma_i = \alpha_1$, on prend par exemple $\Gamma_j = \alpha_2$. Si $\Gamma_i = \alpha_1\alpha_2$, on prend $\Gamma_j = \alpha_2$. La généralisation est immédiate.
- La propriété précédente implique que toutes les matrices Γ_i , sauf 1, sont de trace nulle. En effet, soit Γ_j anticommute avec Γ_i . Alors $\text{tr} \Gamma_j \Gamma_i \Gamma_j = -\text{tr} \Gamma_i \Gamma_j^2$. Mais d'autre part $\text{tr} \Gamma_j \Gamma_i \Gamma_j = \text{tr} \Gamma_i \Gamma_j^2$ en utilisant l'invariance circulaire de la trace. Donc $\text{tr} \Gamma_i \Gamma_j^2 = 0$. Donc $\text{tr} \Gamma_i = 0$ puisque $\Gamma_j^2 = \pm 1$.
- On en déduit que les matrices sont linéairement indépendantes sur le corps des complexes. Soit en effet une combinaison linéaire nulle $\sum_i \lambda_i \Gamma_i = 0$. En multipliant par une matrice quelconque Γ_j et en prenant la trace, on obtient $\sum_i \lambda_i \text{tr} \Gamma_j \Gamma_i = 0$. Or $\Gamma_j \Gamma_i$ est, au signe près, une autre matrice Γ_k , différente de l'identité si $j \neq i$, et donc de trace nulle. On obtient donc $\lambda_j = 0$ quel que soit j , ce qu'il fallait démontrer.

On a donc 16 matrices linéairement indépendantes, ce qui impose qu'elles soient au moins de taille 4×4 .

Si l'on choisit des matrices 4×4 , alors toute matrice peut s'écrire comme combinaison linéaire de matrices Γ_i . On en déduit que toute matrice commutant avec les α_i et β est proportionnelle à l'identité. Cette propriété nous sera utile dans la section 5.2.

Une méthode systématique de construction des matrices de Dirac est exposée dans l'exercice 5.8.1. Un choix possible est fourni par la représentation dite de Dirac:

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

où σ_i désignent les matrices de Pauli (1.36).

Cependant, on a rarement besoin de la forme explicite des matrices de Dirac pour les calculs. On montre (c'est le théorème de Pauli) que tous les choix possibles de matrices 4×4 sont équivalents, à une transformation unitaire près. C'est à dire que si on a deux ensembles $(\vec{\alpha}, \beta)$ et $(\vec{\alpha}', \beta')$ qui conviennent, il existe une matrice 4×4 unitaire U telle que

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}' &= U^{-1} \vec{\alpha} U \\ \beta' &= U^{-1} \beta U. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Dans ce cas, changer $(\vec{\alpha}, \beta)$ en $(\vec{\alpha}', \beta')$ revient à changer ψ en $U\psi$.

5.1.3 Interprétation probabiliste

L'équation de Dirac étant formellement analogue à l'équation de Schrödinger, on définit le recouvrement entre deux fonctions d'onde ψ_1 et ψ_2 de façon analogue:

$$\langle \psi_2 | \psi_1 \rangle = \int d^3 \vec{x} \psi_2^\dagger(\vec{x}) \psi_1(\vec{x}). \quad (5.7)$$

où ψ^\dagger désigne le spineur hermitique conjugué, écrit sous forme d'une matrice ligne.

Le hamiltonien étant hermitique, il est diagonalisable dans une base orthonormée, et le recouvrement entre deux états propres d'énergie différente (en particulier entre E et $-E$) est bien nul avec cette définition. Notons que la dimension du spineur de Dirac est la même que celle de la fonction d'onde de Schrödinger: $[\psi] \equiv E^{3/2}$.

La densité de probabilité est naturellement définie comme pour l'équation de Schrödinger:

$$\rho(t, \vec{x}) = \psi^\dagger(t, \vec{x}) \psi(t, \vec{x}). \quad (5.8)$$

Elle est toujours positive, ce qui n'était pas le cas pour l'équation de Klein–Gordon.

Calculons maintenant l'évolution de ρ au cours du temps. En prenant l'équation conjuguée de (5.1) on trouve

$$-i \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} = \psi^\dagger \left(\vec{\alpha} \cdot (i \vec{\nabla}) + \beta m \right) \quad (5.9)$$

où le gradient $\vec{\nabla}$ agit à gauche. On en déduit aisément l'équation de conservation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j} \quad (5.10)$$

où l'on a introduit le courant de probabilité

$$\vec{j}(t, \vec{x}) = \psi^\dagger(t, \vec{x}) \vec{\alpha} \psi(t, \vec{x}). \quad (5.11)$$

5.1.4 Ondes planes monochromatiques

Cherchons des solutions de l'équation (5.1) de la forme

$$\psi(t, \vec{x}) = u e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} \quad (5.12)$$

où \vec{p} et E sont des constantes et u est un spineur à 4 composantes indépendant de t et \vec{x} , qui est l'équivalent du vecteur de polarisation pour une onde électromagnétique (voir exercice 2.6.7).

L'équation (5.1) se réécrit pour l'onde plane

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m) u = E u, \quad (5.13)$$

c'est à dire que u est vecteur propre de $\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m$ avec la valeur propre $E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$.

Définissons l'opérateur

$$s = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}. \quad (5.14)$$

D'après l'équation (5.4), s correspond au signe de l'énergie: les ondes planes d'énergie positive (resp. négative) sont vecteurs propres de s avec la valeur propre 1 (resp. -1). Nous avons vu plus haut que les matrices de Dirac sont de trace nulle, par conséquent $\text{tr } s = 0$. Ceci implique que les valeurs propres 1 et -1 sont chacune deux fois dégénérées. Nous verrons que cette dégénérescence correspond aux deux états de spin.

Les projecteurs sur les états d'énergie positive et négative, Λ_+ et Λ_- , sont donnés par

$$\Lambda_{\pm} = \frac{1 \pm s}{2}. \quad (5.15)$$

Ils vérifient les relations $\Lambda_{\pm}^2 = \Lambda_{\pm}$ et $\Lambda_{\pm}^{\dagger} = \Lambda_{\pm}$, qui définissent un projecteur orthogonal. Ces projecteurs sont d'une grande importance pratique: grâce à eux, on n'a pas besoin d'explicitier les ondes planes u pour la plupart des calculs.

On choisit pour le spineur u de l'équation (5.12) la convention de normalisation

$$u^{\dagger} u = 2|E|. \quad (5.16)$$

Avec la densité de probabilité (5.8), l'onde plane normalisée dans un volume V s'écrit alors

$$\psi(t, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2|E|V}} u e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} = \frac{1}{\sqrt{2|E|V}} u e^{-ip^{\mu} x_{\mu}}. \quad (5.17)$$

On remarquera que grâce à notre convention de normalisation de u , le facteur de normalisation est le même que pour l'onde plane de Klein–Gordon, Eq.(4.11).

Calculons le courant de probabilité de cette onde plane, défini par (5.11). De l'expression du hamiltonien (5.3), on déduit l'anticommutateur

$$\{\vec{\alpha}, H\} = 2\vec{P}. \quad (5.18)$$

En prenant la valeur moyenne de cette équation dans l'onde plane (5.17), état propre de H et \vec{P} , on en déduit

$$2E u^{\dagger} \vec{\alpha} u = 2\vec{p} u^{\dagger} u. \quad (5.19)$$

La densité (5.8) et le courant (5.11) sont donc reliés par $\vec{j} = \rho \vec{v}$, comme pour l'équation de Klein–Gordon. Cependant, le signe de la probabilité pour les solutions d'énergie négative est négatif avec l'équation de Klein–Gordon, positif avec l'équation de Dirac.

5.1.5 Le spin dans l'équation de Dirac

Nous devons définir comment se transforme le spineur dans une rotation R , c'est à dire définir l'opérateur $S(R)$ (voir section 1.3.2) qui permette d'obtenir la fonction d'onde ψ' dans le nouveau système de coordonnées:

$$\psi'(t, \vec{x}') = S(R)\psi(t, \vec{x}). \quad (5.20)$$

D'après l'équation (1.21), il suffit pour cela de définir les générateurs des rotations infinitésimales, c'est à dire l'opérateur de spin \vec{S} .

Nous voulons définir \vec{S} de telle façon que l'équation de Dirac soit invariante par rotation, c'est à dire que le hamiltonien soit un opérateur scalaire (voir section 1.3.5). L'opérateur d'impulsion \vec{P} étant un opérateur vectoriel, le produit scalaire $\vec{\alpha} \cdot \vec{P}$ est automatiquement scalaire si $\vec{\alpha}$ est vectoriel. Il faut de plus que β soit scalaire, c'est à dire qu'il commute avec \vec{S} .

Nous avons déjà noté que les propriétés des matrices α_i rappellent celles des matrices de Pauli σ_i , ce qui suggère que l'on a un spin $1/2$. Par analogie, on est tenté de définir le spin comme $\vec{S} = \vec{\alpha}/2$. Mais cet opérateur ne convient pas pour deux raisons : premièrement, il ne commute pas avec β ; deuxièmement, il ne vérifie pas l'algèbre du moment cinétique $[S_1, S_2] = iS_3$, qui s'écrit ici $\alpha_3 = -i\alpha_1\alpha_2$. Or nous avons vu dans la section 5.1.2 que les matrices $\alpha_1\alpha_2$ et α_3 sont linéairement indépendantes, donc cette relation n'est pas vérifiée.

Nous allons vérifier que l'opérateur suivant vérifie toutes les propriétés requises :

$$S_3 = -\frac{i}{2}\alpha_1\alpha_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

où la dernière égalité n'est valable que dans la représentation de Dirac. Les autres composantes du spin s'obtiennent par permutations circulaires :

$$S_i = -\frac{i}{4}\epsilon_{ijk}\alpha_j\alpha_k. \quad (5.22)$$

L'opérateur de spin ainsi défini commute bien avec β , et vérifie l'algèbre du moment cinétique. Reste à vérifier que $\vec{\alpha}$ est bien un opérateur vectoriel. Pour cela, nous revenons à l'exercice résolu de la fin du chapitre 1, où nous avons montré explicitement que $\vec{\sigma}$ était un opérateur vectoriel. Les étapes de la démonstration étaient les trois équations (1.37), (1.40) et (1.41), pour lesquelles nous avons utilisé les propriétés suivantes de l'opérateur de spin S_3 dans l'ordre: 1) $(2S_3)^2 = 1$. 2) S_3 anticommute avec σ_1 et σ_2 , commute avec σ_3 . 3) $\sigma_1(2S_3) = -i\sigma_2$. En remplaçant σ_i par α_i et S_3 par l'expression (5.21), on vérifie aisément ces trois propriétés. Notons que l'opérateur de spin défini par (5.22) s'écrit comme produit vectoriel de deux opérateurs vectoriels (de même que le moment cinétique orbital $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$), et se transforme donc bien comme un pseudovecteur par les isométries d'espace. D'autre part, Les valeurs propres de S_z sont $\pm 1/2$, ce qui exprime que la particule décrite par l'équation de Dirac est de spin $1/2$.

Il est important de signaler que le spin ne commute pas avec le hamiltonien, c'est à dire qu'il n'est pas une constante du mouvement dans l'équation de Dirac, même pour une particule libre : dans une rotation de spin, en effet, $\vec{\alpha}$ tourne mais \vec{P} est inchangé, donc le hamiltonien de Dirac n'est pas invariant. Inversement, dans une rotation des coordonnées d'espace (engendrée par le moment cinétique orbital \vec{L}), \vec{P} tourne mais $\vec{\alpha}$ est inchangé, donc le moment orbital \vec{L} n'est pas non plus conservé. Seul le moment cinétique $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ est une

constante du mouvement. On peut montrer (voir exercice 5.8.3) que la non-conservation du moment orbital est un effet des états d'énergie négative.

Pour une onde plane d'impulsion nulle, le spin commute avec le hamiltonien βm , et on peut donc définir les états de polarisation comme en mécanique quantique non relativiste. Mais ce n'est plus le cas pour un électron en mouvement. Cependant, la projection du spin sur la quantité de mouvement, dite *hélicité*, reste une constante du mouvement :

$$h \equiv \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}. \quad (5.23)$$

Ses valeurs propres sont $\pm 1/2$. Pour vérifier qu'il s'agit d'une constante du mouvement, le plus simple est d'orienter les axes de coordonnées de telle sorte que \vec{p} soit suivant l'axe z , auquel cas l'hélicité se réduit à S_3 et le hamiltonien à $\alpha_3 p_z + \beta m$ qui, d'après l'équation (5.21), commute bien avec S_3 . L'hélicité joue un rôle important pour les particules de masse nulle, comme nous le verrons dans la section 5.6.

5.2 Covariance de l'équation de Dirac

Nous allons maintenant montrer que l'équation de Dirac est invariante par transformation de Lorentz.

5.2.1 Forme covariante de l'équation de Dirac

La forme (5.1) de l'équation de Dirac n'est pas adaptée à l'étude des propriétés de covariance, car le temps y joue un rôle particulier. Pour la formulation covariante, on introduit quatre matrices notées sous forme d'un vecteur contravariant γ^μ , définies par $\gamma^0 = \beta$, $\gamma^i = \beta \alpha_i$. On notera également $\gamma_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\nu$. Les propriétés des matrices $\vec{\alpha}$ et β (hermiticité, anticommutation, carré 1) deviennent pour les γ^μ

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 g^{\mu\nu} \quad (5.24)$$

et

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0. \quad (5.25)$$

En multipliant l'équation (5.1) à gauche par β , on obtient la forme dite covariante de l'équation de Dirac:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0. \quad (5.26)$$

5.2.2 Transformation du spineur

Dans une transformation de Lorentz Λ (voir Eq.(2.6)), la transformation du spineur est de la forme s'écrit

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) \quad (5.27)$$

où $S(\Lambda)$ est une matrice 4×4 , qui réalise la transformation dans l'espace des spineurs (elle correspond au $S(R)$ introduit pour les rotations dans la section 1.3.2.

Nous allons choisir $S(\Lambda)$ de telle sorte que l'équation de Dirac (5.26) soit invariante par transformation de Lorentz. C'est le cas si l'opérateur γ^μ se transforme comme un vecteur dans la transformation (5.27), soit si (voir Eq.(1.34))

$$S^{-1} \gamma^\nu S = \Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu. \quad (5.28)$$

Cette équation détermine-t-elle complètement la matrice S ? Supposons que deux matrices S et S' vérifient l'équation (5.28). On en déduit que pour tout ν ,

$$SS'^{-1}\gamma^\nu = \gamma^\nu SS'^{-1}, \quad (5.29)$$

c'est à dire que SS'^{-1} commute avec tous les γ^ν . Ainsi qu'on l'a vu dans la section 5.1.2, ceci implique que SS'^{-1} est proportionnel à l'identité, c'est à dire que S et S' coïncident à une constante multiplicative près.

Avant d'obtenir une expression explicite de S pour une transformation Λ donnée, nous allons explorer quelques conséquences de l'équation (5.28).

Cherchons tout d'abord à déterminer S^\dagger . En prenant l'hermitique conjugué de (5.28) et en utilisant (5.25), on obtient

$$\left(\gamma^0 S^\dagger \gamma^0\right) \gamma^\nu \left(\gamma^0 S^\dagger \gamma^0\right)^{-1} = \Lambda^\nu{}_\nu \gamma^\nu. \quad (5.30)$$

Cette équation est de la forme (5.28) en remplaçant S par $S' \equiv (\gamma^0 S^\dagger \gamma^0)^{-1}$. On en déduit que SS'^{-1} est proportionnel à l'identité, soit $S\gamma^0 S^\dagger \gamma^0 = \lambda$ où λ est un nombre complexe.

Montrons que λ est réel. L'hermitique conjugué de l'équation précédente donne $\gamma^0 S \gamma^0 S^\dagger = \lambda^*$, donc $S\gamma^0 S^\dagger \gamma^0 = \lambda^*$ (en utilisant le fait que si $AB = 1$, alors A et B commutent), donc $\lambda = \lambda^*$.

Nous verrons en outre que $\lambda > 0$ pour les transformations du groupe orthochrone, ce qui permet de se ramener à $\lambda = 1$ en multipliant S par une constante. On aboutit au résultat important suivant:

$$S^\dagger = \gamma^0 S^{-1} \gamma^0. \quad (5.31)$$

Il est intéressant de comparer cette équation à (2.8), qui se récrit sous une forme analogue

$${}^t \Lambda = G \Lambda^{-1} G. \quad (5.32)$$

Ces deux équations montrent que ni Λ ni S ne sont unitaires, ce qui est relié au fait que les transformations de Lorentz ne conservent pas la norme, ni d'un vecteur, ni d'un spineur.

Remarquons que si S satisfait aux équations (5.28) et (5.31), $S e^{i\theta}$ convient aussi, θ désignant un réel arbitraire. La transformation des spineurs est donc définie à une phase près.

5.2.3 Spineur conjugué

On définit le spineur conjugué par

$$\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x) \gamma^0. \quad (5.33)$$

Les équations (5.27) et (5.31) permettent de déterminer sa transformation

$$\bar{\psi}'(x') = \psi^\dagger(x) S^\dagger \gamma^0 = \bar{\psi}(x) \gamma^0 S^\dagger \gamma^0 = \bar{\psi}(x) S^{-1}. \quad (5.34)$$

L'intérêt du spineur conjugué est justement qu'il se transforme simplement. Il apparaît naturellement lorsqu'on écrit les quantités physiques sous forme covariante, comme nous allons maintenant le voir.

Comment s'écrit l'équation de Dirac pour $\bar{\psi}$? En prenant l'hermitique conjuguée de l'équation (5.26), en utilisant (5.25) et en multipliant à droite par γ^0 , on obtient

$$\bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) = 0, \quad (5.35)$$

où l'opérateur de gradient ∂_μ agit à gauche.

5.2.4 Invariants bilinéaires

De même que la fonction d'onde de Schrödinger, la fonction d'onde de Dirac n'est pas une observable. Seuls sont observables des éléments de matrice du type $\psi_1^\dagger O \psi_2$, où O est un opérateur hermitique, ψ_1 et ψ_2 sont deux spineurs de Dirac. Il est donc important d'étudier la transformation de Lorentz des diverses formes bilinéaires formées en multipliant des composantes de ψ_1^\dagger et de ψ_2 . Nous allons voir qu'elles se transforment comme des tenseurs de rangs divers.

Des équations (5.27) et (5.34) on déduit immédiatement

$$\bar{\psi}'_1(x')\psi'_2(x') = \bar{\psi}_1(x)\psi_2(x). \quad (5.36)$$

C'est à dire que $\bar{\psi}_1\psi_2$ est un scalaire de Lorentz. On voit que le spineur conjugué $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ joue, vis-à-vis du spineur ψ , un peu le même rôle qu'un vecteur covariant $V_\mu = g_{\mu\nu}V^\nu$ vis-à-vis d'un vecteur contravariant V^μ . Dans les deux cas, on obtient en effet un scalaire de Lorentz par contraction, avec γ^0 à la place de $g_{\mu\nu}$, comme on l'a déjà souligné à la fin de la section 5.2.2.

En utilisant l'équation (5.28) on voit que $\bar{\psi}_1\gamma^\mu\psi_2$ se transforme comme un vecteur contravariant, $\bar{\psi}_1\gamma^\mu\gamma^\nu\psi_2$ comme un tenseur contravariant, et ainsi de suite. Cependant, comme les matrices γ^μ sont de carré ± 1 et anticommulent, on ne perd rien en ne considérant que des produits antisymétrisés de matrices γ^μ , qui donnent soit 0, soit un produit de matrices toutes différentes. On sait alors, d'après la section 5.1.2, qu'on obtient au total 16 matrices linéairement indépendantes, c'est à dire toutes les formes bilinéaires possibles.

Ainsi, on considère le tenseur antisymétrique $\bar{\psi}_1\sigma^{\mu\nu}\psi_2$, où $\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. Le facteur 1/2 assure que $\sigma^{\mu\nu}$ a pour déterminant ± 1 et le facteur i que $\sigma^{\mu\nu\dagger} = \gamma^0\sigma^{\mu\nu}\gamma^0$.

De même, en prenant le produit des 4 matrices γ^μ , on obtient le pseudoscalaire $\bar{\psi}_1\gamma^5\psi_2$, où la matrice γ^5 est définie par

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.37)$$

la dernière égalité étant valable dans la représentation de Dirac.

Enfin, $i\bar{\psi}_1\gamma^\mu\gamma^5\psi_2$, correspondant au produit antisymétrisé de trois matrices γ , est un pseudovecteur.

Quelques exemples: commençons par calculer $\bar{u}u$, où u est l'onde plane normalisée suivant (5.16). De l'expression du hamiltonien (5.3), on déduit l'anticommutateur

$$\{\beta, H\} = 2m. \quad (5.38)$$

En prenant la valeur moyenne de cette équation entre u et u^\dagger , états propres de H , on en déduit $2E\bar{u}u = 2m u^\dagger u$. D'après la convention de normalisation (5.16), on obtient

$$\bar{u}u = \pm 2m. \quad (5.39)$$

suivant le signe de l'énergie. Notre condition de normalisation est donc invariante de Lorentz.

Autre exemple: le courant de probabilité $j^\mu = (\rho, \vec{j})$ défini par les équations (5.8) et (5.11), s'écrit justement sous la forme

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \quad (5.40)$$

Il se transforme comme un vecteur, ainsi qu'on l'attendait.

Enfin, on vérifie que l'opérateur de spin s'écrit sous la forme

$$\vec{S} = \frac{\gamma^5 \vec{\alpha}}{2}, \quad (5.41)$$

qui se transforme bien comme un pseudovecteur par les isométries d'espace.

5.2.5 Transformations infinitésimales

Construisons la matrice S définie par (5.28) pour une transformation infinitésimale

$$\Lambda^\nu{}_\mu = \delta^\nu{}_\mu + \omega^\nu{}_\mu. \quad (5.42)$$

On écrit S sous la forme

$$S = 1 - \frac{i}{2} \omega_{\rho\mu} \Sigma^{\rho\mu}, \quad (5.43)$$

où les $\Sigma^{\rho\mu}$ désignent les générateurs des transformations infinitésimales (cf. Eq.(2.80)) que nous allons construire. L'équation (5.28) devient alors

$$-\frac{i}{2} \omega_{\rho\mu} [\gamma^\nu, \Sigma^{\rho\mu}] = \omega^\nu{}_\mu \gamma^\mu. \quad (5.44)$$

On peut récrire le second membre sous la forme

$$\omega^\nu{}_\mu \gamma^\mu = \frac{1}{2} \omega_{\rho\mu} (g^{\nu\rho} \gamma^\mu - g^{\nu\mu} \gamma^\rho). \quad (5.45)$$

On obtient une équation de la forme $\omega_{\rho\mu} T^{\rho\mu} = 0$ devant être vérifiée quel que soit $\omega_{\rho\mu}$ antisymétrique. Ceci implique que la partie antisymétrique de $T^{\rho\mu}$ soit nulle, soit $T^{\rho\mu} - T^{\mu\rho} = 0$. On obtient ainsi

$$-i [\gamma^\nu, \Sigma^{\rho\mu}] = g^{\nu\rho} \gamma^\mu - g^{\nu\mu} \gamma^\rho. \quad (5.46)$$

En utilisant l'identité

$$[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B \quad (5.47)$$

ainsi que (5.24), on montre facilement que l'équation (5.46) est vérifiée si l'on choisit

$$\Sigma^{\rho\mu} = \frac{1}{2} \sigma^{\rho\mu} = \frac{i}{4} [\gamma^\rho, \gamma^\mu]. \quad (5.48)$$

De l'équation (5.25), on déduit

$$\Sigma^{\rho\mu\dagger} = \gamma^0 \Sigma^{\rho\mu} \gamma^0, \quad (5.49)$$

et par conséquent la matrice de transformation (5.43) vérifie bien l'équation (5.31).

5.2.6 Parité

Pour la transformation de parité (2.10), les équations (5.28) et (5.31) sont vérifiées par $S = \gamma^0$. On définit donc la transformation de parité sur les spineurs par

$$\psi'(t, \vec{x}) = \gamma^0 \psi(t, -\vec{x}). \quad (5.50)$$

5.3 Couplage au champ électromagnétique

Ce qu'il y a de nouveau par rapport à l'équation de Klein–Gordon, c'est le spin. Comment se couple-t-il au champ électromagnétique? Commençons par quelques rappels de physique non relativiste.

5.3.1 Précession d'un spin dans un champ magnétique

A un spin est généralement associé un moment magnétique qui lui est proportionnel: $\vec{M} = \mu\vec{S}$, où μ est le facteur gyromagnétique. Le hamiltonien d'interaction de ce spin avec un champ magnétique extérieur devient donc

$$H = -\vec{M} \cdot \vec{B} = -\mu\vec{S} \cdot \vec{B} \quad (5.51)$$

L'équation du mouvement de l'opérateur de spin est donnée par l'équation de Ehrenfest

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = i[H, \vec{S}]. \quad (5.52)$$

Ce commutateur se calcule en utilisant l'identité

$$[AB, C] = [A, C]B + A[B, C] \quad (5.53)$$

et les relations de commutation du moment cinétique

$$[S_k, S_j] = i\epsilon_{kjl}S_l. \quad (5.54)$$

On obtient ainsi

$$\frac{dS_j}{dt} = -i\mu[S_k, S_j]B_k = \mu\epsilon_{kjl}S_lB_k \quad (5.55)$$

soit sous forme vectorielle

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \mu\vec{S} \times \vec{B}. \quad (5.56)$$

Ceci traduit simplement que le moment des forces s'exerçant sur un moment magnétique est $\vec{M} \times \vec{B} = \mu\vec{S} \times \vec{B}$. Le spin a donc un mouvement de précession autour de \vec{B} , à la vitesse angulaire $\omega = \mu B$.

D'autre part, on sait qu'une particule chargée en mouvement dans un champ magnétique tourne autour de \vec{B} à la vitesse angulaire $\omega = eB/m$. Si cette charge est en outre pourvue d'un spin, les vitesses angulaires de rotation et de précession diffèrent en général. Elles ne coïncident que si le rapport gyromagnétique vaut $\mu = e/m$. Dans ce cas particulier, le spin garde un angle constant avec la quantité de mouvement. L'expérience montre que le spin de l'électron vérifie précisément cette propriété (à mieux que 1% près).

D'autre part, l'équation de Dirac, sous sa forme la plus simple, vérifie également cette propriété, comme nous allons le voir. Ceci montre qu'elle décrit correctement l'électron.

5.3.2 Couplage minimal

Les substitutions

$$E \rightarrow E - eV(x)$$

$$\vec{P} \rightarrow \vec{P} - e\vec{A}(x) \quad (5.57)$$

dans l'équation de Dirac libre (5.1) conduisent au hamiltonien

$$H = \vec{\alpha} \cdot (\vec{P} - e\vec{A}(x)) + \beta m + eV(x). \quad (5.58)$$

L'équation (5.1) peut alors se récrire sous forme covariante

$$(\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu) - m) \psi(x) = 0. \quad (5.59)$$

L'expression du courant de probabilité (5.40) n'est pas modifiée, contrairement à ce qui avait lieu pour l'équation de Klein–Gordon. C'est parce que la définition du courant ne comprend pas de dérivée (le couplage est dit “non dérivatif”).

En remplaçant ϕ par ψ dans les équations (4.23) et (4.24), on voit que l'équation (5.59) respecte l'invariance de jauge, puisqu'elle est obtenue en remplaçant la dérivée ∂_μ par la dérivée covariante $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$.

Montrons que dans un champ purement magnétique, le spin garde un angle constant avec la quantité de mouvement $\vec{P} - e\vec{A}$. La quantité de mouvement gardant un module constant (le champ magnétique n'accélère pas les particules) ainsi que le spin, il suffit pour cela de montrer que l'opérateur défini par $\mathcal{P} \equiv \vec{S} \cdot (\vec{P} - e\vec{A})$ est une constante du mouvement, c'est à dire qu'il commute avec le hamiltonien $H = \vec{\alpha} \cdot (\vec{P} - e\vec{A}) + \beta m$.

Ecrivons l'opérateur de spin sous la forme $\vec{S} = \gamma^5 \vec{\alpha}/2$. Puisque γ^5 commute avec $\vec{\alpha}$, \mathcal{P} commute avec $\vec{\alpha} \cdot (\vec{P} - e\vec{A})$. Puisque \vec{S} commute avec β , \mathcal{P} commute aussi avec β . Donc \mathcal{P} commute avec H . D'après la discussion de la section 5.3.1, on en déduit que la particule décrite par l'équation de Dirac porte un moment magnétique $e\hbar/(2m)$. Dans la section 5.3.3, nous allons le vérifier d'une autre manière, en prenant la limite non relativiste de l'équation de Dirac.

Notons que le couplage minimal n'est pas la seule façon d'introduire le champ électromagnétique dans l'équation de Dirac: d'autres valeurs du moment magnétique sont possibles. Une généralisation est présentée dans l'exercice 5.8.4.

5.3.3 Limite non relativiste

Pour prendre la limite non relativiste d'une solution d'énergie positive de l'équation de Dirac, il est naturel de séparer l'énergie de masse en écrivant le spineur de Dirac sous la forme

$$\psi(t, \vec{x}) = e^{-imt} \psi'(t, \vec{x}). \quad (5.60)$$

L'énergie se sépare alors en deux composantes correspondant à l'énergie cinétique et à l'énergie de masse:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = e^{-imt} \left(i \frac{\partial}{\partial t} + m \right) \psi'. \quad (5.61)$$

L'équation d'évolution de ψ' se déduit de (5.58) et (5.61):

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - eV \right) \psi' = \left[\vec{\alpha} \cdot (\vec{P} - e\vec{A}) + (\beta - 1)m \right] \psi'. \quad (5.62)$$

La représentation standard de Dirac (5.5) est bien adaptée à la limite non relativiste. On décompose le spineur de Dirac en deux spineurs à deux composantes:

$$\psi' = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (5.63)$$

L'équation (5.62) se réécrit alors

$$\begin{aligned} \left(i\frac{\partial}{\partial t} - eV\right)\phi &= \vec{\sigma} \cdot (\vec{P} - e\vec{A})\chi \\ \left(i\frac{\partial}{\partial t} - eV\right)\chi &= \vec{\sigma} \cdot (\vec{P} - e\vec{A})\phi - 2m\chi \end{aligned} \quad (5.64)$$

Dans la limite non relativiste, les termes d'énergie cinétique $i\partial/\partial t$ et d'énergie potentielle eV sont négligeables devant l'énergie de masse, et la deuxième équation se réduit à

$$\chi = \frac{\vec{\sigma} \cdot (\vec{P} - e\vec{A})}{2m}\phi. \quad (5.65)$$

Cette équation montre que χ est beaucoup plus faible que ϕ à la limite non relativiste. On appelle respectivement ϕ et χ les grandes et les petites composantes. L'équation (5.65) permet d'éliminer χ dans (5.64):

$$i\frac{\partial}{\partial t}\phi = \left(\frac{[\vec{\sigma} \cdot (\vec{P} - e\vec{A})]^2}{2m} + eV\right)\phi, \quad (5.66)$$

équation de Pauli. Le deuxième membre joue le rôle d'un hamiltonien non relativiste pour le spineur ϕ .

On peut simplifier cette équation en développant $[\sigma_i(P_i - eA_i)]^2$. Les matrices de Pauli étant de carré 1, les termes carrés du développement donnent simplement $(\vec{P} - e\vec{A})^2$. Les termes croisés se calculent en utilisant la relation $\sigma_x\sigma_y = i\sigma_z = -\sigma_y\sigma_x$. Il apparaît alors des commutateurs de la forme

$$[P_x - eA_x(\vec{x}), P_y - eA_y(\vec{x})] = -ie\frac{\partial A_x}{\partial y} + ie\frac{\partial A_y}{\partial x} = ieB_z. \quad (5.67)$$

L'équation de Pauli (5.66) devient alors

$$i\frac{\partial}{\partial t}\phi = \left(\frac{(\vec{P} - e\vec{A})^2}{2m} + eV - \frac{e}{2m}\vec{\sigma} \cdot \vec{B}\right)\phi. \quad (5.68)$$

On reconnaît bien l'équation de Schrödinger pour une particule chargée dans un champ électromagnétique, avec en plus un terme de couplage entre le spin et le champ magnétique, correspondant à un moment magnétique $e\hbar/2m$ aligné avec le spin, comme prévu.

5.4 Diffusion de Mott

Nous allons maintenant examiner, dans le cadre de la théorie de Dirac, la diffusion par un champ électromagnétique déjà étudiée pour une particule scalaire dans les sections 4.4 et 4.5.

5.4.1 Amplitude de transition

L'équation de Dirac étant du premier ordre en temps, comme l'équation de Schrödinger, on peut appliquer les résultats rappelés dans la section 4.4.1. En présence d'un champ

électromagnétique, l'équation de Dirac est de la forme (4.25), où H_0 est le hamiltonien libre (5.3) et $W(x)$ la perturbation

$$W(x) = e \left(V(x) - \vec{\alpha} \cdot \vec{A}(x) \right) = e \gamma^0 \gamma^\mu A_\mu(x). \quad (5.69)$$

On suppose que pour $t \rightarrow -\infty$, le spineur $\psi(x)$ est une solution de l'équation de Dirac libre, notée $\psi_i(x)$, et on va calculer la probabilité d'être dans un autre état libre, noté $\psi_f(x)$, à $t \rightarrow +\infty$.

L'amplitude de transition au premier ordre en W est donnée par l'équation (4.31), où la fonction d'onde est remplacée par un spineur à 4 composantes:

$$\mathcal{A}_{fi} = -i \int_t d^4x \psi_f^\dagger(x) W(x) \psi_i(x). \quad (5.70)$$

En remplaçant $W(x)$ par son expression (5.69) et en introduisant le spineur conjugué (5.33), l'amplitude se met sous la forme (4.40), avec un courant de transition

$$j^\mu(x) = e \bar{\psi}_f(x) \gamma^\mu \psi_i(x). \quad (5.71)$$

Comme le courant de transition de Klein–Gordon (4.41), il a la forme d'un courant de probabilité (5.40) mélangeant l'état initial et l'état final, multiplié par la charge e .

On a vu dans la section 4.4.4 que l'invariance de jauge de l'amplitude de transition équivaut à la conservation du courant de transition. La conservation du courant (5.71) se démontre facilement en utilisant l'équation de Dirac pour ψ_i , sous la forme (5.26), et l'équation de Dirac pour $\bar{\psi}_f$, sous la forme (5.35).

Si l'on choisit pour ψ_i et ψ_f des ondes planes normalisées de la forme (5.17)

$$\begin{aligned} \psi_i(x) &= \frac{1}{\sqrt{2E_i V}} u_i e^{-ip_i^\mu x_\mu} \\ \psi_f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2E_f V}} u_f e^{-ip_f^\mu x_\mu}, \end{aligned} \quad (5.72)$$

l'amplitude de transition devient

$$\mathcal{A}_{fi} = -ie \bar{u}_f \gamma^\mu u_i \tilde{A}_\mu(p_f - p_i) \frac{1}{\sqrt{2V E_i} \sqrt{2V E_f}}. \quad (5.73)$$

Le résultat est analogue à celui obtenu pour une particule scalaire (équation (4.47)), en effectuant la substitution

$$p_f^\mu + p_i^\mu \rightarrow \bar{u}_f \gamma^\mu u_i. \quad (5.74)$$

Les spineurs u_i et u_f contiennent la dépendance en spin de l'amplitude de transition. Le diagramme de Feynman correspondant est représenté sur la figure 5.1. Il est identique à celui de la figure 4.1, si ce n'est que la particule de spin 1/2 est représentée par un trait plein, au lieu de tirets pour une particule scalaire.

Nous pouvons donc énoncer quelques règles de Feynman supplémentaires: on associe un facteur u_i à une particule de spin 1/2 entrante, et un facteur \bar{u}_f à une particule sortante. L'interaction électromagnétique d'une particule de spin 1/2 se traduit par le facteur $-ie\gamma^\mu$ associé au vertex.

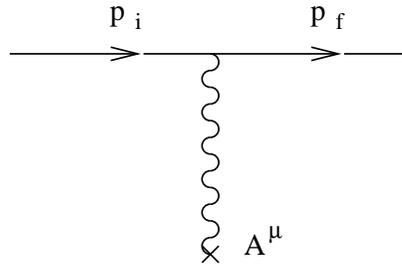


FIG. 5.1 - Diagramme de Feynman de la diffusion coulombienne.

5.4.2 Section efficace non polarisée

Considérons le cas particulier d'un champ purement électrostatique. Alors seul le terme $\mu = 0$ contribue dans l'équation (5.73). La seule différence avec le calcul effectué pour une particule scalaire est donc, en utilisant l'équation (5.74) avec $\mu = 0$, que l'on remplace un facteur $E_i + E_f$ par un facteur $u_f^\dagger u_i$ dans l'amplitude de transition. La probabilité de transition s'obtient donc en remplaçant $(E_i + E_f)^2$ par $|u_f^\dagger u_i|^2$.

Nous allons tout d'abord récrire cette quantité sous une forme qui s'avérera plus commode pour les calculs. En explicitant les composantes des spineurs, représentées par des indices α et β variant de 1 à 4, on obtient

$$|u_f^\dagger u_i|^2 = (u_{f\alpha}^* u_{i\alpha})(u_{f\beta} u_{i\beta}^*) \quad (5.75)$$

En changeant l'ordre des termes, cette équation fait apparaître la trace d'un produit de matrices:

$$\begin{aligned} |u_f^\dagger u_i|^2 &= (u_{i\alpha} u_{i\beta}^\dagger)(u_{f\beta} u_{f\alpha}^\dagger) \\ &= \text{tr} [(u_i u_i^\dagger)(u_f u_f^\dagger)]. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Attention! $u^\dagger u$ est un nombre mais $u u^\dagger$ une matrice 4×4 . Sa signification physique est simple: c'est la matrice du projecteur sur la direction de u , multipliée par la norme de u au carré, qui vaut $2|E|$ d'après la convention de normalisation (5.16).

Nous poursuivrons le calcul dans le cas où les spins des particules entrante et sortante ne sont pas mesurés. Ceci nous permettra de comparer le résultat avec celui obtenu pour une particule scalaire. On va donc sommer la probabilité sur les états de spin de la particule sortante, qu'on suppose détectée indépendamment de son spin, et moyenner sur les états de spin de la particule entrante, dont le spin n'est pas connu. Puisqu'il y a deux états de spin, on va donc calculer

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{spins}} |u_f^\dagger u_i|^2 = \frac{1}{2} \sum_{\text{spins}} \text{tr} [(u_i u_i^\dagger)(u_f u_f^\dagger)]. \quad (5.77)$$

Or $\sum_{\text{spins}} u_i u_i^\dagger$ est simplement le projecteur sur les états d'énergie positive Λ_+ défini par les équations (5.14) et (5.15), multiplié par le facteur de normalisation $2E_i$ pour un état d'énergie positive:

$$\sum_{\text{spins}} u_i u_i^\dagger = 2E_i \Lambda_+ = E_i + \vec{\alpha} \cdot \vec{p}_i + \beta m. \quad (5.78)$$

En raisonnant de même pour u_f , l'équation (5.77) devient

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{spins}} \left| u_f^\dagger u_i \right|^2 = \frac{1}{2} \text{tr} [(E_f + \vec{\alpha} \cdot \vec{p}_f + \beta m)(E_i + \vec{\alpha} \cdot \vec{p}_i + \beta m)]. \quad (5.79)$$

Nous avons vu à la section 5.1.2 que le produit de deux matrices de Dirac α_i ou β différentes est de trace nulle. Par conséquent, seuls restent les termes carrés, qui valent 1. En se souvenant que $\text{tr}(1) = 4$ puisqu'on a des matrices 4×4 , on aboutit au résultat

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{spins}} \left| u_f^\dagger u_i \right|^2 = 2(E_i E_f + \vec{p}_i \cdot \vec{p}_f + m^2), \quad (5.80)$$

à comparer à $(E_i + E_f)^2$ pour une particule sans spin.

Dans le cas particulier d'un champ indépendant du temps, l'énergie est conservée: $E_i = E_f = E$. Exprimons le résultat en fonction de l'angle de diffusion θ : $\vec{p}_i \cdot \vec{p}_f = p^2 \cos \theta$. En remplaçant m^2 par $E^2 - p^2$, on obtient

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{spins}} \left| u_f^\dagger u_i \right|^2 = 4E^2 \left(1 - v^2 \sin^2 \theta / 2 \right) \quad (5.81)$$

où $v = p/E$ est la vitesse de la particule.

On obtient finalement la section efficace dite de Mott

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Dirac}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Klein-Gordon}} \left(1 - v^2 \sin^2 \theta / 2 \right). \quad (5.82)$$

Il apparaît une correction relativiste en v^2 provenant du spin.

5.5 Antiparticules

5.5.1 Points de vue de Feynman et de Dirac

L'interprétation de Feynman des états d'énergie négative (voir section 4.6) s'applique également à l'équation de Dirac: on interprète une particule d'énergie $-E$, d'impulsion $-\vec{p}$ et de spin $-\vec{\sigma}$ dans l'état initial (resp. final) comme une antiparticule d'énergie E , d'impulsion \vec{p} et de spin $\vec{\sigma}$ dans l'état final (resp. initial), interprétation compatible avec les lois de conservation de la quantité de mouvement, de l'énergie et du moment cinétique. L'antiparticule a une charge électrique opposée à la particule.

Dirac, lorsqu'il écrivit l'équation qui porte son nom, proposa une autre interprétation des états d'énergie négative qui, par contre, ne se généralise pas à l'équation de Klein-Gordon. Une particule de spin $1/2$ étant un fermion, chaque état quantique est occupé au plus une fois. Le vide, défini comme l'état d'énergie la plus basse, est l'état où tous les niveaux d'énergie positive sont libres et tous les niveaux d'énergie négative sont occupés: c'est ce qu'on appelle la "mer de Dirac". Les états à une particule sont alors de deux sortes: soit on remplit un niveau d'énergie positive, c'est à dire un électron, soit on enlève une particule de la mer de Dirac, ce qu'on appelle un état de "trou": enlever une particule de charge e , d'impulsion p^μ et de spin $\vec{\sigma}$ revient à ajouter une particule de charge $-e$ (donc une antiparticule), d'impulsion $-p^\mu$ et de spin $-\vec{\sigma}$. Par conséquent, les points de vue de Dirac et de Feynman conduisent au même résultat.

On note v (au lieu de u) une solution à ondes planes d'énergie négative.

5.5.2 Création de paires

Comme pour l'équation de Klein–Gordon, l'amplitude de transition dans un champ électromagnétique (5.73) sera interprétée, si $E_i < 0$ comme l'amplitude de création d'une paire par le champ électromagnétique, d'une particule d'impulsion $p_1^\mu = p_f^\mu$ et d'une antiparticule d'impulsion $p_2^\mu = -p_i^\mu$:

$$\mathcal{A}_{fi} = -ie \bar{u}_1 \gamma^\mu v_2 \tilde{A}_\mu(p_1 + p_2) \frac{1}{\sqrt{2V E_1} \sqrt{2V E_2}}. \quad (5.83)$$

Notons une règle de Feynman supplémentaire: on associe un facteur v à une antiparticule sortante, et un facteur \bar{v} à une antiparticule entrante.

Le nombre moyen de paires créées s'écrit

$$P = \int \frac{d^3 \vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} \sum_{\text{spins}} \left| e \bar{u}_1 \gamma^\mu v_2 \tilde{A}_\mu(p_1 + p_2) \right|^2. \quad (5.84)$$

Calculons la somme sur les polarisations. Nous écrivons tout d'abord

$$\sum_{\text{spins}} \left| \bar{u}_1 \gamma^\mu v_2 \tilde{A}_\mu \right|^2 = \tilde{A}_\mu \tilde{A}_\nu^* L^{\mu\nu} \quad (5.85)$$

où

$$L^{\mu\nu} \equiv \sum_{\text{spins}} (\bar{u}_1 \gamma^\mu v_2) (\bar{u}_1 \gamma^\nu v_2)^*. \quad (5.86)$$

Nous allons calculer $L^{\mu\nu}$. En utilisant (5.25) et (5.33), on obtient

$$(\bar{u}_1 \gamma^\nu v_2)^* = \bar{v}_2 \gamma^\nu u_1 \quad (5.87)$$

En remplaçant dans l'équation (5.86), on voit apparaître la trace d'un produit de matrices, comme dans l'équation (5.77):

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu} &= \sum_{\text{spins}} (\bar{u}_1 \gamma^\mu v_2) (\bar{v}_2 \gamma^\nu u_1) \\ &= \sum_{\text{spins}} \text{tr} [\gamma^\mu (v_2 \bar{v}_2) \gamma^\nu (u_1 \bar{u}_1)]. \end{aligned} \quad (5.88)$$

Des équations (5.33) et (5.78) on déduit

$$\sum_{\text{spins}} u_1 \bar{u}_1 = \gamma_\mu p_1^\mu + m. \quad (5.89)$$

Pour les solutions d'énergie négative v_2 , la somme sur les spins fait apparaître le projecteur sur les états d'énergie négative Λ_- défini par l'équation (5.15):

$$\sum_{\text{spins}} v_2 v_2^\dagger = 2E_2 \Lambda_-. \quad (5.90)$$

En veillant à remplacer \vec{p} par $-\vec{p}_2$ dans (5.14) (puisque \vec{p}_2 désigne l'impulsion de l'antiparticule), on obtient

$$\sum_{\text{spins}} v_2 \bar{v}_2 = \gamma_\mu p_2^\mu - m. \quad (5.91)$$

La somme sur les spins se ramène donc à un calcul de trace:

$$L^{\mu\nu} = \text{tr} [\gamma^\mu (\gamma^\rho p_{2\rho} - m) \gamma^\nu (\gamma^\sigma p_{1\sigma} + m)]. \quad (5.92)$$

Les traces se calculent au moyen des formules suivantes:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) &= 4g^{\mu\nu} \\ \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho) &= 0 \\ \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &= 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}). \end{aligned} \quad (5.93)$$

Après calcul,

$$L^{\mu\nu} = 4 \left(p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu - (m^2 + p_1 \cdot p_2) g^{\mu\nu} \right) \quad (5.94)$$

à comparer avec le résultat pour une particule scalaire (4.62)

$$L^{\mu\nu} = (p_1^\mu - p_2^\mu)(p_1^\nu - p_2^\nu). \quad (5.95)$$

Pour obtenir la probabilité de création de paires, il reste à effectuer l'intégrale sur l'espace des phases de l'équation (5.84). Ce calcul est l'objet de l'exercice 5.8.8

5.5.3 Conjugaison de charge

De même que dans la section 4.6.3, nous allons chercher une transformation changeant la particule en son antiparticule, c'est à dire associant à une solution $\psi(x)$ de (5.59) une solution $\psi_c(x)$ de l'équation pour une particule de charge opposée:

$$(\gamma^\mu (i\partial_\mu + eA_\mu) - m) \psi_c(x) = 0. \quad (5.96)$$

En prenant l'hermitique conjuguée de l'équation (5.59), on obtient

$$(\gamma^{\mu*} (-i\partial_\mu - eA_\mu) - m) \psi^*(x) = 0. \quad (5.97)$$

Cherchons la solution conjuguée sous la forme $\psi_c(x) = C\psi^*(x)$, où C est une matrice 4×4 à coefficients constants. En multipliant l'équation précédente à gauche par C , on obtient

$$\left(C\gamma^{\mu*} C^{-1} (-i\partial_\mu - eA_\mu) - m \right) \psi_c(x) = 0. \quad (5.98)$$

On obtient l'équation cherchée (5.96) si C vérifie la condition

$$C\gamma^{\mu*} C^{-1} = -\gamma^\mu. \quad (5.99)$$

En vertu du théorème de Pauli (voir section 5.1.2), on peut toujours trouver une matrice C unitaire qui vérifie ces relations. Sa forme particulière a peu d'importance. Dans la représentation de Dirac, on peut vérifier que $C = i\gamma^2$ convient.

La transformation ci-dessus associe à une solution d'énergie négative et d'impulsion $-\vec{p}$ en une solution d'énergie positive, d'impulsion \vec{p} et de charge opposée. Reste à déterminer le spin de la fonction conjuguée. De l'équation (5.99) on déduit la transformation des matrices $\alpha_k = \gamma^0 \gamma^k$.

$$C\alpha_k^* C^{-1} = \alpha_k. \quad (5.100)$$

De la définition du spin, Eq.(5.22), on déduit sa transformation:

$$CS_k^* C^{-1} = -S_k. \quad (5.101)$$

Par conséquent, si ψ est état propre de S_3 avec la valeur propre $1/2$, ψ_c sera état propre de S_3 avec la valeur propre $-1/2$: le signe du spin change dans la conjugaison de charge, de même que celui de l'énergie-impulsion.

5.6 Particules de masse nulle

Dans le cas où $m = 0$, le hamiltonien de Dirac libre se réduit à

$$H = \vec{\alpha} \cdot \vec{P}. \quad (5.102)$$

Pour une onde plane d'impulsion \vec{p} , ses valeurs propres sont $\pm|\vec{p}|$. D'autre part, γ^5 commute avec H : c'est donc un bon nombre quantique, dit *chiralité*, dont les valeurs propres sont ± 1 .

En utilisant les équations (5.23) et (5.41), on voit que l'hélicité est simplement reliée à la chiralité :

$$h = \frac{H}{|\vec{p}|} \frac{\gamma^5}{2}. \quad (5.103)$$

Pour une solution d'énergie positive, l'hélicité est donc égale à la chiralité, divisée par 2, ce qui donne la signification physique de la chiralité. Pour une solution d'énergie négative, l'hélicité et la chiralité sont de signes opposés.

Il est commode, dans le cas $m = 0$, d'utiliser une représentation dans laquelle γ^5 est diagonale. C'est le cas notamment de la représentation dite "chirale" des matrices de Dirac :

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix}. \quad (5.104)$$

On vérifie facilement que l'opérateur de spin a la même expression (5.21) que dans la représentation de Dirac. L'expression de γ^5 est

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.105)$$

Dans cette représentation, on décompose le spineur de Dirac en deux spineurs à deux composantes ψ_D et ψ_G , dits respectivement droit et gauche :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_D \\ \psi_G \end{pmatrix}. \quad (5.106)$$

ψ_D et ψ_G sont vecteurs propres de γ^5 avec les valeurs propres $+1$ et -1 respectivement : Les équations d'évolution de ψ_D et ψ_G sont découplées :

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \psi_D}{\partial t} &= (\vec{\sigma} \cdot \vec{P}) \psi_D \\ i \frac{\partial \psi_G}{\partial t} &= -(\vec{\sigma} \cdot \vec{P}) \psi_G. \end{aligned} \quad (5.107)$$

Dans ce qui précède, nous avons choisi de traiter le cas $m = 0$ comme la limite du cas plus général $m \neq 0$. Un autre point de vue est d'écrire directement une équation de Dirac pour une particule de masse nulle. On peut alors reprendre la construction de la section 5.1 avec $m = 0$. Alors, on n'a besoin que des matrices α_i , c'est à dire de trois matrices (au lieu de quatre) hermitiques, de carré 1 et anticommutable deux à deux. Des matrices de taille 2×2 suffisent, une représentation possible étant fournie par les matrices de Pauli étant $\alpha_i = \sigma_i$. Un spineur à deux composantes, dit spineur de Weyl, suffit donc à décrire une particule de spin 1/2 de masse nulle.

La représentation $\alpha_i = \sigma_i$ conduit à l'équation déjà obtenue pour la partie droite du spineur à 4 composantes (5.107), tandis que la représentation $\alpha_i = -\sigma_i$ conduit à

l'équation de la partie gauche. Contrairement à ce qui se passe avec les matrices 4×4 , ces deux représentations ne sont pas équivalentes, c'est à dire qu'il n'existe pas de matrice S unitaire telle que $-\sigma_i = S\sigma_i S^{-1}$ (pourquoi?). De fait, les deux représentations décrivent une physique différente puisqu'elles correspondent aux deux états d'hélicité.

Les neutrinos sont peut-être des exemples de particules de spin 1/2 de masse nulle, et de chiralité -1 .

5.7 Propagateur de Dirac

Comme pour les équations de Maxwell et de Klein–Gordon, le propagateur est la fonction qui permet de résoudre une équation de Dirac avec un second membre (une “source”):

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = j(x) \quad (5.108)$$

où $j(x)$ désigne un spineur à quatre composantes connu. Par rapport aux cas déjà étudiés, la complication vient du fait qu'on n'a pas une équation mais quatre, et qui ne sont pas découplées comme le sont les équations de Maxwell dans la jauge de Lorentz.

L'équation étant linéaire, la solution sera une fonction linéaire de j , qu'on écrit sous la forme

$$\psi(x) = \int d^4x' S(x-x')j(x') \quad (5.109)$$

où $S(x)$ désigne une matrice 4×4 (qui n'a rien à voir avec la matrice $S(\Lambda)$ de la section 5.2.2). Pour que ceci soit solution de l'équation précédente, il suffit que S vérifie

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)S(x) = \delta^{(4)}(x), \quad (5.110)$$

où la matrice identité 4×4 est sous-entendue dans le membre de droite. En transformée de Fourier, cette équation devient

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\tilde{S}(p) = 1 \quad (5.111)$$

Inversons cette équation. En utilisant l'équation (5.24), on peut écrire

$$\gamma^\mu p_\mu \gamma^\nu p_\nu = \frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu)p_\mu p_\nu = g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = p^\mu p_\mu \quad (5.112)$$

d'où on déduit

$$(\gamma^\mu p_\mu + m)(\gamma^\nu p_\nu - m) = p^\mu p_\mu - m^2. \quad (5.113)$$

L'équation (5.111) se réécrit donc

$$(p^\mu p_\mu - m^2)\tilde{S}(p) = \gamma^\mu p_\mu + m. \quad (5.114)$$

Le propagateur de Feynman s'écrit par conséquent

$$\tilde{S}_F(p) = \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{p^\nu p_\nu - m^2 + i\epsilon}. \quad (5.115)$$

On voit qu'il est relié au propagateur de l'équation de Klein–Gordon (4.74) par

$$\tilde{S}_F(p) = (\gamma^\mu p_\mu + m)\tilde{G}_F(p). \quad (5.116)$$

On peut appliquer ce propagateur aux perturbations d'ordre supérieur, en suivant pas à pas la même démarche que pour l'équation de Klein–Gordon.

5.8 Exercices et problèmes

Les exercices 5.8.1, 5.8.2 et 5.8.4 permettent de se familiariser avec les matrices de spin de l'équation de Dirac. L'exercice 5.8.5 calcule les premières corrections relativistes à l'équation de Pauli, responsables de la structure fine de l'atome d'hydrogène. Les exercices 5.8.6 à 5.8.9 complètent les exercices 4.8.3 à 4.8.6 du chapitre précédent, en y incluant les modifications liées au spin. Enfin, les exercices 5.8.3 et 5.8.10 traitent de problèmes qui ne sont pas spécifiques aux particules de spin 1/2 (et qui auraient donc pu être étudiés au chapitre précédent) mais se traitent mieux au moyen d'un formalisme hamiltonien.

5.8.1 Construction des matrices de Dirac

On se propose de construire pour tout N un ensemble de N matrices $\alpha_0, \dots, \alpha_{N-1}$ hermitiques, de même taille, telles que pour $i, j = 0, \dots, N-1$, on ait $\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij}$.

1. Supposons qu'on ait N matrices $\alpha_0, \dots, \alpha_{N-1}$ de taille $p \times p$ vérifiant les conditions ci-dessus, avec N pair. Montrer qu'on peut en obtenir $N+1$ en prenant les mêmes, plus la matrice $\alpha_N = \lambda \alpha_0 \dots \alpha_{N-1}$ où λ est un nombre complexe dont on précisera la valeur suivant N .

2. Montrer qu'on peut ensuite passer à $N+2$ (pair) en prenant les matrices de taille $2p \times 2p$ suivantes:

$$\alpha'_{N+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \alpha'_j = \begin{pmatrix} 0 & i\alpha_j \\ -i\alpha_j & 0 \end{pmatrix} \quad \text{pour } j = 0, \dots, N \quad (5.117)$$

3. Pour $N = 1$, on peut choisir la matrice de taille 1×1 $\alpha_0 = (1)$. La méthode ci-dessus permet alors de construire par récurrence un ensemble de matrices pour tout N . Quelle est la taille des matrices en fonction de N ? Expliciter les matrices obtenues pour $N = 2, 3, 4, 5$. Quelles matrices reconnaît-on ?

4. En généralisant à N pair quelconque les propriétés démontrées dans la section 5.1.2, montrer que les matrices construites ci-dessus sont de taille minimale.

5.8.2 Transformation de Lorentz des spineurs

Cet exercice fait suite au problème 2.6.11. Nous allons déterminer à quelle représentation du groupe de Lorentz appartient le spineur de Dirac. Ecrire les matrices des générateurs des transformations de Lorentz $\Sigma_{\mu\nu}$, définis par l'équation (5.48), dans la représentation chirale (5.104) des matrices γ . Montrer que si l'on pose $\psi = (\psi_D, \psi_G)$, ψ_D et ψ_G étant des spineurs à deux composantes, ces derniers se transforment indépendamment par les transformations de Lorentz. On en déduit que la représentation du groupe de Lorentz par des spineurs de Dirac n'est pas irréductible.

Calculer les N_i et les N_i^\dagger et vérifier qu'ils sont bien hermitiques. Montrer que la représentation du groupe de Lorentz par des spineurs de Dirac se décompose en $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$. Que représente chacune des composantes ?

En suivant la démarche de la section 1.3.3, déterminer comment se décomposent les formes bilinéaires de spineurs de Dirac. Vérifier qu'on retrouve les résultats obtenus à la section 5.2.4.

5.8.3 Opérateur de vitesse ; Zitterbewegung

1. Vitesse de l'électron de Dirac

On rappelle que dans la représentation de Heisenberg, un opérateur \mathcal{O} évolue dans le temps suivant la loi $d\mathcal{O}/dt = -i[\mathcal{O}, H]$ (équation de Ehrenfest). Vérifier que la vitesse pour un électron de Dirac libre est donnée par

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\alpha}. \quad (5.118)$$

2. Propriétés de l'opérateur de vitesse

Vérifier les propriétés suivantes, et comparer avec la mécanique quantique non relativiste :

- Les composantes de l'opérateur de position commutent avec les composantes de l'opérateur de vitesse
- Les composantes de l'opérateur de vitesse ne commutent pas entre elles
- Les seules valeurs possibles de la vitesse suivant un axe sont -1 et $+1$.

Nous allons voir que ces propriétés curieuses sont dues à la présence des états d'énergie négative: l'opérateur de vitesse, restreint aux états d'énergie positive, coïncide bien avec la vitesse usuelle \vec{p}/E .

3. Matrice de l'opérateur de vitesse

Pour cela, le plus simple est d'étudier l'élément de matrice de l'opérateur entre deux états propres de H , $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$, de valeurs propres respectives E_1 et E_2 .

a) Montrer que $\langle \psi_1 | \vec{P} | \psi_2 \rangle = 0$ si $E_1 \neq E_2$.

b) En prenant l'élément de matrice de $\{\alpha_i, H\}$, montrer que $\langle \psi_1 | \vec{\alpha} | \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \vec{P}/H | \psi_2 \rangle$ sauf pour $E_2 = -E_1$. Ceci prouve le résultat annoncé.

4. Non-conservation du moment orbital

Pour un électron de Dirac libre, le moment orbital \vec{L} et le spin \vec{S} ne sont pas conservés séparément: seule leur somme $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ est constante. Vérifier que

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{P}. \quad (5.119)$$

En utilisant les résultats précédents, montrer que \vec{L} est conservé si on se restreint aux états d'énergie positive.

5. Résolution des équations de Ehrenfest

Nous allons résoudre l'équation donnant l'évolution de la position dans le cas général où la fonction d'onde est une superposition d'états d'énergie positive et négative. Montrer que

$$\frac{d\vec{\alpha}}{dt} = -2i \left(\vec{\alpha} H - \vec{P} \right). \quad (5.120)$$

Vérifier que la solution de cette équation est

$$\vec{\alpha}(t) = \frac{\vec{P}}{H} + \left(\vec{\alpha}(0) - \frac{\vec{P}}{H} \right) e^{-2iHt}. \quad (5.121)$$

(noter que l'écriture sous forme de fraction est justifiée par le fait que \vec{P} commute avec H , donc qu'on peut diviser indifféremment à droite ou à gauche). Par intégration, on déduit $\vec{r}(t)$. On trouve donc le résultat classique, plus un deuxième terme représentant un mouvement d'oscillation rapide (la fréquence est supérieure à $2m$), provenant des éléments de matrice de $\vec{\alpha}$ entre états d'énergie opposée. Ce mouvement supplémentaire a reçu le nom de "Zitterbewegung".

5.8.4 Couplage non minimal

On considère l'équation de Dirac modifiée par l'adjonction d'un terme de couplage non minimal au champ électromagnétique

$$\left[i\gamma^\mu (\partial_\mu - eA_\mu) - m - \frac{k}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right] \psi = 0 \quad (5.122)$$

où $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ et k est un paramètre réel.

1. L'équation modifiée est-elle encore covariante sous le groupe de Lorentz? Est-elle invariante de jauge?
2. Calculer la modification du hamiltonien de Dirac, qu'on exprimera en fonction des champs \vec{E} et \vec{B} . Vérifier que le terme supplémentaire est bien hermitique.
3. Comment le terme supplémentaire modifie-t-il l'équation de Pauli (5.68) dans le cas d'un champ purement magnétique? Quelle est l'interprétation physique de l'équation de Dirac modifiée?

5.8.5 Couplage spin-orbite

Nous allons étudier les corrections relativistes à l'équation de Pauli (5.68), dans le cas particulier d'un champ purement électrostatique et central $V(r)$.

1. On considère un état stationnaire d'énergie totale $m + E$ avec $|E| \ll m$. Comme dans la section 5.3.3, on utilise la représentation standard de Dirac. Ecrire les équations vérifiées par χ et ϕ . Eliminer χ et montrer que ϕ vérifie l'équation

$$(E - eV(r))\phi = (\vec{\sigma} \cdot \vec{P}) \frac{1}{2m + E - eV(r)} (\vec{\sigma} \cdot \vec{P})\phi. \quad (5.123)$$

2. En développant la fraction, montrer qu'on reconnaît l'énergie non relativiste plus une correction

$$\Delta H = -\frac{1}{4m^2} (\vec{\sigma} \cdot \vec{P})(E - eV(r))(\vec{\sigma} \cdot \vec{P}) \quad (5.124)$$

3. Calculer le commutateur $[E - eV(r), \vec{\sigma} \cdot \vec{P}]$. En utilisant le fait que $(E - eV(r))\phi \simeq p^2/(2m)\phi$ à des corrections près, mettre la correction relativiste sous la forme

$$\Delta H \phi = \left(-\frac{p^4}{8m^3} + \frac{ie}{4m^2} (\vec{\sigma} \cdot \vec{P})(\vec{\sigma} \cdot \vec{r}) \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \right) \phi. \quad (5.125)$$

En utilisant l'identité

$$\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk} + i\epsilon_{jkl} \sigma_l, \quad (5.126)$$

vérifier que la correction relativiste s'écrit

$$\Delta H\phi = \left(-\frac{p^4}{8m^3} + \frac{e}{2m^2} \vec{S} \cdot \vec{L} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} + \frac{ie}{4m^2} (\vec{P} \cdot \vec{r}) \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \right) \phi \quad (5.127)$$

où $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$ désigne le moment cinétique orbital. Quelle est l'interprétation des deux premiers termes?

4. Calculer au même ordre la limite non relativiste de l'équation de Klein–Gordon (4.20). Commenter le résultat.

5. On revient à l'équation de Dirac, et on remplace le champ électrostatique par un potentiel $U(\vec{x})$, l'interaction étant donnée par le hamiltonien

$$H = \vec{\alpha} \cdot \vec{P} + \beta(m + U(\vec{x})). \quad (5.128)$$

Montrer que l'interaction spin–orbite a la même forme que pour le champ électrostatique, mais avec le signe opposé.

5.8.6 Niveaux de Landau

On se propose de calculer les niveaux d'énergie d'un électron de Dirac placé dans un champ magnétique uniforme et constant \vec{B} . Cet exercice fait suite à l'exercice 4.8.3,

1. On considère tout d'abord le cas plus général d'un électron de Dirac situé dans un champ magnétique constant quelconque, de potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{x})$ donné. On utilise la représentation de Dirac (5.5). Soit un état stationnaire d'énergie E , de spineur

$$\psi(t, x, y, z) = e^{-iEt} \begin{pmatrix} \varphi(x, y, z) \\ \chi(x, y, z) \end{pmatrix}. \quad (5.129)$$

où φ et χ sont des spineurs à deux composantes. Ecrire les équations couplées satisfaites par φ et χ . En déduire l'équation du second ordre satisfaite par φ . La comparer à l'équation obtenue dans l'exercice 4.8.3.

2. On choisit $\vec{A} = (0, Bx, 0)$. En utilisant les résultats de l'exercice 4.8.3, calculer les niveaux d'énergie. Examiner leur dégénérescence pour p_y et p_z fixés.

3. On se propose de montrer que la dégénérescence d'ordre 2 qui apparaît dans les niveaux de Landau est reliée à une symétrie du hamiltonien. Pour cela, on revient au hamiltonien de Dirac et on introduit les opérateurs Σ_1 et Σ_2 définis par

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= i\beta\alpha_z(\alpha_x p_x + \alpha_y(p_y - eBx)) \\ \Sigma_2 &= i\alpha_x\alpha_y(\alpha_z p_z + \beta m) \end{aligned} \quad (5.130)$$

Vérifier que Σ_1 et Σ_2 :

- sont hermitiques;
- commutent avec H , p_y et p_z ;
- anticommulent entre eux.

Calculer Σ_2^2 et vérifier que $\Sigma_1^2 = H^2 - \Sigma_2^2$.

4. On peut se placer dans le sous-espace propre commun à H , p_y et p_z . Dédire de ce qui précède que les matrices σ_1 , σ_2 et σ_3 définies par $\sigma_1 \equiv \Sigma_1/\sqrt{\Sigma_1^2}$, $\sigma_2 \equiv \Sigma_2/\sqrt{\Sigma_2^2}$ et $\sigma_3 \equiv -i\sigma_1\sigma_2$ sont des constantes du mouvement qui vérifient l'algèbre des matrices de Pauli. Quel est le groupe de symétrie correspondant, et dans quelle représentation est-on? Quelle dégénérescence des niveaux résulte de cette symétrie?

5.8.7 Atome d'hydrogène

Cet exercice fait suite à l'exercice 4.8.4, qu'il complète en incluant les effets du spin de l'électron. Ecrire l'équation de Dirac pour l'électron de l'atome d'hydrogène, en traitant le proton comme une charge fixe et ponctuelle à l'origine des coordonnées. On notera $V(\vec{x})$ le potentiel du champ électrostatique.

Pour se ramener à une équation du second ordre similaire à l'équation de Klein-Gordon, on multiplie l'équation de Dirac par $\vec{\alpha} \cdot \vec{P} + \beta m$ ($\vec{\alpha}$ sont les matrices de Dirac, à ne pas confondre avec $\alpha = e^2/4\pi$ dans ce problème). Calculer le commutateur $[\vec{\alpha} \cdot \vec{P} + \beta m, E - eV(\vec{x})]$ et en déduire que l'équation d'onde s'écrit

$$\left[\vec{P}^2 + m^2 - \left(E + \frac{\alpha}{r} \right)^2 - i \frac{\alpha}{r^2} \vec{\alpha} \cdot \hat{r} \right] \psi(x) = 0 \quad (5.131)$$

où $\hat{r} = \vec{r}/r$. Montrer que pour mettre cette équation sous la forme (4.82), il suffit de diagonaliser l'opérateur $K = L^2 - \alpha^2 - i\alpha\vec{\alpha} \cdot \hat{r}$.

L'opérateur K n'agit pas sur la partie radiale de la fonction d'onde : pour le diagonaliser, on se place donc dans l'espace des variables angulaires et de spin. Dans cet espace, un ensemble complet d'observables qui commutent est constitué par J^2 , J_z et L^2 . Montrer (avec ou sans calcul) que K commute avec les composantes du moment cinétique \vec{J} .

Il suffit donc de diagonaliser K dans le sous-espace propre de J^2 et J_z correspondant à des valeurs propres données $j(j+1)$ et j_z . Montrer que dans ce sous-espace, noté \mathcal{E}_{j,j_z} , L^2 a deux valeurs propres possibles. Lesquelles? Elles sont non dégénérées puisque J^2 , J_z et L^2 forment un ensemble complet d'observables qui commutent, et \mathcal{E}_{j,j_z} est donc de dimension 2.

On va écrire la matrice de K dans la base propre de L^2 . Montrer d'abord que l'élément de matrice de \hat{r} entre deux états de même l est nulle, puis que $(\vec{\alpha} \cdot \hat{r})^2 = 1$. En déduire la forme de la matrice de $\vec{\alpha} \cdot \hat{r}$ puis celle de K sous la forme

$$K = (j + 1/2)^2 - \alpha^2 + \begin{pmatrix} -(j + 1/2) & -i\alpha e^{-i\varphi} \\ -i\alpha e^{i\varphi} & j + 1/2 \end{pmatrix} \quad (5.132)$$

où φ est un réel. Calculer les valeurs propres de K . En déduire les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène et montrer qu'ils peuvent s'exprimer sous la forme (3), où l est remplacé par j . Déterminer (soigneusement!) les valeurs prises par j pour n donné, et la dégénérescence du niveau $E_{n,j}$.

La parité est un bon nombre quantique pour ce problème. Que vaut-elle, à votre avis, pour les divers niveaux (sans calcul)?

5.8.8 Création de paires

Vérifier que la probabilité de création de paires pour l'équation de Dirac se met sous la forme (4.85), avec

$$J^{\mu\nu}(q) = \int \frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p_1 - p_2) \times 4 \left(p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu - (m^2 + p_1 \cdot p_2) g^{\mu\nu} \right). \quad (5.133)$$

1. Vérifier que l'équation (4.87) est toujours satisfaite avec cette définition de $J^{\mu\nu}$.
2. Vérifier que

$$g_{\mu\nu} J^{\mu\nu}(q) = -4(2m^2 + q^2)I(q). \quad (5.134)$$

où $I(q)$ est donné par l'équation (4.89). En déduire la probabilité totale de création de paires.

5.8.9 Couplage à un potentiel scalaire

On considère une particule de Dirac couplée à un champ scalaire $U(x)$, suivant le hamiltonien (5.128).

1. Vérifier que l'équation de Dirac se met sous la forme

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu - (m + U(\vec{x}))] \psi(t, \vec{x}) = 0 \quad (5.135)$$

Comment faut-il transformer $U(\vec{x})$ dans une transformation de Lorentz pour que l'équation (5.135) soit covariante?

2. Reprendre le calcul de diffusion de la section 5.4 avec cette interaction, au premier ordre en $U(x)$. Vérifier qu'on obtient la même amplitude de diffusion que par un champ électrostatique, en remplaçant $u^\dagger f u_i$ par $\bar{u}_f u_i$.

3. Vérifier que

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{spins}} |\bar{u}_f u_i|^2 = \frac{1}{2} \text{tr} \left((p_f^\mu \gamma_\mu + m)(p_i^\nu \gamma_\nu + m) \right). \quad (5.136)$$

Effectuer le calcul de trace. En déduire la section efficace de diffusion par un champ central $U(\vec{x}) = -e/(4\pi|\vec{x}|)$ et vérifier qu'on retrouve bien la section efficace de Rutherford à la limite non relativiste.

4. Montrer que la probabilité de création de paires par le champ scalaire $U(x)$ s'écrit sous la forme

$$P = e^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} m^2 \tilde{U}(q) \tilde{U}^*(q) J(q) \quad (5.137)$$

où

$$J(q) = \int \frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^4(q - p_1 - p_2) \sum_{\text{spins}} |\bar{u}_1 v_2|^2. \quad (5.138)$$

Effectuer la somme sur les spins, le calcul de trace, et vérifier que

$$J(q) = 2(q^2 - 4m^2)I(q) \quad (5.139)$$

où $I(q)$ est défini par l'équation (4.89).

5.8.10 Puits de potentiel infini; modèle du sac

Nous allons étudier quelques solutions exactes simples de l'équation de Dirac dans un potentiel scalaire (5.135).

1. Marche de potentiel: conditions aux limites

On considère d'abord le cas où $U(\vec{x})$ est une "marche" de potentiel: $U(\vec{x}) = 0$ pour $x < 0$ et $U(\vec{x}) = U_0 > 0$ pour $x > 0$. On s'intéresse aux états stationnaires d'énergie E de cette équation.

a) Montrer que pour $x > 0$, les solutions sont des combinaisons linéaires d'ondes planes de la forme

$$\psi(t, \vec{x}) = e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} - Et)} u \quad (5.140)$$

où u est un spineur à quatre composantes, indépendant de \vec{x} et t , et où E et $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ sont reliés par $E^2 = \vec{p}^2 + (m + U_0)^2$.

b) On fixe E , p_y et p_z et on fait varier U_0 . Montrer que lorsque U_0 est suffisamment grand, la fonction d'onde décroît exponentiellement en x . Montrer que dans la limite où U_0 devient infini, on a $\psi(t, \vec{x}) = 0$ pour $x > 0$, et que l'équation de Dirac impose en $x = 0^-$ la condition

$$(i\gamma^1 + 1) \psi(t, \vec{x}) = 0. \quad (5.141)$$

La fonction d'onde est donc en général discontinue en $x = 0$, alors qu'elle est continue dans le cas de l'équation de Schrödinger. D'où vient cette différence?

2. Modèle du sac

Le modèle du sac est un modèle simple de structure des hadrons (particules subissant l'interaction forte) tels que le proton ou le neutron, qui reproduit approximativement certaines de leur propriétés, en particulier leur spectre de masse. Dans ce modèle, un proton est décrit comme un assemblage de trois quarks (particules de Dirac) placés dans un potentiel scalaire $U(\vec{x})$. Ce potentiel est nul à l'intérieur d'un domaine \mathcal{D} , dit sac, et infini à l'extérieur de \mathcal{D} .

Par analogie avec l'équation (5.141), on suppose que le potentiel impose en tout point de la surface du sac la condition

$$(i\vec{n} \cdot \vec{\gamma} + 1) \psi(t, \vec{x}) = 0, \quad (5.142)$$

où \vec{n} désigne le vecteur unitaire normal à la surface au point considéré, orientée vers l'extérieur, et $\vec{\gamma} = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$.

a) Montrer que $\bar{\psi}\psi = 0$ et $\bar{\psi}\vec{n} \cdot \vec{\gamma}\psi = 0$ en tout point de la surface du sac.

b) Dédire de cette dernière propriété que la charge électrique contenue dans \mathcal{D} est conservée au cours du temps.

c) Montrer que le courant axial

$$j_\mu^5 = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma^5\psi \quad (5.143)$$

est conservé à l'intérieur du sac si $m = 0$. La charge axiale correspondante est-elle en général conservée?

3. Puits rectangulaire infini: calcul des niveaux d'énergie

Nous allons calculer explicitement les niveaux d'énergie dans le cas particulier où le sac \mathcal{D} est le puits rectangulaire compris entre les abscisses $x = 0$ et $x = a > 0$, et où $m = 0$

(particule de masse nulle). On cherche la solution dans l'intervalle $0 \leq x \leq a$ sous la forme d'une superposition linéaire de deux ondes planes (ondes "incidente" et "réfléchie"):

$$\psi(t, \vec{x}) = \left(u_+ e^{ip_x x} + u_- e^{-ip_x x} \right) e^{i(p_y y + p_z z - Et)} \quad (5.144)$$

- a) Ecrire les conditions aux limites imposées par l'équation (5.142) en $x = 0$ et $x = a$.
 b) Dédire de l'équation de Dirac que

$$\mathcal{O} u_{\pm} = \pm \gamma^1 u_{\pm} \quad (5.145)$$

avec $\mathcal{O} = (\gamma^0 E - \gamma^2 p_y - \gamma^3 p_z) / p_x$.

- c) En appliquant l'opérateur \mathcal{O} aux conditions aux limites et en utilisant l'équation (5.145), vérifier qu'on obtient les équations

$$\begin{aligned} (i\gamma^1 + 1)(u_+ - u_-) &= 0 \\ (-i\gamma^1 + 1)(u_+ e^{ipa} - u_- e^{-ipa}) &= 0 \end{aligned} \quad (5.146)$$

A l'aide de ces équations et de celles obtenues au a), montrer qu'on obtient la condition de quantification $\exp(2ip_x a) = -1$ (on pourra pour cela éliminer u_- entre les équations).

- d) Comment ces résultats se comparent-ils à ceux obtenus avec l'équation de Schrödinger dans le même puits de potentiel?

Chapitre 6

Photons

Le photon est la seule particule dont on ait découvert la nature ondulatoire (par les équations de Maxwell) avant la nature corpusculaire (par la loi de quantification de l'énergie de Planck en 1900, et surtout par l'interprétation de cette loi en termes de corpuscules par Einstein en 1905).

Les équations de Maxwell en jauge de Lorentz,

$$\square A^\mu = j^\mu \tag{6.1}$$

ressemblent à l'équation de Klein–Gordon, avec quelques particularités:

- $m = 0$: le photon est de masse nulle.
- La fonction d'onde a quatre composantes et se transforme comme un vecteur, ce qui traduit que la particule est de spin 1. On sait cependant, en électrodynamique classique, qu'il n'y a que deux modes de polarisation physiques pour chaque valeur de \vec{k} . Nous y reviendrons.
- $A^\mu(x)$ est réel. En suivant le même raisonnement que pour l'équation de Klein–Gordon dans la section 4.6.4, ceci exprime le fait que le photon est sa propre anti-particule.
- Enfin, le terme d'interaction est très différent de celui qui apparaît dans l'équation de Klein–Gordon (4.32). Comme A^μ n'apparaît pas dans le second membre, le courant suffit à créer un champ même s'il n'y en a pas au départ: on appelle une telle interaction une *source* de champ. Il n'y a donc pas de courant de probabilité conservé, comme pour l'équation de Klein–Gordon en champ extérieur (où l'existence d'un courant conservé était reliée à la conservation de la charge électrique). Dans le point de vue quantique, ceci se traduit par le fait que le nombre de photons n'est pas conservé: ceci constitue en principe une limite à notre approche de mécanique quantique relativiste, où nous avons jusqu'ici considéré une et une seule particule.
- D'un point de vue plus technique, le fait que A^μ n'apparaisse pas dans le second membre de l'équation de Maxwell permet de la résoudre exactement, comme nous l'avons vu au chapitre 3. Par conséquent, nous n'aurons pas besoin de recourir à la théorie des perturbations dans ce chapitre.

6.1 Onde plane monochromatique

Par rapport à l'équation de Klein–Gordon, la difficulté essentielle vient (comme pour l'équation de Dirac) du spin, c'est à dire ici du vecteur de polarisation, et également des questions liées à l'invariance de jauge. Comme les processus élémentaires sont d'ordinaire calculés avec des ondes planes monochromatiques dans l'état initial et dans l'état final, il n'est pas inutile de commencer par quelques rappels sur ces dernières (voir exercice 2.6.7). Nous écrivons une onde plane monochromatique sous la forme

$$A^\mu(x) = \epsilon^\mu e^{-ik^\nu x_\nu}, \quad (6.2)$$

où ϵ^μ est un quadrivecteur constant dont les composantes peuvent être complexes, et k^μ un quadrivecteur constant réel. Notons qu'un champ $A^\mu(x)$ physique doit être réel : il faut alors superposer à la solution précédente une solution d'énergie k^0 opposée, et on n'a plus une onde plane monochromatique.

Le tenseur de champ électromagnétique a pour expression

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = -i(k^\mu \epsilon^\nu - k^\nu \epsilon^\mu) e^{-ik^\rho x_\rho}. \quad (6.3)$$

On voit que la transformation $\epsilon^\mu \rightarrow \epsilon^\mu + \lambda k^\mu$ ne modifie pas $F^{\mu\nu}$. Il s'agit donc d'une transformation de jauge.

Les équations de Maxwell dans le vide s'écrivent

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -k_\mu (k^\mu \epsilon^\nu - k^\nu \epsilon^\mu) e^{-ik^\rho x_\rho} = 0 \quad (6.4)$$

d'où

$$(k_\mu k^\mu) \epsilon^\nu - (k_\mu \epsilon^\mu) k^\nu = 0. \quad (6.5)$$

Deux possibilités s'offrent alors. Soit $k_\mu k^\mu \neq 0$, auquel cas ϵ^ν est proportionnel à k^ν d'après l'équation précédente. Mais alors, d'après la remarque ci-dessus, A^μ peut être ramené à 0 par simple transformation de jauge, et un tel champ n'a aucun intérêt physique. On en déduit que $k_\mu k^\mu = 0$ est la seule possibilité intéressante, ce qui correspond à la relation de dispersion attendue $\omega = |k^0| = |\vec{k}|$ pour l'onde plane électromagnétique dans le vide. Mais on déduit alors des équations de Maxwell ci-dessus que $k_\mu \epsilon^\mu = 0$ (sauf pour le cas d'un champ uniforme et constant $k^\nu = 0$), ce qui est la condition dite de jauge de Lorentz (bien que nous n'ayons pas fixé la jauge).

Retenons les deux conditions suivantes:

$$\begin{aligned} k_\mu k^\mu &= 0 \\ k_\mu \epsilon^\mu &= 0 \end{aligned} \quad (6.6)$$

et le fait que la substitution $\epsilon^\mu \rightarrow \epsilon^\mu + \lambda k^\mu$ n'a aucune incidence sur les quantités physiques.

On choisit traditionnellement de normaliser le vecteur de polarisation suivant

$$\epsilon_\mu^* \epsilon^\mu = -1. \quad (6.7)$$

On peut, enfin, effectuer une transformation de jauge de telle sorte que $\epsilon^0 = 0$, auquel cas on obtient la forme classique

$$\begin{aligned} V(t, \vec{x}) &= 0 \\ \vec{A}(t, \vec{x}) &= \vec{\epsilon} e^{-i(k_0 t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \end{aligned} \quad (6.8)$$

avec $k_0 = \pm |\vec{k}|$, $\vec{\epsilon} \cdot \vec{k} = 0$ et $|\vec{\epsilon}| = 1$, qui vérifie la condition de jauge de Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(t, \vec{x}) = 0$.

6.2 Calcul semi-classique

Nous savons qu'en électrodynamique classique, l'énergie contenue dans le champ électromagnétique vaut

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) = \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \left[\left(-\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)^2 + (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 \right]. \quad (6.9)$$

Ainsi, pour une onde plane de la forme

$$\begin{aligned} V &= 0 \\ \vec{A} &= \lambda \vec{\epsilon} \left(e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - kt)} + e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - kt)} \right) = 2\lambda \vec{\epsilon} \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - kt) \end{aligned} \quad (6.10)$$

(n'oublions pas que le champ A^μ doit être réel) avec $\vec{\epsilon}$ réel, perpendiculaire à \vec{k} , de norme 1, on trouve

$$\mathcal{E} = 2\lambda^2 k^2 V. \quad (6.11)$$

Suivant Planck, les valeurs de l'énergie sont quantifiées en multiples de $\hbar k$, énergie d'un photon. Le nombre de photons dans l'exemple précédent est alors

$$\mathcal{N} = \frac{2\lambda^2 k V}{\hbar}. \quad (6.12)$$

Contrairement à l'énergie, le nombre de photons est une quantité essentiellement quantique.

S'il y a un seul photon, on trouve dans un système d'unités où $\hbar = 1$ la normalisation $\lambda = 1/\sqrt{2kV}$, c'est à dire la même que pour l'onde plane de Klein–Gordon ou de Dirac. Ceci suggère que le champ $A^\mu(x)$ est l'analogue, pour le photon, de la fonction d'onde de Klein–Gordon $\phi(x)$ pour une particule scalaire.

6.3 Interprétation probabiliste

Nous allons maintenant calculer le nombre de photons d'une autre façon, qui nous permettra de faire le lien avec l'équation de Klein–Gordon.

Ecrivons une onde plane monochromatique $A_f^\mu(x)$ dans la jauge de Coulomb, que nous normalisons comme l'onde plane de Klein–Gordon,

$$\begin{aligned} A_f^0(t, \vec{x}) &= 0 \\ \vec{A}_f(t, \vec{x}) &= \frac{1}{\sqrt{2kV}} \vec{\epsilon} e^{-i(kt - \vec{k} \cdot \vec{x})} \end{aligned} \quad (6.13)$$

avec $k = |\vec{k}|$, $|\vec{\epsilon}| = 1$, $\vec{\epsilon} \cdot \vec{k} = 0$ où ϵ^μ vérifie la condition de normalisation (6.7), et calculons le recouvrement de cette onde avec le champ $A^\mu(x)$ en utilisant une formule analogue à celle de Klein–Gordon (4.8):

$$\langle A_f | A \rangle = \int d^3\vec{x} i \left(\vec{A}_f^* \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{A}_f^*}{\partial t} \cdot \vec{A} \right). \quad (6.14)$$

Nous avons choisi la jauge de Coulomb pour A_f^μ , mais le recouvrement ainsi défini est indépendant de la jauge choisie pour A^μ . Effectuons, en effet, la transformation $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda$, avec $\Lambda(x)$ une fonction arbitraire. Alors $\vec{A} \rightarrow \vec{A} - \vec{\nabla} \Lambda$, et la variation du recouvrement est

$$\begin{aligned} \delta \langle A_f | A \rangle &= \int d^3 \vec{x} i \left(-\vec{A}_f^* \cdot \vec{\nabla} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}_f^*}{\partial t} \cdot \vec{\nabla} \Lambda \right) \\ &= \int d^3 \vec{x} i \left((\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_f^*) \frac{\partial \Lambda}{\partial t} - \frac{\partial (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_f^*)}{\partial t} \Lambda \right) = 0 \end{aligned} \quad (6.15)$$

où nous avons intégré par parties, supposé que \vec{A} s'annule à l'infini, et utilisé le fait que A_f vérifie la condition de jauge de Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_f = 0$.

Si on prend pour A^μ l'onde plane (6.10), seul le premier terme (énergie positive) contribue au recouvrement et on trouve

$$\langle A_f | A \rangle = \lambda \sqrt{2kV}. \quad (6.16)$$

Le carré de cette quantité correspond au nombre de photons (6.12) dans un système d'unités où $\hbar = 1$. Ceci suggère que l'on interprète l'intégrale (6.14) comme l'amplitude de probabilité de trouver un photon d'impulsion \vec{k} et de polarisation $\vec{\epsilon}$ dans le champ $A^\mu(x)$. Le champ $A^\mu(x)$ est donc bien ici l'analogie de la fonction d'onde de Klein–Gordon $\phi(x)$ pour une particule scalaire.

Notons que pour calculer le nombre de photons d'impulsion \vec{k} , nous avons utilisé le recouvrement avec une onde plane monochromatique, dont nous avons noté qu'elle ne correspond pas à un champ physique (puisqu'elle est complexe alors que A^μ doit être réel).

6.4 Rayonnement

Nous allons maintenant considérer l'interaction du champ électromagnétique avec un courant donné $j^\mu(x)$, dont on supposera qu'il s'annule pour $t \rightarrow \pm\infty$. Le champ électromagnétique en présence de ce courant est donné par les équations de Maxwell

$$\partial_\nu F^{\nu\mu}(x) = \square A^\mu(x) - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu(x)) = j^\mu(x). \quad (6.17)$$

Ainsi que nous l'avons noté dans l'introduction, le nombre de photons n'est pas conservé par cette interaction. Il est donc naturel de s'intéresser au processus de création d'un photon, dont nous allons calculer l'amplitude.

On suppose qu'il n'y a pas de photon présent pour $t \rightarrow -\infty$, soit $A^\mu(x) = 0$, et on va calculer la probabilité d'avoir un photon d'impulsion \vec{k} et de polarisation $\vec{\epsilon} \perp \vec{k}$ pour $t \rightarrow \infty$. Pour cela, nous allons calculer l'amplitude de transition donnée par (6.14), en procédant comme dans la section 4.4.2.

En utilisant l'équation (3.23) et le fait que $A^\mu(t, \vec{x})$ s'annule pour $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ à t fixé, et aussi pour $t \rightarrow -\infty$, l'amplitude de transition se réécrit sous la forme d'une intégrale sur tout l'espace-temps

$$\langle A_f | A \rangle = \int d^4 x i \left(\vec{A}_f^* \cdot (\square \vec{A}) - (\square \vec{A}_f^*) \cdot \vec{A} \right). \quad (6.18)$$

Les champs A^μ et A_f^μ sont solutions de

$$\begin{aligned}\square \vec{A} + \vec{\nabla}(\partial_\nu A^\nu) &= \vec{j} \\ \square \vec{A}_f &= 0.\end{aligned}\quad (6.19)$$

Nous avons utilisé, pour la deuxième équation, le fait que l'onde plane dans le vide vérifie automatiquement la condition de jauge de Lorentz

$$\partial_\mu A_f^\mu = 0. \quad (6.20)$$

On déduit de ces deux équations

$$\vec{A}_f^* \cdot (\square \vec{A}) - (\square \vec{A}_f^*) \cdot \vec{A} + \vec{A}_f^* \cdot \vec{\nabla}(\partial_\nu A^\nu) = \vec{j}. \quad (6.21)$$

Par rapport à l'équation de Klein–Gordon, il y a un terme supplémentaire, mais qui donne une contribution nulle:

$$\int d^3 \vec{x} \vec{A}_f^* \cdot \vec{\nabla}(\partial_\nu A^\nu) = - \int d^3 \vec{x} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_f^*)(\partial_\nu A^\nu) = 0 \quad (6.22)$$

où nous avons intégré par parties, utilisé le fait que A^ν s'annule pour $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ puis utilisé la condition de jauge de Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_f = 0$.

On obtient finalement l'amplitude de transition sous la forme

$$\mathcal{A}_{fi} = i \int d^4 x \vec{A}_f^* \cdot \vec{j} \quad (6.23)$$

En utilisant le fait que $A_f^0 = 0$, on peut également l'écrire

$$\mathcal{A}_{fi} = -i \int d^4 x A_f^{\mu*} j_\mu, \quad (6.24)$$

dont on notera la similitude formelle avec l'équation (4.40) donnant l'amplitude de diffusion d'une particule chargée (de spin 0 ou 1/2) par un champ électromagnétique extérieur. Bien que nous ayons effectué le calcul dans la jauge de Coulomb pour A_f^μ , le résultat sous la forme (6.24) est invariant dans la transformation de jauge $A_f^\mu \rightarrow A_f^\mu + \partial^\mu \Lambda$ si le courant j^μ vérifie l'équation de conservation $\partial_\mu j^\mu = 0$.

En remplaçant $A_f^{\mu*}$ par son expression (6.13), on voit apparaître la transformée de Fourier du courant j^μ , évaluée en $k^0 = |\vec{k}|$:

$$\mathcal{A}_{fi} = -\frac{i}{\sqrt{2kV}} \epsilon^{\mu*} \tilde{j}_\mu(k, \vec{k}). \quad (6.25)$$

Soulignons qu'il s'agit ici d'une expression exacte, et non d'un calcul de perturbation. Ce processus se représente par le diagramme de Feynman de la figure 6.1.

Nous en déduisons une nouvelle règle de Feynman: à un photon sortant est associé un facteur $\epsilon^{\mu*}$. De même, on montrerait qu'à un photon entrant est associé un facteur ϵ^μ . Notons qu'on peut choisir de se limiter à des vecteurs de polarisation réels, auquel cas les facteurs associés à un photon entrant ou sortant coïncident.

Nous allons maintenant revenir dans la jauge de Coulomb, où

$$\mathcal{A}_{fi} = \frac{i}{\sqrt{2kV}} \vec{\epsilon}^* \cdot \tilde{j}(k, \vec{k}). \quad (6.26)$$

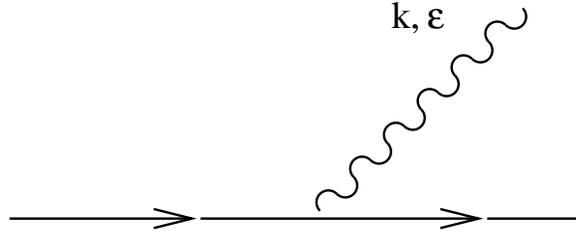


FIG. 6.1 - Diagramme de Feynman du rayonnement d'un photon. On a représenté ici le courant extérieur par une ligne pleine.

6.5 Bremsstrahlung

Considérons le cas particulier où $\vec{j}(x)$ est le courant créé par une particule de charge e , brusquement déviée à $t=0$:

$$\begin{aligned}\vec{X}(t) &= \vec{v}_i t & t < 0 \\ &= \vec{v}_f t & t > 0\end{aligned}\quad (6.27)$$

Le courant correspondant est donné par l'équation (2.18) et sa transformée de Fourier par

$$\begin{aligned}\tilde{j}(\omega, \vec{k}) &= \int d^4x e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \vec{j}(t, \vec{x}) \\ &= e\vec{v}_i \int_{-\infty}^0 dt e^{i(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}_i)t} + e\vec{v}_f \int_0^{+\infty} dt e^{i(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}_f)t}.\end{aligned}\quad (6.28)$$

Les intégrales oscillent pour $t \rightarrow \pm\infty$. Mais on a supposé que \vec{j} s'annule pour $t \rightarrow \pm\infty$, ce qui nous autorise à ajouter un facteur de convergence $-\varepsilon|t|$ dans l'exponentielle, où ε est un réel positif qu'on fait tendre vers 0 à la fin du calcul. On obtient alors par un calcul élémentaire

$$\tilde{j}(\omega, \vec{k}) = -ie \left(\frac{\vec{v}_i}{\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}_i} - \frac{\vec{v}_f}{\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}_f} \right). \quad (6.29)$$

Dans le cas plus réaliste où le changement de direction n'est pas instantané mais s'opère en un temps τ , le calcul précédent est valable pour des temps grands devant τ , soit pour $\omega \ll 1/\tau$.

6.6 Catastrophe infrarouge

Le nombre total de photons rayonnés s'obtient en sommant les probabilités sur tous les états de photon possible:

$$\begin{aligned}N &= \int \frac{V d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \sum_{\text{polarisations}} |\mathcal{A}_{fi}|^2 \\ &= \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2k} \sum_{\text{polarisations}} |\vec{\epsilon} \cdot \tilde{j}(k, \vec{k})|^2.\end{aligned}\quad (6.30)$$

Une fois de plus, on voit apparaître l'élément invariant d'espace des phases, et les facteurs de volume disparaissent. La somme sur les polarisations s'effectue au moyen du résultat

$$\sum_{\text{polarisations}} \epsilon_i \epsilon_j = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\vec{k}^2} \quad (6.31)$$

où le membre de droite représente le projecteur sur le plan perpendiculaire à \vec{k} . (comme pour l'équation de Dirac, la somme sur les polarisations fait apparaître le projecteur sur l'espace des états de polarisation physiques).

Les intégrales sur le module et sur l'angle solide de \vec{k} se factorisent. Celle sur le module de k est de la forme $\int_0^\infty dk/k$ qui diverge pour $k \rightarrow 0$ et pour $k \rightarrow \infty$. La divergence pour $k \rightarrow \infty$, dite ultraviolette, n'est pas gênante car nous savons que notre calcul ne se justifie pour $k \ll 1/\tau$, où τ est la durée de la collision. En revanche, la divergence pour $k \rightarrow 0$, dite infrarouge, subsisterait dans un calcul plus réaliste: le nombre de photons diverge, ce qu'on appelle catastrophe infrarouge.

Chapitre 7

Quelques processus élémentaires

Jusqu'à présent, nous avons étudié l'interaction d'une seule particule avec un champ extérieur donné. Même la création de paires n'était, formellement, qu'un processus de diffusion faisant intervenir des états d'énergie négative. Dans le cadre de la mécanique quantique relativiste, nous ne pouvons pas, en principe, étendre nos résultats à l'interaction de plusieurs particules.

De ce point de vue, la situation est différente en mécanique quantique non relativiste, où le même formalisme permet, par exemple, de décrire deux électrons en interaction. Les forces magnétiques sont négligeables, et la force électrostatique est représentée par le terme $e^2/(4\pi|\vec{x} - \vec{y}|)$ dans le hamiltonien. Si leur mouvement est relativiste, par contre, l'interaction n'est plus instantanée. Il faut prendre en compte le retard dû à la propagation, étudié au chapitre 3. Le champ électromagnétique ne peut plus s'exprimer seulement en fonction des positions des charges en présence, il constitue un intermédiaire de calcul incontournable.

Dans ce chapitre, nous allons néanmoins calculer quelques processus à plusieurs particules, en utilisant des arguments heuristiques pour calculer les amplitudes de transition.

7.1 Diffusion de deux particules scalaires chargées

Commençons par étudier la diffusion électromagnétique de deux particules scalaires distinctes, par exemple les mésons π^- et K^- . Nous noterons les impulsions du π^- et du K^- respectivement p_1 et p_2 avant la diffusion, p_3 et p_4 après.

Nous savons déjà que l'amplitude de diffusion du π^- (par exemple) dans un champ électromagnétique donné s'écrit sous la forme (4.40):

$$\mathcal{A}_{fi} = -i \int d^4x j_\pi^\mu(x) A_\mu(x) \quad (7.1)$$

où j_π^μ désigne le courant de transition (4.46)

$$j_\pi^\mu(x) = e(p_1^\mu + p_3^\mu) e^{-i(p_1 - p_3) \cdot x} \frac{1}{\sqrt{2V|E_1|}} \frac{1}{\sqrt{2V|E_3|}}. \quad (7.2)$$

Pour le processus qui nous intéresse, nous allons prendre pour $A^\mu(x)$ le champ créé par le K^- . On a vu au chapitre 3 que le champ créé par un courant $j_K^\mu(x)$ s'écrit

$$A^\mu(x) = \int d^4x' G(x - x') j_K^\mu(x') \quad (7.3)$$

où G est le propagateur du champ électromagnétique, et j_K reste à définir. L'amplitude de diffusion prend alors la forme

$$\mathcal{A}_{fi} = -i \int d^4x d^4x' j_{\pi}^{\mu}(x) G(x-x') j_K^{\mu}(x'). \quad (7.4)$$

Par symétrie entre les rôles joués par π^- et K^- , on est amené à choisir pour j_K^{μ} le courant de transition associé au K^- , qui s'écrit

$$j_K^{\mu}(x) = e(p_2^{\mu} + p_4^{\mu}) e^{-i(p_2-p_4)\cdot x} \frac{1}{\sqrt{2V|E_2|}} \frac{1}{\sqrt{2V|E_4|}}. \quad (7.5)$$

Nous pouvons maintenant calculer l'amplitude de transition (7.4). On écrit le propagateur en transformée de Fourier

$$G(x-x') = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iq\cdot(x-x')} \frac{-1}{q^2}. \quad (7.6)$$

Les intégrations sur x et sur y donnent respectivement $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_3 - p_1 - q)$ et $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_4 - p_2 - q)$. Ceci impose que $q = p_3 - p_1 = p_4 - p_2$. En intégrant sur q , il apparaît ainsi un facteur $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_3 + p_4 - p_1 - p_2)$, qui traduit la conservation de l'énergie et de l'impulsion globales.

L'amplitude de transition s'écrit finalement

$$\mathcal{A}_{fi} = \tau_{fi} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \frac{1}{\sqrt{2E_1V} \sqrt{2E_2V} \sqrt{2E_3V} \sqrt{2E_4V}} \quad (7.7)$$

où τ_{fi} est l'amplitude de transition réduite invariante de Lorentz

$$\begin{aligned} \tau_{fi} &= -ie^2 (p_1^{\mu} + p_3^{\mu}) \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2} (p_2^{\nu} + p_4^{\nu}) \\ &= ie^2 \frac{(p_1 + p_3) \cdot (p_2 + p_4)}{q^2}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

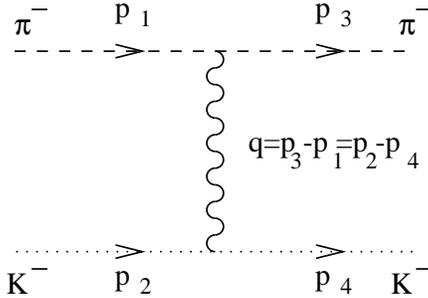


FIG. 7.1 - Diagramme de Feynman de la diffusion coulombienne $\pi^- - K^-$.

Cette amplitude se représente par le diagramme de Feynman de la figure 7.1. Comme dans le diagramme de la figure 4.1, on associe aux vertex les poids respectifs $-ie(p_1^{\mu} + p_3^{\mu})$ et $-ie(p_2^{\nu} + p_4^{\nu})$, et aux lignes externes un poids 1. La seule différence est la ligne interne décrivant la propagation du champ électromagnétique, à laquelle on associe le poids $-g_{\mu\nu}/q^2$, correspondant au propagateur.

En théorie des champs, on dit que les deux particules interagissent par l'échange d'un *photon virtuel*, ce qui traduit simplement dans un langage de particules la propagation du champ électromagnétique entre les deux charges en mouvement.

7.2 Variables de Mandelstam

Avant de terminer le calcul de la section efficace, nous allons récrire l'amplitude de transition réduite (7.8) en fonction des variables de Mandelstam, souvent utilisées en théorie des collisions. Ces variables sont les invariants de Lorentz qu'on peut former à partir des impulsions d'un processus de diffusion avec deux particules dans l'état final, tel que celui de la section 7.1 :

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 \\ t &= (p_1 - p_3)^2 \\ u &= (p_1 - p_4)^2. \end{aligned} \quad (7.9)$$

On rapprochera ces définitions de celles des variables de Dalitz introduites dans la section 2.3.3. La première variable s représente le carré de l'énergie disponible dans le référentiel du centre de masse (voir section 2.3.1). On a par conséquent $s > (m_1 + m_2)^2$, en notant m_1 et m_2 les masses des deux particules incidentes.

La deuxième variable, t , a une interprétation simple dans le cas d'une collision élastique où les particules 1 et 3 sont identiques ainsi que les particules 2 et 4. Dans le référentiel du centre de masse, on a alors $E_1 = E_3$, et donc $t = -|\vec{p}_1 - \vec{p}_3|^2$. On voit que $-t$ représente le carré de l'impulsion transférée au cours de la collision: c'est le q^2 du diagramme 7.1. On a donc $t < 0$. Enfin, u joue un rôle similaire à t , en intervertissant les particules dans l'état final.

Les trois variables s , t et u ne sont pas indépendantes. Dans le cas le plus général où les quatre particules externes ont des masses différentes, on a la relation

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2. \quad (7.10)$$

Vérifions cette relation: $s = (p_1 + p_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2p_1 \cdot p_2$, et de même pour t et u . Par conséquent

$$s + t + u = 3m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + 2p_1 \cdot (p_2 - p_3 - p_4). \quad (7.11)$$

Or $p_2 - p_3 - p_4 = -p_1$, d'où on déduit le résultat cherché.

Pour des particules scalaires, l'amplitude de transition réduite ne peut dépendre que des impulsions. Comme elle est un scalaire de Lorentz, elle doit pouvoir s'exprimer en fonction des variables de Mandelstam. Par exemple, l'amplitude (7.8) s'écrit

$$\tau_{fi} = ie^2 \frac{s - u}{t}. \quad (7.12)$$

Vérifions le. D'une part,

$$s - u = (p_1 + p_2)^2 - (p_1 - p_4)^2 = 2p_1 \cdot (p_2 + p_4) \quad (7.13)$$

puisque $p_2^2 = p_4^2$. Mais on peut aussi écrire

$$s - u = (p_3 + p_4)^2 - (p_3 - p_2)^2 = 2p_3 \cdot (p_2 + p_4). \quad (7.14)$$

En prenant la demi-somme de ces équations, on trouve

$$s - u = (p_1 + p_3) \cdot (p_2 + p_4). \quad (7.15)$$

Enfin, comme on l'a dit, le q^2 du propagateur est égal à t , d'où le résultat. On dit d'un tel processus, où un propagateur est "échangé" entre les deux particules incidentes, qu'il a lieu dans le "canal t " (t channel), par référence à la variable de Mandelstam.

7.3 Calcul de la section efficace

7.3.1 Démarche générale

A partir de l'amplitude de transition (7.7), on peut calculer la section efficace, en suivant une démarche similaire à celle de la section 4.5. On commence par calculer la probabilité de transition vers un état donné, en élevant au carré l'amplitude de transition. Le "carré" de la distribution $(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_3 + p_4 - p_1 - p_2)$ s'obtient, comme dans la section 4.5.2, en prenant en compte le fait qu'on considère un volume fini V et un laps de temps fini T , ce qui permet d'écrire

$$\left((2\pi)^4\delta^{(4)}(p_3 + p_4 - p_1 - p_2)\right)^2 = VT(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_3 + p_4 - p_1 - p_2). \quad (7.16)$$

Le nombre de transitions par unité de temps dans l'espace des impulsions $d^3\vec{p}_3 d^3\vec{p}_4$ s'obtient en multipliant la probabilité de transition par le nombre d'états quantiques, comme dans la section 4.5.3, ce qui donne

$$\frac{dN}{dt} = |\tau_{fi}|^2 \frac{1}{4VE_1E_2} (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \frac{d^3\vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d^3\vec{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4}. \quad (7.17)$$

Pour obtenir la section efficace différentielle, il reste à diviser par le flux incident. Plaçons-nous dans le référentiel où $\vec{p}_2 = \vec{0}$ et $E_2 = m_2$. Le flux incident de la particule 1 est v_1/V , et on peut écrire la vitesse relative v_1 en faisant apparaître un produit scalaire de quadrivecteurs (voir exercice 2.6.1):

$$v_1 = \frac{\sqrt{E_1^2 - m_1^2}}{E_1} = \frac{\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}{m_2 E_1}. \quad (7.18)$$

On arrive au résultat final, où le volume de normalisation V n'intervient plus:

$$d\sigma = |\tau_{fi}|^2 \frac{1}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \frac{d^3\vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d^3\vec{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4}. \quad (7.19)$$

Cette expression est invariante de Lorentz, ce qui permet de l'utiliser dans n'importe quel référentiel, bien que la section efficace soit définie au départ dans le référentiel où une des deux particules est au repos. La généralisation à un nombre arbitraire de particules dans l'état final est immédiate.

7.3.2 Intégration sur l'espace des phases

La formule (7.19) est générale. Dans le cas où il n'y a que deux particules dans l'état final, on sait d'après la section 2.3.2 que les seuls vrais degrés de liberté sont l'angle solide d'émission d'une des deux particules émises, par exemple la direction \vec{p}_3 , et on peut donc intégrer sur les autres paramètres.

Commençons par calculer le terme de flux $1/\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}$. Pour effectuer ce calcul, nous choisirons un référentiel tel que les impulsions \vec{p}_1 et \vec{p}_2 soient colinéaires, suivant l'axe x . Alors $p_1 \cdot p_2 = E_1 E_2 - p_{1x} p_{2x}$. En remplaçant m_1^2 par $E_1^2 - p_{1x}^2$ et de même pour m_2^2 , on vérifie que $\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} = |E_1 p_{2x} - E_2 p_{1x}|$. En particulier, dans le

référentiel du centre de masse des deux particules incidentes, défini par $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0}$, on a simplement $\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} = |\vec{p}_1|(E_1 + E_2)$. Nous choisirons ce référentiel pour la suite du calcul.

Calculons maintenant le terme d'espace des phases

$$d\Gamma \equiv (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \frac{d^3 \vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d^3 \vec{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4}. \quad (7.20)$$

L'intégrale de $d\vec{p}_4 \delta^{(3)}(\vec{p}_3 + \vec{p}_4)$ donne 1 et impose la condition $\vec{p}_4 = -\vec{p}_3$. Il reste par conséquent

$$d\Gamma = \frac{1}{4(2\pi)^2} \delta(E_3 + E_4 - E_1 - E_2) \frac{d^3 \vec{p}_3}{E_3 E_4}. \quad (7.21)$$

où $E_4 = \sqrt{\vec{p}_3^2 + m_4^2}$. On écrit ensuite $d^3 \vec{p}_3 = |\vec{p}_3|^2 d\Omega d|\vec{p}_3|$, où $d\Omega$ désigne l'angle solide élémentaire de la direction de \vec{p}_3 . On peut ensuite intégrer sur $|\vec{p}_3|$ et éliminer la contrainte de conservation de l'énergie, puisque E_3 et E_4 ne sont fonctions que de $|\vec{p}_3|$:

$$\begin{aligned} \int d|\vec{p}_3| \delta(E_3 + E_4 - E_1 - E_2) &= \left(\frac{d(E_3 + E_4)}{d|\vec{p}_3|} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{|\vec{p}_3|}{E_3} + \frac{|\vec{p}_3|}{E_4} \right)^{-1} \\ &= \frac{E_3 E_4}{|\vec{p}_3|(E_3 + E_4)}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

où $|\vec{p}_3|$ prend la valeur qui vérifie la contrainte $E_3 + E_4 = E_1 + E_2$. On obtient finalement le terme d'espace des phases sous la forme

$$d\Gamma = \frac{1}{16\pi^2} \frac{|\vec{p}_3|}{E_1 + E_2} d\Omega. \quad (7.23)$$

En multipliant par le facteur de flux calculé précédemment, on obtient finalement

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2\pi} \frac{d\sigma}{d \cos \theta} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{|\vec{p}_3|}{|\vec{p}_1|} \frac{1}{(E_1 + E_2)^2} |\tau_{fi}|^2 \quad (7.24)$$

où θ est l'angle entre \vec{p}_1 et \vec{p}_3 . Si la collision est élastique, les particules sont les mêmes dans l'état final que dans l'état initial et par conséquent $|\vec{p}_3| = |\vec{p}_1|$ et la formule se simplifie encore.

On choisit parfois, plutôt que l'angle de déviation θ , la variable de Mandelstam t définie par l'équation (7.9):

$$t = m_1^2 + m_3^2 - 2E_1 E_3 + 2|\vec{p}_1| |\vec{p}_3| \cos \theta. \quad (7.25)$$

Dans le référentiel du centre de masse, E_3 et $|\vec{p}_3|$ ne dépendent pas de θ , et par conséquent $dt = 2|\vec{p}_1| |\vec{p}_3| d \cos \theta$. Ceci permet de récrire l'équation (7.24) sous la forme

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{64\pi s} \frac{|\tau_{fi}|^2}{|\vec{p}_1|^2}, \quad (7.26)$$

où nous avons récrit l'énergie dans le centre de masse en introduisant la variable de Mandelstam $s = (E_1 + E_2)^2$.

7.4 Création de paires; symétrie de croisement

Considérons à présent le processus $\pi^+\pi^- \rightarrow K^+K^-$. Le π^+ et le K^+ sont bien entendu les antiparticules respectives du π^- et du K^- .

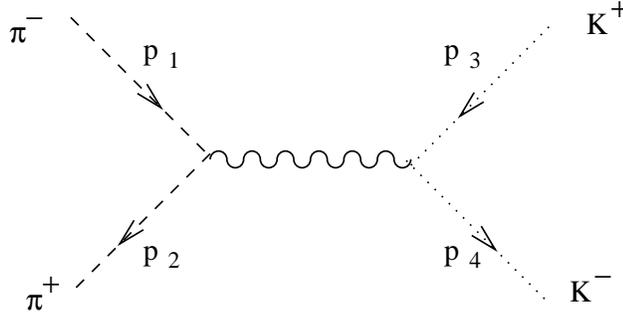


FIG. 7.2 - Diagramme de Feynman de la création de paires $\pi^+\pi^- \rightarrow K^+K^-$. Il s'agit en fait du diagramme précédent vu différemment.

D'après l'interprétation des antiparticules exposée dans la section 4.6, l'amplitude de ce processus s'obtient à partir du processus de diffusion élastique $\pi^-K^- \rightarrow \pi^-K^-$ de la figure 7.1 en remplaçant: 1) le π^- sortant, d'impulsion p_3 , par un π^+ entrant d'impulsion $-p_3$; 2) le K^- entrant, d'impulsion p_2 , par un K^+ sortant d'impulsion $-p_2$. En adoptant les notations de la figure 7.2 pour les impulsions, on voit qu'on passe d'un processus à l'autre en remplaçant dans l'amplitude de transition p_2 par $-p_3$. En termes des variables de Mandelstam (7.9), ceci revient à échanger s et t . On obtient donc sans calcul l'amplitude de création de paires à partir de l'équation (7.12):

$$\tau_{fi} = ie^2 \frac{t - u}{s}. \quad (7.27)$$

On dit d'un tel processus qu'il a lieu dans le "canal s " (s channel).

On appelle symétrie de croisement (crossing symmetry) la propriété qui permet d'échanger ainsi particules et antiparticules. Remarquons qu'on a échangé s et t pour passer d'un processus à l'autre. Pourtant, $t < 0$ dans le premier processus et $s > 4m_\pi^2$ dans le second: nous avons utilisé la même fonction, mais dans des domaines différents et même disjoints des paramètres. L'utilisation de la symétrie de croisement suppose donc un *prolongement analytique* des amplitudes de diffusion. Ici, ce prolongement est évident puisque nous disposons des expressions analytiques des amplitudes.

7.5 Diffusion de particules identiques

Considérons par exemple la diffusion élastique $\pi^-\pi^- \rightarrow \pi^-\pi^-$ (figure 7.3).

Le même processus, où l'on échangerait les impulsions sortantes p_3 et p_4 , est indiscernables puisque ce sont des particules identiques. Les particules scalaires, de spin 0, étant des bosons, la fonction d'onde de l'état final doit être symétrique par échange des deux particules. Il faut par conséquent prendre en compte, outre le diagramme de la figure 7.3, celui de la figure 7.4, et additionner les deux amplitudes.

L'amplitude du diagramme d'échange s'obtient en échangeant p_3 et p_4 . En termes des variables de Mandelstam (7.9), on échange donc t et u dans (7.12). L'amplitude totale,

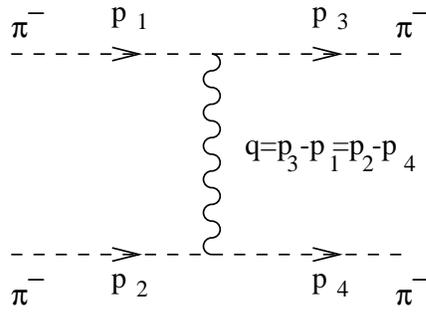


FIG. 7.3 - Diffusion élastique $\pi^- \pi^-$: diagramme direct.

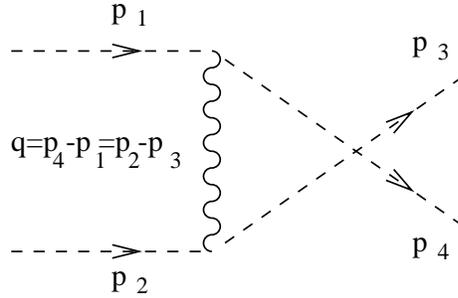


FIG. 7.4 - Diffusion élastique $\pi^- \pi^-$: diagramme d'échange.

somme des deux diagrammes, vaut donc:

$$\tau_{fi} = ie^2 \left(\frac{s - u}{t} + \frac{s - t}{u} \right). \tag{7.28}$$

Dans la suite du calcul, lorsqu'on effectue l'intégrale sur $d^3\vec{p}_3 d^3\vec{p}_4$, on comptera deux fois chaque couple de valeurs (\vec{p}_3, \vec{p}_4) . Pour cela, on divise le résultat final par deux. Par rapport à des particules distinctes, la seule différence provient du terme d'interférence entre le diagramme direct et le diagramme d'échange, qui apparaît lorsqu'on élève au carré l'amplitude (7.28).

S'il s'était agi de particules de spin 1/2, par exemple des électrons, il aurait fallu soustraire, et non ajouter les amplitudes des diagrammes 7.3 et 7.4. En effet, la fonction d'onde de deux fermions identiques doit être antisymétrique par échange des deux particules.