# Introduction

Ce mémoire rend compte de mon travail durant les quatre années qui ont suivi ma thèse. Comme la théorie des groupes joue un rôle dans toutes mes contributions, j'ai décidé de concentrer mon attention sur ce sujet particulier. Il faut entendre "théorie des groupes" dans un sens assez large puisque les contributions qui suivent touchent aussi bien aux groupes finis qu'aux groupes de Lie et aux algèbres de Lie de dimension infinie. Ce mémoire est accompagné de cinq publications, mais son but n'est pas uniquement de présenter les résultats qui y sont établis. En fait j'ai choisi une philosophie presque opposée, et je ne fais figurer dans ces notes des résultats de ces articles que si je pense pouvoir en proposer une présentation suffisamment différente de la présentation originale pour en éclairer certains aspects. Non content de cela, j'ai décidé d'inclure dans ce mémoire un chapitre conséquent sur des recherches qui n'ont jamais donné lieu à publication. Avant de donner le plan d'ensemble des notes, il est utile de passer succinctement en revue les travaux qui y sont joints.

**Publication I.** "Covariant differential equations and singular vectors in Virasoro representations" est le fruit d'une collaboration avec Philippe Di Francesco, Claude Itzykson et Jean-Bernard Zuber. Dans cet article nous étudions en détail les liens entre le développement en produits d'opérateurs et les vecteurs singuliers des modules de Verma de l'algèbre de Virasoro. Au passage nous donnons une définition du processus de "fusion" de deux représentations sources de l'algèbre de Virasoro dans une représentation image, définition plus que probablement équivalente à celles qui avaient été données auparavant mais que nous avons trouvée très commode sur le plan opératoire. Comme application nouvelle nous obtenons des formules assez explicites pour les vecteurs singuliers, qui apparaissent comme les obstructions à la fusion. Comme les produits tensoriels usuels, la fusion est décomposée par des entrelaceurs dont l'existence est liée à l'existence de solutions d'un système d'équations linéaires (les équations de descente) dont le déterminant est le déterminant de la forme contragrédiente. Si le module de Verma d'une des représentations sources contient un vecteur singulier, on peut l'utiliser pour obtenir une solution explicite des équations de descente. En utilisant cette solution, nous obtenons des formules qui transfèrent les vecteurs singuliers des représentations sources dans la représentation image quand certaines règles de fusion sont satisfaites. Par delà leur vertus opératoires, ces formules ont une structure très intéressante. En particulier, nous avons été amenés à l'étude de la fusion par une similitude entre les équations différentielles covariantes (liées aux algèbres $W$ classiques) sous la forme de Drinfeld–Sokolov et des formules dues à Benoit et Saint-Aubin pour une classe particulière de vecteurs singuliers. Il est remarquable que le développement en

produits d'opérateurs redonne ces formules comme conséquence naturelle de l'existence du vecteur singulier le plus simple.

**Publication II.** "Fusion and singular vectors in $A_1^{(1)}$ highest weight cyclic modules" a été publié en collaboration avec Nir Sochen. Son but est l'étude de la fusion et des vecteurs singuliers pour le cas de l'algèbre affine $A_1^{(1)}$. Tout d'abord il nous semblait intéressant de voir si la méthode développée pour l'algèbre de Virasoro pouvait s'étendre à d'autres algèbres. Ensuite, il est connu depuis longtemps que l'algèbre de Virasoro et l'algèbre affine $A_1^{(1)}$ sont reliées par une procédure de réduction hamiltonienne quantique, et nous aurions souhaité trouver des formules exprimant directement les vecteurs singuliers de l'algèbre de Virasoro à partir de ceux de $A_1^{(1)}$, ce qui aurait évité des détours compliqués par la bosonisation. Nous avons effectivement réussi à obtenir des formules pour les vecteurs singuliers de $A_1^{(1)}$, mais leur structure est assez différente de celle obtenue pour l'algèbre de Virasoro et nous n'avons pas réussi à faire le lien. Dans le cas de $A_1^{(1)}$, ce n'est pas la connaissance d'un vecteur singulier particulier qui permet le transfert, mais une formule universelle (c'est-à-dire valable même en l'absence de tout vecteur singulier), l'équation de Knizhnik–Zamolodchikov. Il était reconnu depuis longtemps que cette équation était l'outil de base pour calculer les fonctions de corrélation des théories conformes associées à $A_1^{(1)}$. Dans le développement en produits d'opérateurs, c'est aussi elle qui joue le rôle de brique fondamentale pour le transfert. C'est elle qui donne la solution universelle des équations de descente. Grâce au développement en produits d'opérateurs, nous obtenons en particulier une suite double (définie par récurrence et dépendant des paramètres d'une fusion) indexée par les poids des modules de Verma et dont les pôles sont exactement les zéros du déterminant de la forme contragrédiente et les résidus aux pôles les règles de fusion.

**Publication III.** "Triangulations" résulte d'une collaboration avec Claude Itzykson. L'objet central est la combinatoire des graphes de Feynman des modèles de matrices hermitiennes vue sous divers angles. La contribution d'un diagramme d'un tel modèle de matrices est reliée à sa caractéristique d'Euler et les développements pour $N$ grand ($N$ est la taille des matrices) sont des dévelopements topologiques. L'idée naïve pour représenter la gravité quantique serait de sommer pour chaque graphe sur les longueurs possibles de ses arêtes puis de sommer sur tous les graphes. Il se trouve que, dans la double limite d'échelle, la mesure naturelle d'intégration sur les matrices reproduit exactement la mesure qui viendrait (de façon assez inextricable) de la sommation naïve. Mais ces modèles de matrice sont aussi très intéressants hors de la double limite d'échelle, et c'est sur deux de leurs aspects combinatoires que l'article se concentre.

La première partie décrit les graphes un par un et pour eux-mêmes. Cette partie s'inspire de l'"Esquisse d'un programme" de Grothendieck. C'est une présentation pédagogique, à l'usage des physiciens, des "dessins d'enfants", une notion qui, dans le cas des surfaces orientables, coïncide exactement avec celle de graphe de modèle de matrices hermitiennes. Les "dessins d'enfants" portent des structures remarquables où combinatoire, géométrie complexe et géométrie algébrique sur les corps de nombres s'unifient. La combinatoire est entièrement fixée par la donnée d'une représentation de permutation d'un groupe (à deux

générateurs dont une involution) sur l'ensemble des demi-arêtes du dessin. A cette combinatoire est associée une structure complexe, et même, grâce à un théorème de Belii, une structure algébrique sur un corps de nombres. Changer le dessin sans changer le nombre d'arêtes, ni le nombre de pattes des sommets ou le nombre de côtés des faces, donne une action du groupe de Galois $Gal[\bar{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}]$ par l'intermédiaire du corps de nombres associé au graphe. Nous traitons de nombreux exemples.

La deuxième partie est une présentation, elle aussi pédagogique, de travaux du deuxième auteur. Ce sont ses travaux avec Jean-Bernard Zuber sur la caractéristique virtuelle de l'espace des modules et avec Philippe Di Francesco et Jean-Bernard Zuber sur les conjectures de Witten et l'intégrale de Kontsevich. Il est remarquable que dans ces deux cas des aspects de gravité quantique se lisent sur des modèles de matrice sans faire appel à la double limite d'échelle. Les outils essentiels sont des outils de théorie des groupes, en particulier le lien entre les caractères du groupe des permutations et ceux du groupe linéaire, l'utilisation des polynômes de Schur et des conséquences appropriées des formules de Piéri et Giambelli sur les caractères du groupe linéaire.

**Publication IV.** "Polynomial relations in the centre of $U_q(sl_n)$" est le fruit d'une collaboration avec Daniel Arnaudon. Dans le cas où $q$ n'est pas racine de l'unité, la structure du centre du groupe quantique $U_q(sl_n)$ est celle d'une algèbre de polynômes. Le nombre de générateurs est le rang de $U_q(sl_n)$, c'est-à-dire $n-1$. Il existe une généralisation du théorème d'Harish-Chandra, ce qui permet d'étendre les constructions classiques et d'obtenir des formules explicites pour les opérateurs de Casimir. Quand $q$ est une racine de l'unité, ces opérateurs de Casimir sont toujours là, mais de nouveaux éléments centraux apparaissent, un pour chaque générateur du groupe quantique, soit en tout $n^2-1$. Ces nouveaux éléments centraux sont algébriquement indépendant et la dimension du centre en tant que variété algébrique subit un saut. D'autre part, le centre du groupe quantique n'est plus une variété algébrique rationnelle. Il y a apparition de relations : les opérateurs de Casimir sont algébriques dans les nouveaux éléments centraux. Ce sont certaines de ces relations que nous décrivons explicitement dans cette lettre. Leur structure est amusante, puisque (en simplifiant un peu) si dans un opérateur de Casimir on remplace chaque générateur du groupe quantique par le nouvel élément central associé, on obtient un polynôme dans les opérateurs de Casimir (dans le cas $n=2$ c'est un polynôme de Chebychev).

**Publication V.** "Spatial geometry of the electric field representation of non-Abelian gauge theories" est le résultat d'une collaboration avec Daniel Z. Freedman et Peter E. Haagensen. Nous utilisons le champ électrique comme variable dynamique fondamentale pour donner une description hamiltonienne sur l'espace des orbites de certaines théories de jauge. Partant de l'hamiltonien standard, nous lui appliquons une transformation unitaire qui nous permet de résoudre la loi de Gauss explicitement, donc de travailler directement dans l'espace des fonctionnelles d'onde invariantes de jauge. Les variables invariantes de jauge que nous construisons ont des propriétés tensorielles bien définies, ce qui se reflète dans la forme finale de l'hamiltonien. En particulier une géométrie riemannienne (parfois incorporée à une géométrie plus compliquée) apparaît très naturellement. C'est ce fait remarquable qui

nous a encouragés a poursuivre cette approche. Bien que conscients (si nous ne l'avions pas été, Raymond Stora nous l'aurait amicalement rappelé) de la difficulté de traiter les théories de jauge sur l'espace de orbites, qui plus est dans le formalisme hamiltonien et avec des équations fonctionnelles d'ordre 4, nous espérions que l'apparition d'une géométrie donnerait des idées naturelles pour de bonnes fonctions d'onde variationnelles. Pour pouvoir progresser dans cette direction il serait souhaitable de trouver une discrétisation qui conserve ces propriétés géométriques, par exemple appliquer une transformation unitaire dans le formalisme hamiltonien standard des théories de jauge sur réseau pour que les variables dynamiques deviennent des propriétés métriques de ce réseau. Nous n'avons pas réussi pour l'instant.

Regardons maintenant le mémoire proprement dit. Le contenu des différents chapitres est très hétéroclite.

Le premier chapitre est assez dense. Il passe en revue (sans prétention à l'exhaustivité) différentes méthodes qui ont été utilisées dans le cadre des théories conformes pour tenir compte de l'existence de vecteurs singuliers dans certaines représentations. Suivant le problème qu'on veut traiter, ces vecteurs singuliers sont parfois une nuisance et parfois un outil précieux. Notre contribution se situe à la frontière entre ces deux cas. La première partie de ce chapitre est assez mathématique, mais elle permet de bien préciser le cadre général. Nous présentons ensuite l'essentiel des résultats que nous avons obtenus dans les articles I et II, puis un exemple de calcul du déterminant de la forme contragrédiente et un exemple de bosonisation en restant très élémentaires. Cette présentation devrait donner au lecteur une bonne idée de l'unité du sujet, qui se voit dans la conservation des difficultés quand l'approche change, mais aussi dans certains aspects plus positifs.

Le deuxième chapitre est le plus volumineux. Il est consacré aux potentiels de fusion. C'est un sujet sur lequel j'ai travaillé plus d'un an, au début en collaboration avec Philippe Di Francesco jusqu'à ce que je quitte Saclay pour le CERN. Nous nous sommes efforcés de généraliser des résultats obtenus par Gepner dans le cas des algèbres de Lie de type $A$ et par Gepner et Schwimmer dans le cas des algèbres de Lie de type $C$. Notre recherche n'a pas été couronnée de succès. Nous avons obtenu des résultats solides, mais de type négatif, que nous n'avons pour cette raison pas cherché à publier. Par exemple nous avons pu montrer que certaines propriétés des potentiels de fusion des algèbres de Lie de type $A$ et $C$ ne se généralisent pas aux autres algèbres de Lie simples. Nous avons aussi fait à l'époque quelques conjectures. Je me rends compte aujourd'hui qu'il y a de très fortes chances que les mathématiciens soient à même de les prouver ou de les infirmer. Peut-être même ne reste-il qu'un problème de traduction. Comme c'est un sujet qui me tient beaucoup à cœur, j'ai décidé d'écrire un compte rendu de nos réflexions en donnant une formulation aussi précise que possible des questions que nous n'avons pas été capables de résoudre. Ce compte rendu est précédé de notes succinctes sur la partie des beaux résultats de Gepner qui était au centre de nos intérêts. Pour finir disons que ce sont des polynômes rencontrés dans cette étude qui sont utilisés dans l'article IV pour obtenir des relations dans le centre de $U_q(sl_n)$, à ce jour

la seule retombée positive de nos recherches sur les potentiels de fusion.

Le troisième chapitre suit de très près l'article V. Comme les résultats que nous avons obtenus en $3+1$ dimensions pour $SU(2)$ et surtout $SU(3)$ sont compliqués, nous avons traité, Daniel Z. Freedman et moi, le cas de $2+1$ dimensions pour $SU(2)$ avec les mêmes techniques. Bien que le cas physique soit asymptotiquement libre alors que le cas de $2+1$ dimensions contient une constante de couplage dimensionnée, nous pensons que ce dernier peut donner des idées pour traiter dans le cas physique. En particulier, nous pensons que la découverte d'une méthode variationnelle efficace en $2+1$ dimensions servirait dans le cas physique. Le résultat que nous avons obtenu pour l'hamiltonien est très élégant. Nous espérions être en mesure de mettre en œuvre une méthode d'approximation, et nous poursuivons nos recherches dans cette direction mais les problèmes sont nombreux. C'est pourquoi ces calculs en $2+1$ dimensions n'ont jamais été rédigés et publiés. Comme ils constituent une introduction pédagogique au cas physique en $3+1$ dimensions et que nous avons réussi à améliorer la présentation de certaines questions par rapport à l'article original, ils ont naturellement leur place dans ces notes. Nous faisons suivre cette présentation d'une brève section de théorie des invariants pour expliquer pourquoi les méthodes variationnelles semblent les plus adaptées pour notre approche.

L'article III ne fait pas l'objet d'un chapitre dans ce mémoire pour deux raisons. D'une part il est écrit en français et d'autre part je serais bien en peine d'en améliorer la présentation. Ceci ne signifie pas du tout que l'article soit parfait, mais simplement que je n'ai à ce jour pas trouvé de façon plus simple de traiter le sujet. Je voudrais simplement noter que les théories conformes donnent de nombreux exemples de courbes algébriques définies sur des corps de nombres, et que cette remarque élémentaire est pour moi un sujet de méditation (de rêverie ?) depuis plusieurs années. L'omniprésence de formes modulaires dans les théories conformes permet de soupçonner l'existence de liens profonds avec la théorie des nombres. Mais ça, c'est une autre histoire.

Je ne peux clore cette introduction sans remercier chaleureusement tous ceux (leurs noms figurent ci-dessus) dont j'ai été le collaborateur ou l'interlocuteur durant ces dernières années. Certains ont même été jusqu'à m'offrir leur amitié. Je voudrais remercier tout particulièrement Claude Itzykson, qui a guidé mes recherches et m'a initié à la théorie des groupes avec la compétence et l'enthousiasme que tous lui connaissent. Ma reconnaissance va bien au-delà de ce que ces quelques lignes pourraient exprimer.