

# MATRICES ALÉATOIRES ET GRAVITATION QUANTIQUE

B. EYNARD

*Service de Physique Théorique, Centre d'Études de Saclay,  
91191 Gif-sur-Yvette cedex, France.*

## ABSTRACT

Afin de satisfaire le principe d'incertitude, il est nécessaire que la gravitation puisse être décrite par la mécanique quantique, comme les autres interactions. Hélas, à cause de sa nature géométrique, celle-ci résiste aux méthodes habituelles de théorie des champs, elle n'est pas renormalisable à  $D = 4$ . À titre de première approche, les modèles de matrices aléatoires permettent d'obtenir une gravitation quantique discrétisée en dimension 2.

## La gravitation quantique (GQ)

La méthode la plus simple pour quantifier la gravitation est d'appliquer la technique des intégrales de chemins au champ gravitationnel, avec l'action d'Einstein  $S_g$ . Voyons d'abord ce qu'est un champ gravitationnel. Selon la théorie de la relativité générale, la gravité est une force purement géométrique. Dans un espace-temps courbe, la trajectoire d'une particule soumise à aucune force est une géodésique, et non une droite, cette déviation est exprimable comme une force. Le champ gravitationnel, est donc un espace temps courbe. Il se compose de trois éléments: une variété  $\mathcal{E}$  de dimension  $D = 4$ , munie d'un système de coordonnées  $x^\mu$ , et d'une métrique  $g^{\mu\nu}$  de signature  $(-+++)$ . Son action selon Einstein est:

$$S_g = \int_{\mathcal{E}} d^D x \sqrt{g} (GR + \Lambda) \quad (1)$$

où:

- $g = \det g^{\mu\nu}$

- $G$  est la constante gravitationnelle  $\sim 6.67 \cdot 10^{-11}$  S.I.

- $R$  est la courbure scalaire associée à la métrique  $g^{\mu\nu}$

- $\Lambda$  est la constante cosmologique (sa valeur observée est inférieure à  $10^{-70}$  et probablement nulle)

On voudrait donc calculer la fonctionnelle génératrice:

$$Z = \sum_{\{g\}} e^{-\frac{i}{\hbar} S_g} \quad (2)$$

La somme sur  $\{g\}$ , signifie que l'on doit non seulement intégrer sur toutes les métriques, mais aussi sommer sur toutes les variétés possibles. Remarquons que le système de coordonnées n'est qu'un choix de jauge arbitraire, les observables physiques n'en dépendent pas, en effet, l'action (1) est invariante par changement de coordonnées,  $S_g$  ne dépend que de la topologie de  $\mathcal{E}$  et de ses propriétés métriques comme le volume ou la courbure totale. La somme sur toutes les variétés  $\mathcal{E}$  se réduit donc à une somme sur toutes les topologies possibles, avec un facteur de symétrie correspondant au volume du groupe de jauge.

## Simplifications

La première simplification est d'effectuer une rotation de Wick (changer le temps  $t \rightarrow it$ ), pour se ramener à une métrique Euclidienne de signature  $(++++)$ . La gravité quantique devient alors une théorie statistique des variétés, avec un poids de Boltzmann  $e^{-S_g}$ .

La seconde simplification consiste à se placer en dimension  $D = 2$ , elle est motivée par plusieurs aspects:

1) En  $D = 4$ , on ne connaît pas toutes les topologies possibles. En fait la classification de toutes les topologies n'est possible qu'en dimension  $D \leq 2$ . Pour  $D = 2$ , les variétés sont des surfaces, et leur topologie est déterminée par leur "nombre de trous"  $h$  appelé *genre* (la sphère n'a pas de trou  $h = 0$ , le tore a un trou  $h = 1$ ...).

2) En  $D = 2$ , l'intégrale

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \int d^D x \sqrt{g} R \quad (3)$$

est une constante (la caractéristique d'Euler), elle ne dépend pas de la métrique  $g^{\mu\nu}$ , mais seulement de la topologie, on a  $\chi = 2 - 2h$ . Ce modèle est un bon laboratoire, pour comprendre l'influence de la topologie en mécanique quantique.

3) La GQ2D est équivalente à la théorie des cordes.

4) La GQ2D est équivalente à un problème de surfaces aléatoires, qui a son intérêt en soi (étude des membranes, interfaces...).

## Discrétisation

Comme toujours en théorie quantique des champs, il faut régulariser l'intégrale de chemin, par exemple en discrétisant. Pour cela, on va remplacer les surfaces par des polyèdres (non réguliers), faits de triangles, carrés ... de côté  $a$ . On fera ensuite tendre  $a$  vers 0, en ajustant les paramètres nus  $G_0, \Lambda_0$  de telle façon que l'aire des surfaces reste en moyenne finie (le nombre moyen de polygones doit donc être d'ordre  $1/a^2$ ), et on définira

des paramètres renormalisés  $G$  et  $\Lambda$ .  
 Pour calculer la fonction génératrice  $Z$  régularisée, on va sommer sur des surfaces polyédriques, constituées de  $n_p$  polygones, formant  $n_a$  arêtes et  $n_s$  sommets. La caractéristique d'Euler vaut alors:

$$\chi = n_p - n_a + n_s . \quad (4)$$

L'aire d'une telle surface est simplement  $a^2 n_p$ , et donc:

$$Z = \sum_{\text{polyhedres}} e^{-4\pi G_0 \chi - \Lambda_0 a^2 n_p} . \quad (5)$$

### Matrices aléatoires

On va s'intéresser à un tout autre modèle. Considérons l'intégrale matricielle suivante:

$$\tilde{Z} = \int dM e^{-N \text{Tr} V(M)} \quad (6)$$

où l'on somme sur les matrices hermitiennes  $M$  de taille  $N \times N$ , avec un potentiel polynomial

$$V(M) = \frac{1}{2} M^2 + \frac{g_3}{3} M^3 + \frac{g_4}{4} M^4 + \dots \quad (7)$$

On va développer diagrammatiquement cette intégrale, en dessinant les propagateurs comme des doubles traits, avec les règles de Feynmann suivantes (fig.1):

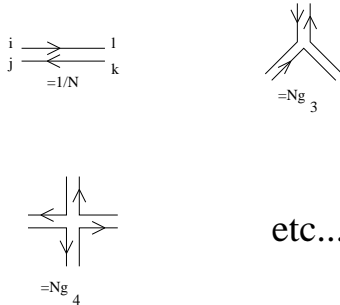


Figure 1: Règles de Feynmann

- propagateur:  $\langle M_{ij} M_{kl} \rangle = \frac{1}{N} \delta_{ii} \delta_{jk}$
- vertex  $g_3$ :  $\langle M_{ij} M_{kl} M_{mn} \rangle = N g_3 \delta_{in} \delta_{jk} \delta_{lm}$
- ainsi de suite pour les autres vertex ...

La puissance de  $g_k$  dans chaque diagramme est le nombre de vertex à  $k$  branches  $n_k$ . La puissance de  $N$  est  $-1$  pour chaque propagateur,  $+1$  pour chaque vertex, et lorsque l'on somme sur les indices des fonctions  $\delta$ , on obtient  $N$  pour chaque boucle. Maintenant, si l'on observe (fig.2) que le dual d'un diagramme de Feynmann est exactement une surface polygone, avec  $n_k$   $k$ -gonnes,

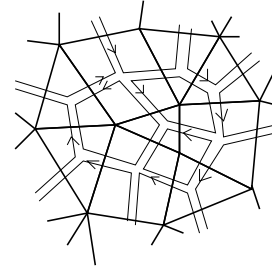


Figure 2: diagramme de Feynmann ↔ surface polygone

et chaque propagateur correspond à une arête, chaque boucle à un sommet, on a

$$\tilde{Z} = \sum_{\text{surfaces polygones}} N^{n_p - n_a + n_s} g_3^{n_3} \dots g_k^{n_k} \quad (8)$$

que l'on peut identifier avec la fonctionnelle génératrice (5) de la GQ2D, en posant  $N = e^{-4\pi G}$ ,  $g_k = e^{-a^2 \Lambda_k}$  où les  $\Lambda_k$  sont des constantes cosmologiques associées aux différents types de polygones. Plus précisément on a:

$$Z = \ln \tilde{Z} \quad (9)$$

(le  $\ln$  sert à sélectionner les surfaces connexes).  
 L'étape suivante consiste à ajuster les  $g_k$  (notés collectivement  $g$ ), à une valeur critique telle que le nombre moyen de polygones  $n_p = n_3 + n_4 + \dots$  soit d'ordre  $1/a^2$  quand  $a \rightarrow 0$ . C'est pour celà que l'on s'intéresse aux points critiques de  $\tilde{Z}$ , et à l'exposant critique  $\gamma$  défini par:

$$Z(g) \sim (g - g_c)^{2-\gamma} . \quad (10)$$

Limite  $N \rightarrow \infty$

Hélas, il n'est pas possible de calculer  $\tilde{Z}$ , car l'intégrale (6) diverge. C'est évident lorsque le potentiel  $V(M)$  dans l'exponentielle, a un terme dominant d'ordre impair, mais même quand  $V$  est pair, on peut montrer que les points critiques  $g_c$  sont toujours tels que  $V(x) \rightarrow -\infty$  lorsque  $x \rightarrow \infty$ . Cette étrange propriété est reliée au fait que le nombre de surfaces de grand genre  $h$  augmente trop rapidement avec  $h$ . Si l'on écrit:

$$Z = \sum_{h=0}^{\infty} N^{2-2h} Z_h , \quad (11)$$

on trouve que  $Z_h$  se comporte en  $2h!$  pour  $h$  grand, donc la série (11) diverge. Malgré celà, chaque  $Z_h$  peut être bien défini (en fait seule la partie singulière de  $Z_h$  au voisinage de  $g_c$  est définie) et peut être calculé en développant formellement (6) en puissances de  $1/N^2$  dans la limite  $N \rightarrow \infty$ , par exemple par la méthode

du col. Ainsi  $Z_0$  est la fonctionnelle génératrice des surfaces sphériques ( $h = 0$ )

$$Z_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \ln \tilde{Z}. \quad (12)$$

La limite  $N$  grand à un ordre fixé en  $1/N$  est donc un modèle de surfaces aléatoires de genre fixé. On peut cependant trouver une limite telle que toutes les topologies contribuent à la fonctionnelle génératrice.

### Double limite d'échelle

On peut montrer que tous les  $Z_h$  ont les mêmes points critiques  $g_c$ , et que:

$$Z_h(g) \sim \text{reg} + (g - g_c)^{(1-h)(2-\gamma)}. \quad (13)$$

Donc, si l'on considère la limite

$$\begin{cases} g & \rightarrow g_c \\ N & \rightarrow \infty \\ x & = N(g - g_c)^{1-\gamma/2} \quad \text{fini} \end{cases} \quad (14)$$

on aura:

$$Z = \sum_{h=0}^{\infty} x^{2-2h} Z_h. \quad (15)$$

Cette fois, toutes les topologies contribuent avec un poids du même ordre dans  $Z$ , et l'on peut définir une théorie continue des surfaces aléatoires de tous genres.

### Résolution

Tout le problème consiste maintenant à calculer  $g_c$  et  $\gamma$ . Il existe plusieurs méthodes: la méthode du col, la méthode des polynômes orthogonaux, les équations du mouvement... Dans tous ces cas, il est intéressant de calculer la résolvante:

$$\omega(z) = \frac{1}{N} \left\langle \text{Tr} \frac{1}{z - M} \right\rangle \quad (16)$$

Cette fonction donne accès à toutes les fonctions de corrélations de  $M$ , et contient aussi des informations sur la densité des valeurs propres de  $M$ .  $\omega$  est analytique dans tout le plan complexe, sauf le long d'un segment  $[a, b]$ , où se concentrent les valeurs propres de  $M$ . Un moyen simple de calculer  $\omega$ , est d'écrire les équations de Schwinger-Dyson. Faisons dans l'intégrale (6) le changement de variable:

$$M \longrightarrow M + \epsilon \frac{1}{z - M} \quad (17)$$

Il vient:

$$\left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} \frac{1}{z - M} \frac{1}{N} \text{Tr} \frac{1}{z - M} \right\rangle = \frac{1}{N} \left\langle \text{Tr} \frac{V'(M)}{z - M} \right\rangle \quad (18)$$

Dans la limite  $N \rightarrow \infty$ , les valeurs moyennes des traces se factorisent, et l'on a:

$$\omega^2(z) = V'(z)\omega(z) + P(z) \quad (19)$$

où  $P(z)$  est un polynôme en  $z$  de degré  $\deg P = \deg V - 2$ , et qui est entièrement déterminé par la condition que  $\omega$  ait une coupure sur  $[a, b]$ . De là, on déduit aisément les points critiques de  $\tilde{Z}$ , et leurs exposants critiques. On obtient toute une famille, indexée par un entier  $m \geq 2$ : Le  $m^{\text{ème}}$  point critique est tel que:

$$\omega(z) \underset{z \rightarrow a}{\sim} (z - a)^{m-1/2} \quad (20)$$

$$Z_0(g) \underset{g \rightarrow g_c}{\sim} (g - g_c)^{2+1/m} \quad (21)$$

$$\gamma = -\frac{1}{m} \quad (22)$$

### Conclusions

Les modèles de matrices permettent de faire des calculs explicites, en théorie des surfaces aléatoires, on peut aisément calculer des quantités physiques comme l'aire moyenne, la courbure moyenne... Tout ce formalisme admet de nombreuses généralisations (cf [1,2] pour une introduction), par exemple, on peut considérer des surfaces avec bords. On peut placer des objets, ou des champs sur ces surfaces, par exemple un modèle d'Ising, ou un modèle  $O(n)$  [3]. Cela revient à considérer la GQ en présence de matière.

Mais les modèles de matrices ont des limitations, la matière ne peut pas avoir une charge centrale  $c > 1$ , en terme de théorie des cordes, cela revient à dire que l'on ne peut pas se placer en dimension d'espace-temps  $D > 2$ . Toutefois, les modèles de matrices ont permis d'éclaircir de nombreux points de la théorie des cordes, et restent un outil puissant. Ils interviennent également dans d'autres domaines de la physique, tels que les systèmes désordonnés [4,5], QCD à un nombre de couleurs  $N$  grand ...

### Bibliographie

- [1] *Two dimensional gravity and random surfaces*, Proceedings of Jerusalem winter school(90/91), édité par D. Gross, T. Piran, et S. Weinberg, *World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd* (1992).
- [2] P. Di Francesco, P. Ginsparg et J. Zinn-Justin, *2D Gravity and random matrices*, à paraître dans *Phys. Reports* (1993).
- [3] B. Eynard et J. Zinn-Justin, *The  $O(n)$  model on a random surface, critical points and large order behaviour*, *Nucl. Phys.* **B386** (1992).
- [4] E. Brezin and A. Zee, *Correlation functions in disordered systems*, *Nucl. phys.* **B402**(1993).
- [5] B. Eynard *Large random matrices: eigenvalue distribution* Saclay preprint SPhT/93-145.