Physique théorique/*Theoretical Physics*

Sur l'entropie des surfaces aléatoires

François DAVID

Résumé — Nous prouvons, et généralisons à des surfaces de genre quelconque, une conjecture de Knizhnik, Polyakov et Zamolodchikov donnant la valeur de l'exposant γ de la susceptibilité d'une surface aléatoire en fonction de la dimension d de l'espace de plongement.

On the entropy of Random surfaces

Abstract — *We prove, and generalize to the case of surfaces with arbitrary genus, a conjecture by Knizhnik, Polyakov and Zamolodchikov for the value of the susceptibility exponent γ of a random surface as a function of the dimensionality d of embedding space.*

Abridged English Version — Recently Knizhnik, Polyakov and Zamolodchikov proposed a formula (2) for the susceptibility exponent γ of a planar random surface, related to the number of configurations $N(A)$ as a function of the area A by (1). We prove this formula by extending it to surfaces with arbitrary genus g. Starting from the partition function of the Polyakov string (3) and using the conformal gauge (4) one obtains the Liouville action (6), which depends on a background metric g^0_{ab} and on the renormalized surface tension K_r. The coupling constant λ and the field renormalization A in (6) are fixed by the absence of Weyl anomaly and given by (8) and (9). Taking for the background metric a constant curvature metric, the classical solution of the Liouville field equation is given by (10) and shifting the Liouville field Φ allows to extract immediatly the K_r dependence of the partition function (11) and from (7) the value of the exponent γ as a function of the dimension of space d and of the Euler characteristic χ of the surface is given by (13). For a planar surface ($\chi=2$) one recovers (2). (13) agrees with exact results of random lattice models with arbitrary genus for $d=0$ and -2 [11], and with the semi classical estimates from the Liouville theory ([6], [7]).

Récemment Knizhnik, Polyakov et Zamolodchikov ont proposé une formule donnant la valeur de l'exposant γ associé au nombre de configurations $N(A)$ d'une surface aléatoire planaire (ayant la topologie de la sphère S_2) d'aire A plongée dans un espace de dimension d

$$N(A) \sim e^{AK_0} A^{\gamma-3}; \qquad A \to \infty \tag{1}$$

Cette formule est [1]

$$\gamma = \frac{1}{12}[(d-1) - \sqrt{(d-1)(d-25)}]. \tag{2}$$

Dans cette Note nous prouvons cette formule en la généralisant au cas de surfaces de genre g quelconque. Partant de la fonction de partition d'une surface bosonique [2]

$$\mathbb{Z} = \int \mathscr{D}[g_{ab}]\,\mathscr{D}[X^\mu] \exp - \int d^2\xi \sqrt{g}\left[K + \frac{1}{2} g^{ab}\,\partial_a X^\mu\,\partial_b X^\mu\right] \tag{3}$$

Note présentée par Roger BALIAN.

0249-6305/88/03071051 $ 2.00 © Académie des Sciences

en fixant la jauge conforme

(4) $$g_{ab}=g_{ab}^{0}\,e^{\Phi}$$

où $\{ g_{ab}^{0} \}$ est un ensemble de métriques conformément inéquivalentes sur la surface qui paramétrise l'espace des modules, et en intégrant sur X^{μ} on obtient la fonction de partition ([2], [3])

(5) $$\mathbb{Z}=\int_{\text{Teich}} d\mu\,(g_{ab}^{0}) \int \mathscr{D}[\Phi]\exp\{ -S_{L}[g_{ab}^{0}, \Phi] \}$$

où S_L est l'action de Liouville

(6) $$S_{L}[g_{ab}^{0}, \Phi]=\frac{\lambda}{48\pi}\int d^{2}\xi\sqrt{g^{0}}\left[\frac{1}{2}g^{0\,ab}\,\partial_{a}\Phi\,\partial_{b}\Phi+R^{0}\,\Phi+\frac{K_{r}}{A}e^{A\,\Phi}\right]$$

$K_r \sim K-K_0$. Lorsque $K_r=0$ l'aire de la surface diverge et d'après (1)

(7) $$\mathbb{Z}=\int_{0}^{\infty} dA\,N(A)\,e^{-KA} \sim (K_r)^{2-\gamma}, \qquad K_r \to 0.$$

Classiquement $\lambda=26-d$ et $A=1$ ([2], [3]). Si on tient compte des fluctuations du champ de Liouville Φ, ils sont renormalisés. Leur valeur est fixée par la condition de consistence suivante : la physique décrite par (6) doit être invariante sous des transformations de Weyl de la métrique de référence g_{ab}^{0}. On obtient ([4], [5])

(8) $$\lambda=25-d$$

(9) $$A=\frac{1}{12}((25-d)-\sqrt{(1-d)(25-d)}).$$

Si la surface est compacte et sans bord on peut choisir pour les g_{ab}^{0} des métriques de courbure constante $R^{0}(\xi)=R^{0}$. L'extrémum classique de l'action (6) est

(10) $$\Phi(\xi)=\Phi_{0}=\frac{1}{A}\ln(-R^{0}/K_{r})$$

et changeant $\Phi \to \Phi_0+\Phi$, $\mathbb{Z}$ s'écrit

(11) $$\mathbb{Z}(K_{r})=\left[\frac{K_{r}}{-R^{0}}\right]^{\lambda\chi/12\,A}\mathbb{Z}(1)$$

où χ est la caractéristique d'Euler

(12) $$\chi=\frac{1}{4\pi}\int d^{2}\xi\sqrt{g^{0}}\,R^{0}=2(1-g).$$

Donc

(13) $$\gamma=2-\chi\frac{\lambda}{12\,A}=2-\chi\frac{1}{24}((25-d)+\sqrt{(1-d)(25-d)}).$$

Pour une surface planaire ($\chi=2$) cette formule coïncide avec celle proposée dans [1]. Dans la limite de couplage faible ($d \to -\infty$) elle redonne les résultats de ([6], [7]). Enfin elle redonne également les valeurs de γ qui peuvent être obtenues dans les modèles de réseaux aléatoires pour les valeurs particulières de la dimension $d=0$ et $d=-2$ pour $g=0$ ([8]-[10]) et pour $g>0$ [11]. L'intégration sur les paramètres modulaires ne devrait pas changer ce résultat. En effet, seul le bord de l'espace des modules peut conduire à des singularités supplémentaires. Elles sont donc associées à des surfaces de genre plus petit, donc à des valeurs plus petites de γ et à des singularités sous-dominantes de $\mathbb{Z}$.

Note reçue le 16 juin 1988, acceptée le 6 juillet 1988.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] G. KNIZHNIK, A. M. POLYAKOV et A. B. ZAMOLODCHIKOV, *Fractal Structure of 2-d Quantum Gravity*, prépublication Institut Landau, mai 1988.

[2] A. M. POLYAKOV, *Phys. Lett.*, 103 B, 1981, p. 207.

[3] O. ALVAREZ, *Nucl. Phys.*, B 216, 1983, p. 125.

[4] J. L. GERVAIS et A. NEVEU, *Nucl. Phys.*, B 238, 1984, p. 125-141 et 396-406.

[5] F. DAVID et E. GUITTER, *Europhys. Lett.*, 3, 1987, p. 1169 et *Nucl. Phys.*, B 293, 1988, p. 332.

[6] A. B. ZAMOLODCHIKOV, *Phys. Lett.*, 117 B, 1982, p. 87.

[7] I. K. KOSTOV et A. KRZYWICKI, *Phys. Lett.*, 187 B, 1987, p. 149.

[8] V. A. KAZAKOV, I. K. KOSTOV et A. A. MIGDAL, *Phys. Lett.*, 157 B, 1985, p. 295.

[9] J. AMBJORN, B. DURHUUS et J. FROHLICH, *Nucl. Phys.*, B 257, 1985, p. 433.

[10] F. DAVID, *Nucl. Phys.*, B 257, 1985, p. 543.

[11] I. K. KOSTOV et M. L. MEHTA, *Phys. Lett.*, 189 B, 1987, p. 118.

Laboratoire de l'Institut de Recherche fondamentale du C.E.A. et Physique théorique C.N.R.S., Service de Physique théorique de Saclay, 91191 *Gif-sur-Yvette Cedex.*