

Rapport de Stage D.E.A.

LA REGULARISATION DE PAULI VILLARS

par

François DAVID

REMERCIEMENTS

Je désire remercier tout d'abord C. de Dominicis, qui m'a accueilli au sein du Service de Physique Théorique du C.E.N. Saclay, et M. Bergère qui m'a proposé ce travail et n'a pas hésité à me consacrer une part importante de son temps dans des séances de travail qui m'ont permis de m'initier rapidement à la théorie quantique des champs. Je remercie également pour des remarques fort judicieuses sur la rotation de Wick, J. Bros et M. Grammaticou. Enfin, toute ma reconnaissance va à C. Le Gall qui s'est chargée de la lourde tâche du décryptage et de la présentation matérielle de ce travail.

INTRODUCTION

- I. AMPLITUDE DE FEYNMAN EN METRIQUE EUCLIDIENNE ET EN METRIQUE MINKOWSKIENNE
TRANSFORMATION DE WICK.
- II. PROPRIETES DES MATRICES ET DES POLYNOMES ASSOCIEES A UN GRAPHE.
 - A. Calcul de déterminants.
 - B. Forme explicite des polynomes.
 - C. Dilatations
- III. DEGRES SUPERFICIEL DE DIVERGENCE DES INTEGRALES ATTACHEES A UN GRAPHE.
 - A. Conditions de convergence
 - B. Degré superficiel de divergence
- IV. REGULARISATION DES INTEGRALES - CUT-OFF de PAULI-VILLARS.
 - A. Régularisation de Pauli-Villars.
 - B. Comportement asymptotique à grand Λ .
- V. DETERMINATION DES TERMES DOMINANTS QUAND $\Lambda \rightarrow +\infty$
 - A. Transformation de Mellin.
 - B. L'opération R dans la première bande.
 - C. Extraction de la puissance maximale en Λ .
- VI. EXTRACTION DES PARTIES DIVERGENTES A TOUS LES ORDRES POUR UN GRAPHE SCALAIRE
 - A. Transformation de Mellin, extraction par bande.
 - B. Forme des termes extraits à l'ordre n.
 - C. Décomposition de l'intégrale régularisée.
- VII. RENORMALISATION ET STRUCTURE DES CONTRE-TERMES.
 - A. Procédure BPHZ de renormalisation.
 - B. Structure des contre termes et intégrales renormalisées.
- VIII. CONCLUSION.

APPENDICES

- A. TRANSFORMATION DE MELLIN.
- B. OPERATIONS \mathcal{T}^n ET OPERATION R, PROPRIETES ET THEOREME DE CONVERGENCE.
- C. DEMONSTRATION DE (VI.11).
- D. GRAPHE AVEC COUPLAGES DERIVATIFS ET INSERTIONS DE MASSES.
 - a. Rappels.
 - b. Comportement asymptotique, extraction des pôles.
 - c. Extraction des parties divergentes.

INTRODUCTION

Le but de ce travail est d'étudier en détail la régularisation de Pauli-Villars des amplitudes de Feynman. Nous utiliserons essentiellement pour cela les méthodes mises au point par M. Bergère, Y.M.P. Lam et J.B. Zuber (Ref. [1][2][3]) et nous nous attacherons au cas des champs scalaires sans couplage dérivatifs, les résultats pouvant être sans difficulté étendus à d'autres types de champs. Les paragraphes I, II, III et IV sont consacrés à l'exposition de notions classiques. Dans les paragraphes I et II nous calculons les amplitudes de Feynman dans la représentation de Schwinger, sous une forme permettant de traiter simultanément les cas euclidien et minkowskien et précisons quelques propriétés des expressions trouvées, et leurs liens avec la topologie des graphes. Dans le paragraphe III nous étudions les divergences des intégrales de Feynman. Nous introduisons dans le paragraphe IV la régularisation de Pauli-Villars.

Dans les paragraphes V et VI nous extrayons les parties divergentes quand le cut-off tend vers l'infini.

Les résultats obtenus permettent dans le paragraphe VII de traiter de manière non récurrente la procédure de renormalisation BPHZ et de retrouver les résultats sur les contre-terme de Zimmermann.

Enfin, certains résultats fondamentaux comme le théorème de convergence de Bogolioubov et quelques démonstrations et généralisations quelques peu fastidieuses sont reportés en appendices.

I. AMPLITUDE DE FEYNMAN EN METRIQUE EUCLIDIENNE ET EN METRIQUE MINKOWSKIENNE.
TRANSFORMATION DE WICK.

La contribution d'un diagramme G peut être définie uniquement par des règles diagrammatiques. Pour une théorie scalaire massive sans couplage dérivatif, dans un espace à D dimension muni d'une métrique euclidienne définie négative, c'est à dire que si

$$p = (p_0, \dots, p_{D-1})$$

est un vecteur de l'espace, sa norme est


$$p^2 = -p_0^2 - \dots - p_{D-1}^2$$

Ces règles seront :

i) à chaque ligne externe aboutissant au diagramme \xrightarrow{P} est associée une impulsion *entrante* P

ii) à chaque ligne externe a $\xrightarrow{k_a}$ est associé

$$\int \frac{d^D k_a}{(2\pi)^D} \frac{-1}{k_a^2 - m^2}$$

iii) à chaque vertex i  est associé

$$- (2\pi)^D \delta^{(D)} \left(\text{somme des impulsions entrantes au vertex } i \right).$$

En orientant arbitrairement les lignes internes au diagramme et en définissant la *matrice d'incidence* ϵ_{ia} (i désignant les vertex, a les lignes) par :

$$\epsilon_{ia} = +1 \quad \text{si la ligne } a \text{ aboutit au vertex } i \quad \xrightarrow{a} i$$

$$\epsilon_{ia} = -1 \quad \text{si la ligne } a \text{ a quitté le vertex } i \quad \xleftarrow{a} i$$

$$\epsilon_{ia} = 0 \quad \text{dans les autres cas,}$$

et en désignant par P_i la somme des impulsions externes aboutissant au vertex i, la contribution du vertex i est

$$- (2\pi)^D \delta^{(D)} \left(P_i - \sum_a \epsilon_{ia} k_a \right)$$

Ainsi, la contribution du graphe G est :

$$I_G(P_I) = \int \prod_{a=1}^L \frac{d^D k_a}{(2\pi)^D} \frac{-1}{k_a^2 - m^2} \prod_i \left[- (2\pi)^D \delta^{(D)} (P_i - \epsilon_{ia} k_a) \right] \quad (I.1)$$

Nous utilisons la représentation intégrale de Schwinger

$$\frac{-1}{k_\alpha^2 - m^2} = \int_0^{+\infty} d\alpha_\alpha e^{\alpha_\alpha [k_\alpha^2 - m^2]} \quad (I.2)$$

Introduisons, pour un graphe G connexe à n vertex et l lignes internes

- la matrice singulière $D_{ij}(\alpha) = \sum_{a=i}^l \frac{\epsilon_{ia} \cdot \epsilon_{ja}}{\alpha_a} \quad i, j = 1 \dots n$

- la matrice non singulière $\tilde{D}_{ij}(\alpha) = i, j = 1, \dots, n-1$ obtenue en éliminant la ligne n et la colonne n, par exemple.

- la matrice non singulière $d_{ij}(\alpha) = \tilde{D}^{-1}(\alpha) |_{ij}$ inverse de $\tilde{D}(\alpha)$

- le polynôme $P(\alpha) = \left(\prod_{a=1}^l \alpha_a \right) \times \text{Det.} \tilde{D}(\alpha)$

La contribution $I_G(P)$ est

$$I_G(P) = - (2\pi)^D \delta^D(\sum p_i) C_G \int \prod_{a=1}^l d\alpha_a e^{-\sum \alpha_a m_a^2} Z_G(\alpha, P) \quad (I.3)$$

avec

$$Z_G(\alpha, P) = \frac{e^{\sum_{i,j \neq n} p_i d_{ij}(\alpha) p_j}}{P(\alpha)^{D/2}}$$

$$C_G = (-1)^{l-L} (2\pi)^{-DL} \quad (I.4)$$

(pour le calcul explicite voir par exemple Ref. [7] ch. VI).

Des propriétés précises et les formes explicites des polynômes et des matrices introduits ici seront données dans le chapitre suivant. Signalons simplement que :

- $P(\alpha)$ est un polynôme en α homogène de degré L

où $L = l - n + 1$ est le nombre de boucles indépendantes du graphe G.

- $d_{ij}(\alpha)$ est une fonction homogène des α de degré 1.

- $\sum_{I, J \neq N} p_I d_{IJ}(\alpha) p_J$ est indépendant du vertex N enlevé si $\sum_I p_I = 0$.

Il est intéressant d'obtenir les règles diagrammatiques et les amplitudes de Feynman dans le cas d'une métrique minkowskienne à partir des expressions euclidiennes.

Dans un espace à D dimensions, la métrique minkowskienne sera définie par

$$P^2 = p_0^2 - p_1^2 \dots - p_{D-1}^2 \quad \text{si } P = (p_0, \dots, p_{D-1}).$$

Pour cela, considérons l'espace des D-impulsions complexes du type $k = p + iq$ où p et q sont des vecteurs à D composantes réelles.

$$\vec{p} = (p_0, \vec{p}) \quad p_0 \text{ et } q_0 \text{ sont des scalaires réels.}$$

$q = (q_0, \vec{q})$ \vec{p} et \vec{q} sont des vecteurs réels à D-1 composantes munis d'une métrique minkowskienne, c'est à dire, que si

$$k = p + iq$$

$$k^2 = (p_0 + iq_0)^2 - (\vec{p} + i\vec{q})^2$$

Dans cet espace (de dimension D sur \mathbb{C}) on va considérer les sous-espaces. (de dimension D sur \mathbb{R}) formés des vecteurs de la forme :

$$k(\epsilon) = p + iq \quad \text{avec } p = (p_0 \cos \epsilon, \vec{p}) \quad \text{où } (p_0, \vec{p}) \text{ est un vecteur à } D \text{ composantes réelles}$$

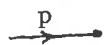
$$\text{et où } q = (q_0 \sin \epsilon, 0)$$

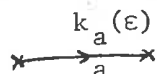
Si on calcule $k^2(\epsilon)$

$$\text{pour } \begin{cases} \epsilon = 0 & \text{on retrouve la métrique minkowskienne définie plus haut.} \\ \epsilon = \frac{\pi}{2} & \text{on retrouve la métrique euclidienne définie négative.} \end{cases}$$

Le problème est de savoir si on peut prolonger analytiquement dans un certain domaine de l'espace des D-impulsions complexes l'expression de $I_G(p)$ obtenue pour les p euclidiens de manière à retomber sur les p minkowskiens et si cette expression coïncide avec celle donnée par les expressions classiques dans l'espace de Minkowski, des règles diagrammatiques et des propagateurs.

On peut définir des règles diagrammatiques pour un ϵ quelconque de la manière suivante

i) à la ligne externe  est associée l'impulsion entrante $p(\epsilon)$

ii) à la ligne interne  est associé

$$\int \frac{d^D k_a(\epsilon)}{(2\pi)^D} \frac{i}{k_a^2(\epsilon) - m^2}$$

iii) au vertex  est associé

$$-i(2\pi)^D \delta^D (P_I(\epsilon) - \sum_a \epsilon_{ia} k_a(\epsilon))$$

où, si $k(\epsilon) = (k_0, \vec{k}) = (e^{i\epsilon} p_0, \vec{p})$, on définit pour des raisons d'homogénéité, l'élément de volume complexe par

$$d^D k(\epsilon) = dk_0 d^{D-1} \vec{k} = e^{i\epsilon} dp_0 d^{D-1} \vec{p}$$

et la fonction δ complexe (afin que $\int d^D k(\epsilon) \delta(k(\epsilon)) = 1$) par

$$\delta^{(D)}(k(\epsilon)) = e^{-i\epsilon} \delta(p_0) \delta^{(D-1)}(\vec{p})$$

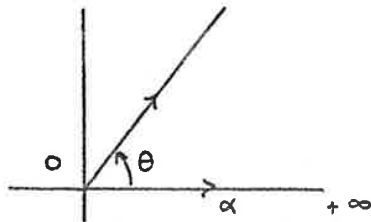
pour $\epsilon = 0$, on a les règles diagrammatiques classiques

pour $\epsilon = \frac{\pi}{2}$, on retrouve les règles Euclidiennes définies plus haut.

On peut à partir de ces règles, calculer $I_G(p(\epsilon))$ de la même manière que dans le cas euclidien, montrer que $I_G(p(\epsilon))$ est bien prolongement analytique (pour des $\epsilon \neq \pi/2$) de l'expression euclidienne et utiliser la représentation analogue à (I.1).

$$\frac{i}{k^2(\epsilon) - m^2} = -i e^{i\theta} \int_0^{+\infty} d\alpha e^{\alpha e^{i\theta} (k^2(\epsilon) - m^2)}, \quad \frac{\pi}{2} - 2\epsilon < \theta < \frac{\pi}{2} \quad (I.5)$$

la condition sur θ assurant la décroissance exponentielle de l'intégrand à l'infini. Cette rotation de θ de l'intégrand α dans le plan complexe de $\theta = 0$ (cas euclidien) à $\theta \rightarrow \pi/2$ (cas minkowskien) est désignée sous le nom de *Rotation de Wick*.



On obtient ainsi une expression de $I_G(p)$ en forme d'intégrale sur les α que nous allons obtenir directement par une autre méthode, consistant à prolonger analytiquement suivant les $p_I(\epsilon)$ les expressions (I.3) et (I.4) pour $\epsilon = \pi/2$.

$$I_G^{Euclidien}(p) = \delta^D(\sum p_{\pm}) \int_0^{+\infty} \prod_{\alpha} d\alpha_{\alpha} \frac{e^{-\sum_{\alpha} \alpha_a m_a^2 + \sum_{i,j \neq n} p_i d_{ij}(\alpha) p_j}}{P(\alpha)^{D/2}} \quad (I.6)$$

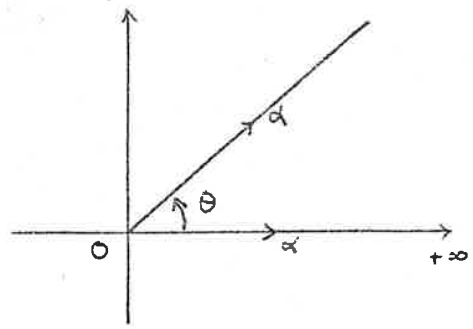
(à une constante multiplicative près).

L'intégrand analytique suivant les P_I , se prolonge sans difficulté dans les P_I complexes.

Il est de plus analytique dans les α .

Enfin la convergence de l'intégrale à l'infini est assurée dans le cas euclidien par les conditions $\alpha_a m_a^2 > 0$ et la positivité de la forme quadratique $-P_I P_J d_{IJ}(\alpha)$

Pour des P_I complexes, vue l'analyticité en α , on peut changer le contour d'intégration en α sans changer la valeur de l'intégrale $I_C(p)$ à condition de conserver le comportement asymptotique en exponentielle décroissante de l'intégrand quand $\alpha \rightarrow +\infty$.



Donc, pour passer du cas Euclidien au cas minkowskien, il s'agit de modifier les P_I et simultanément les contours d'intégration en α sans passer par des pôles de l'intégrand.

Dans notre cas particulier où les P_I sont de la forme $P_I = (P_{0I} e^{i\epsilon}, \vec{P}_I)$, si on fait tourner de θ dans les contours d'intégration en α , on obtient

$$\int_0^{+\infty} \prod (e^{i\theta} d\alpha) \cdot \frac{e^{-e^{i\theta} \sum \alpha_a m_a^2 + e^{i\theta} \sum_{IJ} P_I(\epsilon) d_{IJ}(\alpha) P_J(\epsilon)}}{e^{i\theta \frac{LD}{2}} P(\alpha)^{D/2}}$$

vu les propriétés d'homogénéité de $P(\alpha)$ et des $d_{IJ}(\alpha)$. La convergence est assurée si

$$\text{Re} \left(-e^{i\theta} \sum \alpha_a m_a^2 + e^{i\theta+2i\epsilon} \sum_{IJ} P_{0I} d_{IJ}(\alpha) P_{0J} - e^{i\theta} \sum_{IJ} \vec{P}_I d_{IJ}(\alpha) \vec{P}_J \right) < 0$$

pour tout $P_I(\epsilon)$

ou encore $-\cos \theta \left(\sum \alpha_a m_a^2 + \sum_{IJ} \vec{P}_I d_{IJ} \vec{P}_J \right) + \cos(\theta+2\epsilon) \left(\sum_{IJ} P_{0I} d_{IJ} P_{0J} \right) < 0$

qui est assuré si $\frac{\pi}{2} - 2\epsilon < \theta < \frac{\pi}{2}$

On retrouve la condition de (I.5) (en fait exactement pour les mêmes conditions de convergence)

En prenant par convention $\Theta = \frac{\pi}{2} - \epsilon$ on trouve finalement l'expression (I.7)

$$I_G(p(\epsilon)) = -i e^{-\epsilon} (2\pi)^D \delta(\sum p_I(\epsilon)) C_G \int_a^{+\infty} \prod d\alpha_a e^{-i\epsilon \sum \alpha_a m_a^2} Z_G(\alpha, p_I(\epsilon)) \quad (I.8)$$

avec

$$\left\{ \begin{aligned} Z_G(\alpha, p_I(\epsilon)) &= \frac{e^{i\epsilon \sum_{I,J \neq n} p_I(\epsilon) d_{IJ}(\alpha) p_J(\epsilon)}}{P(\alpha)^{D/2}} \\ C_G &= (-1)^{L-1} (2\pi)^{-DL} (i e^{-\epsilon})^{L-\frac{D}{2}} \end{aligned} \right. \quad (I.9)$$

L'expression dans la métrique minkowskienne sera la limite de $I_G(p(\epsilon))$ quand $\epsilon \rightarrow 0$.

Le problème essentiel est que pour $\epsilon = 0$, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \prod_a d\alpha_a \frac{e^{-i \sum_a \alpha_a m_a^2 + i \sum_{I,J} p_I d_{IJ} p_J}}{P(\alpha)^{D/2}} \quad \text{n'a plus de sens.}$$

Elle ne peut être définie que comme une limite quand on fait tendre les impulsions externes p_I vers le plan minkowskien. On montre que $I_G(p)$, analytique en dehors du plan minkowskien, devient singulière sur ce plan qui porte des singularités diverses (pôles, coupures) désignées sous le nom de singularités de Landau.

Notons enfin que quand $\epsilon \rightarrow 0+$, les propagateurs prennent la forme

$$\frac{-i}{p^2 - m^2 + 2i\epsilon p_0^2} \quad \text{semblable à la forme usuelle} \quad \frac{-i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

ainsi que pour les amplitudes en α

$$\int_0^{+\infty} \prod_a d\alpha_a e^{-\epsilon \left[\sum_a \alpha_a m_a^2 + \sum_{I,J}^{Eucl.} p_I d_{IJ}(\alpha) p_J^{Eucl.} \right]} \times \frac{e^{-i \left(\sum_a \alpha_a m_a^2 + i \sum_{I,J}^{Eucl.} p_I d_{IJ}(\alpha) p_J \right)}}{P(\alpha)^{D/2}}$$

au lieu de $\int_0^{+\infty} \prod d\alpha_a e^{-\epsilon(\sum_a \alpha_a)} \times \frac{e^{-i \sum_a m_a^2 + i \sum_{\tau, \tau'} p_{\tau} \alpha_{\tau}(\alpha) p_{\tau'}}}{P(\alpha)^{D/2}}$

où le ϵ est introduit de manière heuristique afin d'assurer la convergence des intégrales.

En fait la forme (I.8), (I.9) est plus souple pour l'étude des singularités et celle des divers comportements asymptotiques de l'amplitude.

II. PROPRIETES DE MATRICES ET DES POLYNOMES ASSOCIES A UN GRAPHE.

Dans ce paragraphe :

- G désignera un *graphe*, considéré comme un ensemble de points (*vertex*) et de *lignes* joignant ces vertex.
- n désignera le nombre de vertex de G, indexé par i, j, ...
- l désignera le nombre de lignes de G, indexée par a, b, ...
- un *sous graphe* de G sera un ensemble de points de G et de certaines lignes joignant ces points. (l'ensemble "vide" \emptyset et un vertex isolé seront donc de sous graphes de G)
- Une *partie connexe* sera un sous graphe tel qu'on puisse joindre tout couple de vertex par une suite de lignes de .
- *Attention*, un vertex isolé constitue une partie connexe de G.
- X désignera le nombre de parties connexes de .
- On définit le nombre de boucles indépendantes L du graphe par la relation

$$L + n = X + l \quad (II.1)$$

- On appelle *diagramme en arbre* un diagramme tel que $L = 0$.

Rappelons que, si on oriente de manière arbitraire les lignes, on définit la matrice d'incidence $n \times l$ ϵ_{ia} par les relations :

$$\epsilon_{ia} = \begin{cases} +1 & \text{si la ligne } a \text{ aboutit au vertex } i \\ -1 & \text{si la ligne } a \text{ quitte le vertex } i \\ 0 & \text{si la ligne } a \text{ ne passe pas par le vertex } i \end{cases} \quad (II.2)$$

On peut aussi définir la matrice $L \times l$ e_{Ba} en orientant arbitrairement L boucles indépendantes (indexées par B) et en posant :

$$e_{Ba} = \begin{cases} +1 & \text{si la ligne } a \text{ est dans la boucle } B \text{ et a même} \\ & \text{orientation} \\ -1 & \text{si la ligne } a \text{ est dans la boucle } B \text{ et n'a pas} \\ & \text{la même orientation} \\ 0 & \text{si la ligne } a \text{ n'est pas dans la boucle } B. \end{cases}$$

(Nous passons sur la définition rigoureuse d'une boucle, pour plus de précisions, voir par exemple le cours de C. Itzykson Ref. 7 ch. VI).

On a les relations :

$$\sum_i \epsilon_{i'a} = 0 \quad \text{pour } a \text{ donné} \quad (\text{II.4})$$

$$\sum_a e_{Ba} \epsilon_{i'a} = 0 \quad \text{pour } B \text{ et } i \text{ donnés} \quad (\text{II.5})$$

dont les démonstrations sont aisées (cf. références ci dessus).

A. Calcul des déterminants et des mineurs $n \times n$, $n-1 \times n-1$ et $n-2 \times n-2$, de la matrice d'incidence ϵ_{ia} .

Dans toute la suite, on considèrera un diagramme G connexe $x = 1$.

D'après la relation (II.1), si le diagramme n'est pas en arbre $\ell \geq n$ et on peut extraire un mineur d'ordre n . (On a toujours $\ell \geq n-1$)

a) Mineur d'ordre n

Cela revient à prendre les n vertex et n lignes $\{a\}$ parmi les ℓ lignes.

De la relation $\sum_{i=1}^n \epsilon_{ia} = 0$ pour tout a , on déduit que :

Le déterminant d'un mineur d'ordre n est nul. (II.6)

Autre démonstration

Considérons le sous graphe formé des n vertex et des n lignes choisies.

D'après la relation (II.1), puisqu'ici $\ell = n$ et que $x \geq 1, L \geq 1$, on peut former au moins une boucle B avec certaines n lignes choisies et la relation (II.5) impose également que le déterminant soit nul.

b) Mineur d'ordre $n-1$

Considérer un mineur d'ordre $n-1$ revient à prendre $n-1$ vertex, c'est à dire à enlever un vertex, et à prendre $n-1$ lignes parmi les ℓ lignes de G .

Ces $n-1$ lignes et les n vertex de G forment un sous graphe de G

- ou ce sous-graphe possède au moins un boucle B et

$$\sum_{a=1}^{\ell} e_{Ba} \epsilon_{i'a} = \sum_{n-1 \text{ lignes}} e_{Ba} \epsilon_{i'a} = 0 \quad \text{pour tout } i$$

et le déterminant associé est nul.

- ou c'est un sous graphe en arbre \mathcal{F} connexe d'après (II.1) ; et une fois enlevé le vertex du début, on peut associer de manière unique à chaque ligne a un vertex $i(a)$ situé à une extrémité de a .

Le déterminant de ϵ_{ia} $\left\{ \begin{array}{l} a \in \text{sous graphe en arbre} \\ i \in \{n-1 \text{ vertex choisis}\} \end{array} \right.$

est (au signe près) la somme sur toutes les associations lignes vertex $a \rightarrow s(a)$ de

$$\prod_{(n-2) \text{ lignes } a} \epsilon_{s(a), a}$$

Seule l'association définie précédemment donne un produit non nul égal à ± 1 et le déterminant est égal à ± 1 .

Finalement

$$\text{Det. [Mineur } n-i] = \begin{cases} 1 & \text{si les } l-1 \text{ ligne forment un diagramme en} \\ & \text{arbre} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

c) Mineur d'ordre $n-2$

On prend $n-2$ vertex et $n-2$ ligne de G .

Ces $n-2$ lignes et les n vertex de G forment un sous graphe de G .

. ou ce sous graphe possède une boucle b et d'après la relation (II.5)

$$\sum_a e_{B_a} \epsilon_{c_a} = \sum_{n-2 \text{ lignes } a} e_{B_a} \epsilon_{c_a} = 0$$

et le déterminant du mineur est nul.

. ou ce sous graphe ne possède pas de boucle et d'après la relation (II.1), il possède 2 parties connexes.

C'est un graphe en arbre à 2 parties connexes T_1 et T_2 et contenant tous les vertex de G (*Two trees*)

NB : une des parties connexes peut être réduite à un vertex



. Si les 2 vertex enlevés appartiennent chacun à une des composantes du two trees, le même raisonnement que dans b) montre que l'on peut associer

d'une seule manière les vertex $i(a)$ aux lignes a de manière que $\epsilon_{i(a)a} \neq 0$ et de la même manière.

Le déterminant du mineur associé est égal à ± 1 .

. Si les 2 vertex enlevés appartiennent à la même composante du two-tree dans toute association ligne-vertex, une ligne d'une branche sera associée à un vertex de l'autre et le déterminant sera nul.

Finalement

$$\text{Det.} \left[\text{mineur } n-2 \right] = \begin{cases} \pm 1 & \text{si les } n-2 \text{ lignes forment un two-tree} \\ & \text{et que les 2 vertex enlevés appartiennent} \\ & \text{chacun à une composante du two-tree . . .} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

On aura besoin également du résultat sur les matrices connu sous le nom de Theorème de Binet Cauchy.

Si A et B sont deux matrices $n \times m$ et $m \times n$ respectivement avec $m \geq n$ et si S désigne les sous ensembles de n indices parmi $[1 \dots m]$.

$$\text{Det}(A.B) = \sum_{\substack{\text{tous les sous} \\ \text{ensembles } S \\ \text{dans } [1 \dots m] \\ \text{à } n \text{ éléments}}} \text{Det} \begin{bmatrix} \text{mineur de A obtenu en} \\ \text{prenant les } n \text{ colonnes} \\ \text{de A indexés par } S \end{bmatrix} \\ \times \text{Det} \begin{bmatrix} \text{mineur de B obtenu en} \\ \text{prenant les } n \text{ lignes de} \\ \text{B indexés par} \end{bmatrix}$$

B. Forme explicite des polynômes.

Polynôme P(α)

P(α) est défini comme $(\prod_{a=1}^{\ell} \alpha_a) \text{Det. } \tilde{D}(\alpha)$

où $\tilde{D}(\alpha)$ est la matrice $(n-1) \times (n-1)$ formée en enlevant le vertex n à partir de

la matrice $D_{ij}(\alpha) = \sum_a \epsilon_{ia} \frac{1}{\alpha_a} \epsilon_{ja}$.

D'après le théorème (II,9)

$$\text{Det } \tilde{D}(\alpha) = \sum_{\substack{L \text{ s'ens. de} \\ n-1 \text{ lignes}}} \frac{\text{Det} \left[\epsilon_{ia} \Big|_{\substack{i=1, n-1 \\ a \in L}} \right]^2}{\prod_{a \in L} \alpha_a}$$

Et d'après le résultat (II.7), seuls les sous-ensembles de lignes L formant un arbre donnent un déterminant non nul égal à ± 1 , donc l'on en déduit immédiatement

$$\text{Det } \tilde{D}(\alpha) = \sum_{1\text{-Tree } T} \frac{1}{\left(\prod_{a \in T} \alpha_a \right)} \quad (\text{II.10})$$

$$P(\alpha) = \sum_{1\text{-Tree } T} \left(\prod_{a \in T} \alpha_a \right) \quad (\text{II.11})$$

P est un polynôme homogène en α de degré L (nombre de boucles indépendantes du diagramme) et ce résultat est indépendant du vertex omis dans la définition de $\tilde{D}(\alpha)$.

Matrice $d_{IJ}^n(\alpha)$

Désignant par $d_{ij}^n(\alpha)$ l'élément (i,j) de l'inverse de la matrice $\tilde{D}(\alpha)$ (après omission du vertex n)

$$d_{IJ}^n(\alpha) = \frac{1}{\text{Det } \tilde{D}(\alpha)} \text{Det.} \left[\begin{array}{l} \text{mineur d'ordre } n-2 \text{ extrait de } D(\alpha) \text{ par omission} \\ \text{des lignes } j \text{ et } n \text{ et des colonnes } i \text{ et } n. \end{array} \right]$$

D'après (II.9), ce déterminant est égal à :

$$\sum_{\substack{\text{sous ensembles } L \\ \text{de } n-2 \text{ lignes}}} \frac{1}{\prod_{a \in L} \alpha_a} \text{Det} \left[\begin{array}{l} \text{mineur extrait de } \epsilon_{i,j} \text{ par} \\ \text{omission des vertex } i \text{ et } n \\ \text{et des lignes } a \notin L \end{array} \right] \\ \times \text{Det} \left[\begin{array}{l} \text{mineur extrait de } \epsilon_{i,j} \text{ par} \\ \text{omission des vertex } i \text{ et } n \\ \text{et des lignes } a \in L \end{array} \right]$$

Et d'après le résultat (II.8), le produit de ces deux déterminants sera non nul seulement si L forme un two-tree, et que les vertex i et n (j et n resp.) sont sur deux branches différentes du two-tree, c'est à dire que les vertex i et j sont sur une même branche, le vertex n sur l'autre.

Dans ce cas, le premier mineur est égal à :

$$\epsilon(a_{j,n}) \prod_{i \in J, n} \epsilon_{i, a_{j,n}(i)}$$

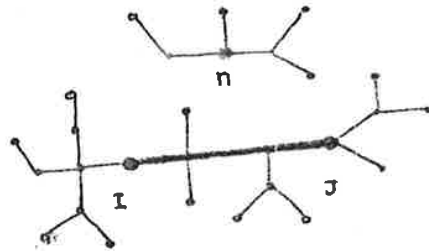
où $a_{j,n}$ désigne l'unique manière d'associer à chaque ligne du two-tree un vertex i de J et n situé à une de ses extrémités et où $\epsilon(a_{j,n})$ désigne la signature de la dite permutation.

(Même définition du deuxième mineur à partir de $a_{i,n}$)

Si on sépare le two-tree en : 1) la ligne joignant les vertex I et J .
2) le reste

il est facile de voir que $a_{I,N}$ et $a_{J,N}$ ne diffèrent que sur cette ligne et que entre les deux la signature change de $(-1)^{\text{nombre de lignes entre } I \text{ et } J}$, et que le produit de ϵ change exactement du même signe.

ex.



Le produit des déterminants est donc dans tous les cas égal à +1 et

$$d_{IJ}^n(\alpha) = \frac{1}{\text{Det } \tilde{D}(\alpha)} \sum_{\substack{\text{2Tree } T \text{ tels que} \\ n \in \text{1 branche} \\ \text{I et J à l'autre}}} \frac{1}{\prod_{a \in T} (\alpha_a)} \quad \text{donc}$$

$$d_{IJ}^n(\alpha) = \frac{N_{IJ}^n(\alpha)}{P(\alpha)} \quad \text{avec} \quad N_{IJ}^n(\alpha) = \sum_{\substack{\text{2Tree } T \\ n \in \text{1 branche} \\ \text{I et J à l'autre}}} \left(\prod_{a \in T} \alpha_a \right) \quad (\text{II.12})$$

$N_{IJ}^n(\alpha)$ est un polynôme homogène en α de degrés $L+1$ dépendant explicitement du vertex n omis, donc $d_{IJ}^n(\alpha)$ est une fonction homogène en α de degré 1 dépendant explicitement du vertex n omis.

Forme quadratique $P_i d_{ij}^n Q_j$.

Nous allons considérer maintenant la forme quadratique qui à

$$P = (P_1 \dots P_n) \text{ et } Q = (Q_1 \dots Q_n) \quad \text{associe} \quad \sum_{I, J=1}^{n-1} P_I d_{IJ}^n(\alpha) Q_J$$

Un two-tree T sépare les n vertex de G en deux parties T_1 et T_2 et

$$\sum_{I, J=1}^{n-1} P_I d_{IJ}^n P_J = \frac{1}{P(\alpha)} \sum_{\text{2Tree } T} \left(\prod_{a \notin T} \alpha_a \right) \left(\sum_{I \in T_1} P_I \right) \left(\sum_{J \in T_2} Q_J \right)$$

si $n \in T_2$

Tant que $\sum_{i=1}^n P_i = \sum_{j=1}^n Q_j = 0$ (ce qui correspond à la condition : la somme des impulsions entrantes est nulle) $\sum_{I \in T_1} P_I = - \sum_{I \in T_2} P_I$ et

l'expression $\sum_{ij \neq N} P_i d_{IJ}^n Q_j$ est indépendante de la branche du two-tree sur laquelle on effectue la sommation des impulsions, donc du vertex n enlevé.

Donc, tant que la condition-impulsion totale entrante nulle est respectée la quantité $\sum_{ij \neq N} P_i d_{ij}^n P_j$ est indépendante du vertex n enlevé.

Ce résultat, lié à l'indépendance de N de $P(\alpha)$, assure la consistance des équations (I.3) et (I.4) la fonction $Z_G(p, \alpha)$ devant être indépendante de la manière d'indexer les vertex du graphe.

La formule (II.13) s'interprète souvent de manière légèrement différente. Si on sépare les vertex de G en deux parties V_1 et V_2 et que l'on considère les sous-graphes G_1 et G_2 formés avec toutes les lignes de G joignant respectivement les vertex de V_1 et V_2 et Δ l'ensemble des lignes restantes (II.13) s'écrit :

$$\sum_{I, J \neq n} P_I N_{IJ}^n Q_J = \sum_{\substack{\{V_1, V_2\} \\ \text{partitions} \\ \text{de ce type}}} \left(\prod_{\alpha \in \Delta} \alpha_\alpha \right) \left[\sum_{\substack{\text{Tree} \\ T_1 \subset G_1}} \left(\prod_{\alpha \in G_1 - T_1} \alpha_\alpha \right) \right]^* \left[\sum_{\substack{\text{Tree} \\ T_2 \subset G_2}} \left(\prod_{\alpha \in G_2 - T_2} \alpha_\alpha \right) \right]^* \left(\sum_{I \in V_1} P_I \right) \left(\sum_{J \in V_2} Q_J \right)$$

soit

$$\sum_{I, J \neq n} P_I d_{IJ}^n Q_J = \frac{1}{P(\alpha)} \sum_{\{V_1, V_2\}} \left(\prod_{\alpha \in \Delta} \alpha_\alpha \right) P_{G_1}(\alpha) P_{G_2}(\alpha) \left(\sum_{I \in V_1} P_I \right) \left(\sum_{J \in V_2} Q_J \right) \quad (\text{II.14})$$

c) Dilatation des variables α :

Nous allons maintenant étudier plus en détail les propriétés des polynômes $P(\alpha)$ et $N_{IJ}^N(\alpha)$ quant aux dilatations relatives à un sous-graphe \mathcal{S} , c'est à dire l'opération consistant à remplacer α_a par $\rho \alpha_a$ si $a \in \mathcal{S}$ et à laisser les autres α_a invariants. Ces résultats nous permettront d'établir des propriétés d'homogénéité de $P(\alpha)$ et $N_{IJ}^N(\alpha)$ relativement à des variables dites "variables de Hepp" qui seront définies au chapitre suivant.

Dans une dilatation en ρ suivant \mathcal{S} en effectuant le changement de variables

$$\begin{aligned} \alpha_a &\longrightarrow \rho \alpha_a & \text{si } a \in \mathcal{S} \\ \alpha_a &\longrightarrow \alpha_a & \text{si } a \notin \mathcal{S} \end{aligned}$$

on obtient des polynômes $P(\alpha, \rho)$ et $N_{ij}^k(\alpha, \rho)$.

Etude de $P(\alpha, \rho)$

Considérons un sous graphe \mathcal{G} de G possédant :

- $l(\mathcal{G})$ lignes
- $n(\mathcal{G})$ vertex
- $L(\mathcal{G})$ boucles
- $\chi_{\mathcal{G}}$ parties connexes.

Un one-tree T de G définit dans \mathcal{G} un sous graphe en arbre $T_{\mathcal{G}}$ possédant $\chi_{T_{\mathcal{G}}}$ parties connexes, et, d'après l'identité $l + \chi = n + L$, $n(\mathcal{G}) - \chi_{T_{\mathcal{G}}}$ lignes.

\mathcal{G} possède donc $l(\mathcal{G}) - n(\mathcal{G}) + \chi_{T_{\mathcal{G}}} = L(\mathcal{G}) - \chi_{\mathcal{G}} + \chi_{T_{\mathcal{G}}}$ lignes qui ne sont pas dans T .

Sous une dilatation relative à \mathcal{G} :

$$\left(\prod_{\alpha \notin T} \alpha \right) \longmapsto \rho^{L(\mathcal{G}) - \chi_{\mathcal{G}} + \chi_{T_{\mathcal{G}}}} \left(\prod_{\alpha \notin T} \alpha \right)$$

(II.15)

et puisque $\chi_{T_{\mathcal{G}}} \geq \chi_{\mathcal{G}}$ $P(\alpha) = \sum_T \left(\prod_{\alpha \notin T} \alpha \right)$ se transforme en

$$P(\alpha, \rho) = \rho^{L(\mathcal{G})} \left[\sum_{\substack{\text{1 Tree } T \\ \text{tels que} \\ \chi_{T_{\mathcal{G}}} = \chi_{\mathcal{G}}}} \left(\prod_{\alpha \notin T} \alpha \right) + \text{termes d'ordre supérieurs en } \rho \right]$$

(II, 16)

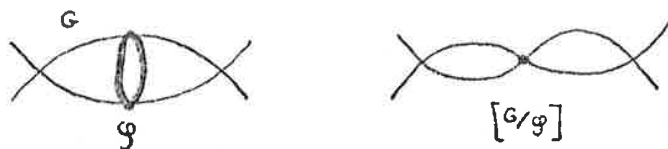
noté encore

$$P(\alpha, \rho) = \rho^{L(\mathcal{G})} P'(\alpha, \rho) \quad \text{avec} \quad P'(\alpha, 0) = \sum_{\substack{\text{1 Tree } T \\ \chi_{T_{\mathcal{G}}} = \chi_{\mathcal{G}}}} \left(\prod_{\alpha \notin T} \alpha \right)$$

(II, 17)

Introduisons la notion de graphe contracté : Si \mathcal{G} est un sous-graphe de G , le graphe contracté $[G/\mathcal{G}]$ est le graphe obtenu à partir de G en réduisant à un vertex toutes les composantes connexes de \mathcal{G}

ex :



On peut montrer^(*) que si T est un one-tree tel que $\chi_{T/\mathcal{G}} = \chi_{\mathcal{G}}$, T se sépare en un sous graphe en arbre de \mathcal{G} et un sous graphe également en arbre de $[G/\mathcal{G}]$. Alors :

$$\sum_{\substack{1\text{-Tree } T \\ \chi_{T/\mathcal{G}} = \chi_{\mathcal{G}}} } \left(\prod_{\alpha \in T} \alpha_a \right) \quad \text{se factorisé en} \quad P_{\mathcal{G}}(\alpha) \cdot P_{[G/\mathcal{G}]}(\alpha)$$

où, si \mathcal{G} a plusieurs composantes connexes \mathcal{G}_i

$$P_{\mathcal{G}}(\alpha) = \prod_i P_{\mathcal{G}_i}(\alpha) \quad (II.18)$$

et donc

$$P'(\alpha, 0) = P_{\mathcal{G}}(\alpha) P_{[G/\mathcal{G}]}(\alpha) \quad (II.19)$$

Sans approfondir la démonstration, si on généralise à un Nest de sous graphes emboîtés, c'est à dire à un ensemble de sous graphes

$\mathcal{G}_1 \not\subset \mathcal{G}_2 \dots \not\subset \mathcal{G}_n \subseteq G$ auxquels sont associés les variables de dilatation

$p_1 \quad p_2 \quad p_n$ c'est à dire que l'on transforme

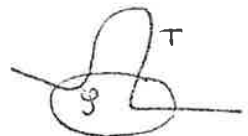
$$\alpha_a \longrightarrow \begin{cases} \alpha_a & \text{si } a \in G - \mathcal{G}_n \\ p_n \alpha_a & \text{si } a \in \mathcal{G}_n - \mathcal{G}_{n-1} \\ p_2 \dots p_n \alpha_a & \text{si } a \in \mathcal{G}_2 - \mathcal{G}_2 \\ p_1 \dots p_n \alpha_a & \text{si } a \in \mathcal{G}_1. \end{cases}$$

$P_G(\alpha)$ se transforme en


$$P_G(\alpha, p_1 \dots p_n) = \prod_{i=2}^n P_i^{L(\mathcal{G}_i)} \left[P_{[G/\mathcal{G}_n]}(\alpha) \dots P_{[G_2/p_1]}(\alpha) P_{\mathcal{G}_2}(\alpha) \right] \quad (II.20)$$

+ termes d'ordre supérieur en p_i]

(*) La difficulté provient du fait que quand on contracte \mathcal{G} , T peut former une boucle dans G/\mathcal{G} , fixée au vertex obtenu par contraction d'une composante connexe de \mathcal{G} . Il est aisé de voir qu'alors T admet plusieurs composantes (ex.) connexes dans cette composante de \mathcal{G} .



Dans le cas particulier d'un nest maximal $R_1 \subset \dots \subset R_\ell = G$ obtenu en ordonnant les lignes $i_1 \dots i_\ell$ et où le sous graphe R_p est formé des p premières lignes. R_p et R_{p+1} ne diffèrent que par la ligne i_{p+1} ,

- ou bien R_{p+1} et R_p ont même nombre de boucles et $[R_{p+1}/R_p]$ est réduit à une ligne 

- ou bien R_{p+1} a une boucle de plus et $[R_{p+1}/R_p]$ forme une boucle



Dans le premier cas, $P_{[R_{p+1}/R_p]} = 1$

Dans le second cas, $P_{[R_{p+1}/R_p]} = \alpha_{i_{p+1}}$

et $P_{[G/R_{\ell-1}]} \dots P_{[R_1]}$ est un produit de $L(G)$ variables α_i .

On verra dans le chapitre suivant qu'effectuer un changement de variable en variables de Hepp $\{\beta_i\}$ dans un secteur de Hepp consiste, pour un nest maximal R_1, \dots, R_ℓ , à effectuer une dilatation en β_i^2 sur chaque R_i et à faire $\alpha_i = 1$. De (II.20) et des remarques précédentes, on déduit immédiatement que :

$$P_G(\alpha) \sim \prod_{i=1}^{\ell} \beta_i^{2L(R_i)} [1 + \text{termes d'ordre supérieur en } \beta^2] \quad (\text{II.21})$$

D'après (II.15), les coefficients de ces termes seront de toutes manières des produits de α_i pour des one-trees divers avec $\alpha_i = 1$, donc des entiers positifs et finalement

$$P_G(\alpha) \sim \prod_{i=1}^{\ell} \beta_i^{2L(R_i)} [1 + Q(\beta_i)] \quad (\text{II.22})$$

où $Q(\beta_i)$ est un polynôme en $\beta_i^2 \geq 0$ avec $Q(0) = 0$.

Etude des Polynômes $N_{ij}^h(\alpha, \rho)$

Pour simplifier, désignons par T_{ij}^k les two-trees tels que les vertex i et j soient sur une des branches et le vertex k sur l'autre.

On a (II.12)

$$N_{ij}^k(\alpha) = \sum_{T_{ij}^k} \left(\prod_{a \in T_{ij}^k} \alpha_a \right)$$

Comme précédemment, un two-tree T_{ij}^k définit sur un sous-graphe \mathcal{G} un sous graphe en arbre T_{ij}^k possédant $n(\mathcal{G}) - \chi_{T_{ij}^k}$ lignes et \mathcal{G} possède $L(\mathcal{G}) + \chi_{T_{ij}^k} - \chi_{\mathcal{G}}$ lignes n'appartenant pas à T_{ij}^k . Puisque $\chi_{T_{ij}^k} \geq \chi_{\mathcal{G}}$ sous l'effet d'une dilatation en ρ relativement à \mathcal{G} :

$$N_{ij}^k(\alpha) \rightarrow N_{ij}^k(\alpha, \rho) = \rho^{L(\mathcal{G})} \text{ [Polynôme en } \rho \text{ et en } \alpha \text{]} \quad (\text{II.23})$$

REMARQUE

. Notons que si k et i ou j appartiennent à une même composante connexe \mathcal{G}' de \mathcal{G} , $\chi_{T_{ij}^k} \geq \chi_{\mathcal{G}'} + 1$ puisque T_{ij}^k possède au moins deux composantes connexes à l'intérieur de \mathcal{G}' , donc sous la dilatation

$$N_{ij}^k(\alpha, \rho) = \rho^{L(\mathcal{G}') + 1} \text{ [polynôme en } \rho \text{ et en } \alpha \text{].}$$

. Sinon, il existe des two-trees tels que $\chi_{T_{ij}^k} = \chi_{\mathcal{G}}$ et

$$N_{ij}^k(\alpha, \rho) = \rho^{L(\mathcal{G})} \text{ [polynôme en } \rho \text{ et en } \alpha, \neq 0 \text{ pour } \rho=0 \text{].}$$

En généralisant comme pour $P(\alpha)$ à un nest maximal $R_1 \subset \dots \subset R_\ell = G$ et en effectuant des dilatations en $\beta_1^2 \dots \beta_\ell^2$ et la réduction $\alpha_i = 1$, en appliquant la remarque précédente et en notant que i, j et k appartiennent tous à une même composante connexe de $R_\ell = G$ connexe, on obtient :

$$N_{ij}^k(\alpha) \simeq \beta_\ell^2 \left(\prod_{i=2}^{\ell} \beta_i^{2L(R_i)} \right) \text{ [Polynôme en } \beta_i \text{]} \quad (\text{II.24})$$

Enfin, revenons à la dilatation $\alpha_a \rightarrow \rho \alpha_a$ si $a \in \mathcal{G}$, à l'ordre le plus bas en ρ

$$N_{ij}^k(\alpha, \rho) = \rho^{L(\mathcal{G})} \sum_{T_{ij}^k} \left(\prod_{a \in T_{ij}^k} \alpha_a \right) \quad \chi_{T_{ij}^k} = \chi_{\mathcal{G}}$$

alors T_{ij}^k se décompose en :

- un one-tree sur chaque composante connexe de \mathcal{G}
- un two-tree sur $[G/\mathcal{G}]$ du type T_{IJ}^K

où I, J et K désignent les vertex de $[G/\mathcal{G}]$ correspondants: ou aux vertex i, j, k s'ils n'appartenaient pas à \mathcal{G} , ou à la contraction de la composante connexe de \mathcal{G} contenant ces vertex (on a vu que $K \neq I$ et J si $X_{T_{IJ}^K} = X_{\mathcal{G}}$).

D'où la factorisation en

$$P^{L(\mathcal{G})} \left[\sum_{\substack{T_{IJ}^K \\ \text{2-Tree } c \text{ } [G/\mathcal{G}]}} \left(\prod_{\substack{a \notin T_{IJ}^K \\ a \in [G/\mathcal{G}]}} \alpha_a \right) \right] \times \left[\sum_{\substack{\text{1-Tree} \\ T \subset \mathcal{G}}} \left(\prod_{a \in \mathcal{G}-T} \alpha_a \right) \right]$$

c'est à dire finalement :

$$N_{ij}^k(\alpha) P = P^{L(\mathcal{G})} \left[N_{IJ}^K(\alpha) \times P_{\mathcal{G}}(\alpha) + \text{Termes supérieurs en } P \right]$$

avec la convention $N_{IJ}^K = 0$ si $K = I$ ou J

on déduit immédiatement la formule de dilatation d'après (II.19) et (II.25).

$$P N_G(\alpha) P \xrightarrow[\substack{\alpha_a \rightarrow p \alpha_a \\ \alpha \in \mathcal{G} \\ \alpha \cdot p = 0}]{\substack{\alpha_a \rightarrow p \alpha_a \\ \alpha \in \mathcal{G} \\ \alpha \cdot p = 0}} P_{\mathcal{G}}(\alpha) \times P N_{[G/\mathcal{G}]}(\alpha) P \quad (\text{II.26})$$

III. DEGRE SUPERFICIEL DE DIVERGENCE DES INTEGRALES ATTACHEES A UN GRAPHE.

A. Conditions de convergence

D'après (I.8), la contribution I_G attachée à un diagramme G à n vertex, ℓ lignes, $X=1$ partie connexe et L boucles est proportionnelle à

$$\int_0^{+\infty} \prod_{a=1}^{\ell} d\alpha_a \frac{e^{-i\epsilon} \left[\sum_{\alpha} m_{\alpha}^2 \alpha_{\alpha} - \sum_{i,j \neq n} P_i d_{ij}^n(\alpha) P_j \right]}{P(\alpha)^{D/2}} \quad (III.1)$$

expression indépendante du vertex n enlevé.

Vu les propriétés d'homogénéité de $P(\alpha)$ et $d_{ij}^n(\alpha)$, il est intéressant de séparer le domaine d'intégration $0 \leq \alpha_a < \infty \quad \forall a = 1 \dots \ell$ en secteurs (dits *Secteurs de Hepp*) défini comme suit :

chaque secteur est le domaine $0 \leq \alpha_{i_1} \leq \alpha_{i_2} \dots \leq \alpha_{i_{\ell}} < +\infty$ (III.2)

où i_1, \dots, i_{ℓ} est un ordre donné des lignes $1, \dots, \ell$

Il y a $\ell!$ secteurs distincts dont l'union donne le domaine d'intégration initial

$$I_G(p) = \sum_{\substack{\ell! \text{ Secteurs} \\ \text{de Hepp } \mathcal{S}}} \int_{\mathcal{S}} \prod d\alpha \frac{e^{-i\epsilon} \left[\sum \alpha_a m^2 - P d_{ij}^n P \right]}{P_G(\alpha)^{D/2}} \quad (III.3)$$

et on va maintenant étudier séparément l'intégrale attachée à chaque secteur. Dans le secteur correspondant à $i_1 \dots i_{\ell}$, introduisons le changement de variable

$$\begin{aligned} \alpha_{i_{\ell}} &= \beta_{\ell}^2 & 0 \leq \beta_{\ell} < +\infty \\ \alpha_{i_{\ell-1}} &= \beta_{\ell}^2 \beta_{\ell-1}^2 & 0 \leq \beta_{\ell-1} \leq 1 \\ &\vdots & \\ \alpha_{i_1} &= \beta_{\ell}^2 \dots \beta_1^2 & 0 \leq \beta_1 \leq 1 \end{aligned} \quad (III.3)$$

De jacobien

$$J = 2^{\ell} \prod_{i=1}^{\ell} \beta_i^{2i-1}$$

Il est aisé de vérifier que l'on retrouve exactement ce changement de variable en considérant le *Nest* formé des sous graphes R_k ($k = 1, \dots, \ell$) où R_k est formé des k premières lignes i_1, \dots, i_k , en dilatant par $\frac{2}{\beta_k}$ relativement à chaque graphe R_k et en posant $\alpha_{ik} = 1$. On a alors, d'après (II.22) et (II.24) et vu les propriétés d'homogénéité de $P(\alpha)$ et $N_{ij}^k(\alpha)$.

$$P(\alpha) = \prod_{i=2}^{\ell} \beta_i^{2L(R_i)} [1 + Q(\beta)] \quad (III.4)$$

$Q(\beta)$ polynome ≥ 0 en β_i^2 ne dépendant pas de β_1

$$N_{ij}^k(\alpha) = \beta_1^2 \prod_{i=2}^{\ell} \beta_i^{2L(R_i)} R_{ij}^k(\beta) \quad (III.5)$$

$R_{ij}^k(\alpha)$ polynome ≥ 0 ne dépendant pas de β_1

Et sur chaque secteur on a d'après (III.1) une intégrale de la forme

$$2^e \int_0^{+\infty} d\beta_\ell \int_0^{\beta_\ell} \prod_{i=2}^{\ell-1} \alpha \beta_i \prod_i \beta_i^{2L(R_i)-2} \frac{e^{-i\epsilon} \beta_\ell^2 \left[m_{a_\ell}^2 + \sum_{i=2}^{\ell-1} m_{a_i}^2 \beta_{i-1}^2 \beta_i^2 - \frac{P}{2} \frac{R_{ij}^k P_j}{1+Q} \right]}{e [1 + Q(\beta)]^{D/2}} \quad (III.6)$$

Le problème est maintenant de voir si cette intégrale converge en $\beta_\ell = +\infty$ et en $\beta_i = 0$.

Comportement à l'infini

L'intégrand est de la forme (Fraction rationnelle) $\times e^{-\beta_\ell^2}$ (terme indépendant de β_1)
en β

Il suffit que la partie réelle de ce terme soit > 0 pour que l'intégrale converge.

Celle du terme de masse est de la forme :

$$\text{on } \in [m_{a_\ell}^2 + \dots] > 0 \text{ si } \epsilon > 0 \text{ et } m_{a_\ell} > 0$$

On voit immédiatement apparaitre des difficultés si $m_{a_\ell} = 0$, c'est à dire dans les théories de masse nulle (divergences infrarouges).

$$\begin{aligned} \text{l'autre terme n'est autre que } & -ie^{-i\epsilon} P dP = -ie^{-i\epsilon} P d\tilde{D} dP \\ & = -ie^{-i\epsilon} P d\epsilon \left(\frac{1}{\alpha}\right) \epsilon dP \end{aligned}$$

en posant $X_a = P_i d_{ij} \epsilon_{ja} = (X_a^0 e^{i\epsilon}, \vec{X}_a)$ (vecteur à N composantes)

on obtient $-ie^{-i\epsilon} \sum_a X_a^2 \frac{1}{\alpha_a}$ dont la partie réelle n'est autre que

$$\sin \epsilon \sum_a (X_a^0 + \vec{X}_a^2) \frac{1}{\alpha_a} \geq 0 \text{ car } \epsilon > 0$$

d'où la stricte positivité de la partie réelle si $\epsilon > 0$

Et l'intégrale converge à l'infini si $\epsilon > 0$ et si les masses sont > 0
résultat (III.7)

(III.7)

Comportement en 0

D'après (III.6), puisque $\ell(R_i) = i$ et qu'à tout secteur de Hepp correspond un *nest*, l'intégrale est de la forme

$$2^e \sum_{\substack{\text{Nest} \\ \{R_i\}}} \int_S d\beta \cdot \prod_i \beta_i^{2\ell(R_i) - DL(R_i) - 2} \frac{e^{-i\epsilon} [\dots]}{[1 + Q(\beta)]^{D/2}}$$

puisque $Q(0) = 0$, l'exponentielle et le dénominateur ne posent aucun problème en 0 et pour que l'intégrale converge, il faut que :

$2\ell(R_i) - DL(R_i) > 0$ pour tout sous graphe R_i d'un nest. Puisque tout sous graphe \mathcal{G} de G est un sous graphe d'un nest correspondant à un secteur de Hepp donné (et même à plusieurs).

(il suffit d'ordonner $i_1 \dots i_{\ell(\mathcal{G})}$ les $\ell(\mathcal{G})$ lignes de \mathcal{G} et de continuer d'ordonner les lignes de $G - \mathcal{G}$)

En posant la définition :

On appelle *degré superficiel de divergence* d'un graphe \mathcal{G}

$$\omega(\mathcal{G}) = DL(\mathcal{G}) - 2\ell(\mathcal{G}) \tag{III.8}$$

On a la *condition de convergence*.

l'intégrale $I_G(p)$ attachée au graphe G est définie si et seulement si $\omega(\mathcal{G}) < 0$ pour tout sous graphe \mathcal{G} de G .

(III.9)

B. Degré superficiel de divergence.

Cette divergence des intégrales attachées à certains graphes en $\alpha = 0$, correspondant dans l'espace des impulsions à une *divergence aux grandes impulsions* P d'après (I.1) est appelée *divergence ultra-violette*.
 un graphe \mathcal{G} tel que $\omega(\mathcal{G}) = 0$ est dit logarithmiquement divergent
 tel que $\omega(\mathcal{G}) = 1$ est dit linéairement divergent
 tel que $\omega(\mathcal{G}) = 2$ est dit quadratiquement divergent.

Dans tout ceci, nous nous sommes limités au cas des graphes scalaires sans couplages dérivatifs, ni spineurs. Dans ces théories plus générales, on peut aussi attacher à chaque graphe un degré superficiel de divergence, et une condition de convergence analogue à (III.9) (cf appendice D).

Explicitons maintenant ces résultats dans quelques cas concrets.

On a $L(\mathcal{G}) < \ell(\mathcal{G})$ pour tous les graphes connexes sauf pour le tad-pole



où $L = \ell = 1$.

Donc, d'après (III.8) si $D = 2$ $\omega(\mathcal{G}) < 0$ pour tous les graphes scalaires sauf le tad-pole.

si $D < 2$ $\omega(\mathcal{G}) < 0$ pour tous les graphes scalaires

Si $D > 2$, considérons un graphe G scalaire à n vertex i auxquels aboutissent respectivement v_i lignes.

Si ℓ est le nombre de lignes internes

N le nombre de lignes externes

$$\sum_i v_i = 2\ell + N \quad (III.10)$$

et si G est connexe $\ell + 1 = L + n$ et

$$\omega(G) = D - \frac{D-2}{2} N + \sum_i \left(\frac{D-2}{2} v_i - D \right) \quad (III.11)$$

- si $D = 2$ on a $\omega = 2(1-n)$ on retrouve le résultat précédent
- si le lagrangien d'interaction est en ϕ^v , les vertex auront v pattes.

$$\text{et } \omega = D - \frac{D-2}{2} N + \left(\frac{D-2}{2} v - D\right)n$$

si $v = \frac{2D}{D-2}$ ω ne dépend que du nombre de *lignes externes du graphe* et pas de l'ordre de perturbation considéré (nombre de vertex), la théorie est dite *strictement renormalisable*.

si $v < \frac{2D}{D-2}$ ω décroît avec n , au delà d'un certain ordre de perturbation tous les diagrammes à N pattes externes sont *superficiellement convergents*.
La théorie est *superrenormalisable*.

si $v > \frac{2D}{D-2}$ ω croît avec n , le degré superficiel de divergence croît avec l'ordre de perturbation. La théorie est *non-renormalisable*.

si $D = 4$ la théorie ϕ^4 est strictement renormalisable
 $D = 3$ la théorie ϕ^6 est strictement renormalisable
 $D = 6$ la théorie ϕ^3 est strictement renormalisable

REMARQUE

Ce fait que seules certaines théories soient strictement renormalisables présente des liens avec les problèmes d'analyse dimensionnelle. L'action $I = \int d^D x \mathcal{L}[\phi(x)]$ est sans dimension, donc \mathcal{L} doit être de dimension D en impulsion.

Si le lagrangien est celui d'un champ scalaire autocouplé

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \varphi [\square + m^2] \varphi + g \varphi^v$$

le champ ϕ doit être de dimension $\frac{D-2}{2}$ en impulsion et la constante de couplage $g \sim D - v \frac{D-2}{2}$.

On voit que la théorie est strictement renormalisable si la constante de couplage est sans dimension.

IV. REGULARISATION DES INTEGRALES-CUT-OFF DE PAULI-VILLARS.

A. Regularisation de Pauli Villars.

Dans un premier temps, on s'efforce de modifier les intégrales attachées aux graphes de manière à éliminer les divergences ultraviolettes. Cette opération porte le nom de *Régularisation* et peut bien sûr s'effectuer de multiples façons. La plus simple est le *cut-off en α* qui consiste à remplacer dans (III.1) l'intégration de 0 à $+\infty$ par une intégration de 0 à $+\infty$

$$\int_0^{+\infty} \prod_a d\alpha_a \frac{e^{-\epsilon [\sum \alpha m^2 - P d P]}}{P(\alpha)^{D/2}}$$

D'autres sont plus élaborées comme la *régularisation dimensionnelle* qui consiste, très schématiquement, à prendre dans (III.1) une dimension D non entière telle que l'expression converge.

Cependant puisque les divergences ultraviolettes sont liées (cf. Ref. 8 ch. 15-3)) au comportement des propagateurs et des fonctions de Green à k grand, c'est à dire aux singularités des mêmes fonctions sur le cône de lumière $X^2 = 0$; on régularise souvent en supprimant ces singularités par adjonctions de contretermes aux propagateurs qui laissent ces propagateurs invariants sauf dans un petit voisinage des singularités où ils compensent ces singularités.

Le cut-off de Pauli-Villars (Ref. 9) consiste à ajouter au propagateur de masse m . $\frac{i}{k^2 - m^2}$ des termes de masse Λ_i $\frac{i}{k^2 - \Lambda_i^2}$ avec des coefficients choisis de manière à obtenir un comportement à un certain ordre en k^2 du propagateur quand $k \rightarrow +\infty$.

Pour que ce propagateur "cut offé"

$$\frac{i}{k^2 - m^2} + \sum_{i=2}^p c_i \frac{i}{k^2 - \Lambda_i^2}$$

se comporte en $\frac{1}{k^2} \frac{1}{2(p+1)}$ à l'infini

il faut que les c_i vérifient les conditions (qui les déterminent entièrement)

$$\begin{aligned}
 1 + \sum_i c_i &= 0 \\
 m^2 + \sum_i \Lambda_i^2 c_i &= 0 \\
 \vdots & \\
 m^{2p-2} + \sum_i \Lambda_i^{2p-2} c_i &= 0
 \end{aligned}
 \tag{IV.1}$$

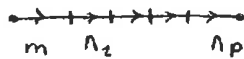
et alors le nouveau propagateur est égal à

$$\frac{i}{k^2 - m^2} \prod_{i=1}^p \left(\frac{m^2 - \Lambda_i^2}{k^2 - \Lambda_i^2} \right)
 \tag{IV.2}$$

En faisant tendre les masses Λ_i vers l'infini, on retombe sur le propagateur libre, et toutes les expressions "cut-offées" vers leurs valeurs initiales (elles divergent si l'expression libre n'est pas définie). Ce cut off est un artifice de calcul pour éliminer les divergences et ne correspond à rien de physique.

On voit d'après les règles de Feynmann et (IV.2) que régulariser les propagateurs revient à remplacer dans les diagrammes chaque ligne de masse

m  par une suite de $p+1$ lignes de masses correspondantes $m, \Lambda_1, \dots, \Lambda_p$



(multipliée par un facteur $\prod_{i=1}^p (m^2 - \Lambda_i^2)$).

Nous appellerons cette opération, l'opération (P-V), qui est une succession de p "two-legs vertex insertion".

Dans la suite, nous considérerons pour plus de simplicité le propagateur où toutes les masses de Pauli-Villars Λ_i sont égales

$$\frac{i}{k^2 - m^2} \left(\frac{m^2 - \Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2} \right)^p$$

et désignerons par $\tilde{\mathcal{G}}$ le graphe obtenu à partir d'un graphe \mathcal{G} par l'opération (P,V)

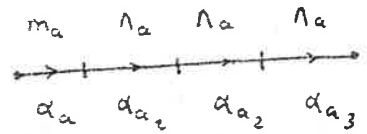


Montrons d'abord qu'avec un p suffisamment grand on assure bien la convergence de tous les graphes engendrés par le lagrangien du champ .

Si G est un graphe de la théorie, \tilde{G} le graphe régularisé, on peut calculer sa contribution suivant les règles du § 1

en attachant la variable α_a à la ligne m_a

en attachant les variables α_{a_i} aux p lignes Λ_a

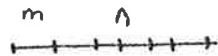


$$I_{\tilde{G}}(p) \sim \delta(\sum_i p_z) \int \prod_a d\alpha_a \prod_{a_i} d\alpha_{a_i} e^{-i\epsilon^{-1} \left[\sum_a \alpha_a m_a^2 + \sum_{a_i} \alpha_{a_i} \Lambda_a^2 \right]} \times Z_{\tilde{G}}(p, \alpha) \quad (IV.3)$$

Pour que l'intégrale converge, il faut, d'après (III.9) que le degré superficiel de divergence de tout sous graphe \mathcal{G}' du nouveau graphe \tilde{G} soit négatif

Or en séparant \mathcal{G}' en deux sous graphes $\tilde{\mathcal{G}}_1$ et \mathcal{G}'_2 de G' :

$\tilde{\mathcal{G}}_1$ ss graphe formé de tous les ensembles complets de lignes de \mathcal{G}' correspondant à une ligne de l'ancien graphe G



$$\mathcal{G}'_1 = \mathcal{G}' - \tilde{\mathcal{G}}_1$$

et soit \mathcal{G}_1 le sous graphe de G formé en réduisant les cut-off de $\tilde{\mathcal{G}}_1$, \mathcal{G}'_1 ne forme pas de boucle dans \mathcal{G}' , car les boucles de \mathcal{G}' ne peuvent être formées que par des systèmes de lignes complets formant une ligne de l'ancien graphe.


$\tilde{\mathcal{G}}_1$ possède autant de boucles que \mathcal{G}_1 et $p \ell(\mathcal{G}_1)$ lignes supplémentaires.

Donc

$$\begin{aligned} \omega(\mathcal{G}') &= L(\mathcal{G}') D - 2\ell(\mathcal{G}') \\ &= \omega(\mathcal{G}_1) - 2p \ell(\mathcal{G}_1) - 2\ell(\mathcal{G}'_1) \\ &\leq \omega(\mathcal{G}_1) - 2p \ell(\mathcal{G}_1) \end{aligned}$$

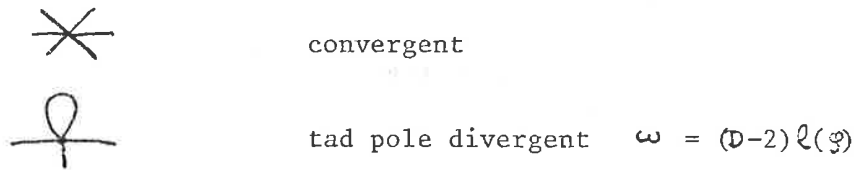
Une condition suffisante pour que tout sous graphe de \tilde{G} converge est que pour tous sous graphe \mathcal{G} de G $\omega(\mathcal{G}) - 2p \ell(\mathcal{G}) < 0$


$$\begin{aligned} \text{or } \omega(\mathcal{G}) - 2p \ell(\mathcal{G}) &= L(\mathcal{G})D - 2(p+1) [L(\mathcal{G}) + n(\mathcal{G}) - \chi_{\mathcal{G}}] \\ &= L(\mathcal{G}) [D - 2(p+1)] - [n(\mathcal{G}) - \chi_{\mathcal{G}}] 2(p+1) \end{aligned}$$

Et le nombre de vertex étant toujours \geq au nombre de composantes connexes $X_{\mathcal{G}}$ du graphe, la condition $p > (D-2)/2$ suffit pour rendre convergents tous les graphes sauf éventuellement ceux où $L(\mathcal{G}) = 0$ et $n(\mathcal{G}) = \chi_{\mathcal{G}}$, qui ne comportent que des termes de la forme , trivialement convergents.




Donc $p > (D-2)/2$ suffit à rendre convergents tous les graphes d'une théorie scalaire. (IV.6)

De plus, si $p = \frac{D-2}{2}$, $\omega(\mathcal{G}) - 2p \ell(\mathcal{G}) = - [n(\mathcal{G}) - \chi_{\mathcal{G}}] 2(p+1)$ et seuls les graphes où $n(\mathcal{G}) = \chi_{\mathcal{G}}$ seront divergents; ils sont de la forme




Si $p = \frac{D-2}{2}$ tous les graphes sont convergents sauf le tad pole ci-dessus. 

En particulier, pour le champ en ϕ^4 en dimension $D=4$

où les graphes à 0 pattes (graphes du vide)	sont $\omega = 4$	
2 pattes	sont $\omega = 2$	
4 pattes	sont $\omega = 0$	

et où les autres sont convergents.

$p = 1$ suffit pour régulariser tous les graphes sauf les tad-poles 
 $p = 2$ est nécessaire pour régulariser les tad-poles.

B. Comportement asymptotique à grand Λ

Etudions maintenant le comportement de l'intégrale régularisée quand le cut-off Λ tend vers l'infini.

Dans toute la suite nous raisonnons sur des graphes régularisés par l'opération (P.V.)

Soit G un tel graphe de ℓ lignes ($\ell = (p+1) \ell$ (ancien graphe non régularisé))

sur lesquelles on aura des masses qui seront suivant les cas des masses physiques m_a ou des cut-off Λ .

La contribution attachée à un secteur de Hepp S est, d'après (III.6) à un facteur près

$$I_S(p) = 2^\ell (m^2 - \Lambda^2)^{p \cdot \ell} \int_0^{+\infty} d\beta_\ell \int_0^{\beta_\ell} \prod_{i=2}^{\ell-1} d\beta_i \frac{\prod_{i=1}^{\ell} \beta_i^{-\omega(R_i) - 2}}{[1 + Q(\beta)]^{D/2}} \dots \exp \left[-i\epsilon^{-1} \left(\sum_i m_{a_i}^2 \beta_{e-2}^2 \cdot \beta_i^2 - \beta_e^2 \frac{R}{2+Q} P \right) \right] \quad (IV.8)$$

$R(\beta)$ et $Q(\beta)$ étant indépendants de β_ℓ , l'intégration suivant β_ℓ donne

$$2^\ell (m^2 - \Lambda^2)^{p \cdot \ell} \Gamma\left(-\frac{\omega(G)}{2}\right) \int_0^{\beta_\ell} \prod_{i=2}^{\ell-1} d\beta_i \frac{\prod_{i=1}^{\ell} \beta_i^{-\omega(R_i) - 1}}{[1 + Q(\beta)]^{D/2}} \left[i\epsilon^{-1} \left(\sum_{i=2}^{\ell} m_{a_i}^2 \beta_{e-2}^2 \cdot \beta_i^2 - \frac{R}{2+Q} P \right) \right]^{\frac{\omega(G)}{2}} \quad (IV.9)$$

On rappelle que la fonction Γ est définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} d\beta \beta^{-x-1} e^{-\beta}$$

G étant régularisé, $\omega(R_i) < 0$ pour tous les sous graphes de G, ce qui assure la convergence de l'intégrale (IV.9).

Nous allons chercher à majorer l'intégrand par une puissance de Λ en nous limitant au cas euclidien $\epsilon = \pi/2$.

La norme du terme entre crochets est dans (IV.9)

$$\left| m_{a_e}^2 + \sum_{i=2}^{l-1} m_{a_i}^2 \beta_i^2 \cdots \beta_{l-1}^2 - \frac{PR}{1+Q} P \right|$$

Soit k la dernière ligne correspondant à un cut-off Λ .

où $k = l$ et le terme entre crochets peut s'écrire

$$\left| \Lambda^2 (1 + A(\beta)) + B(\beta) - \frac{PR}{1+Q} P \right| \quad (IV.10)$$

où $A(\beta)$ et $B(\beta)$ et $-PR/1+Q$ (nous sommes dans le cas Euclidien) sont des fonctions positives bornées des β .

En conséquence, pour tout $\eta > 0$

$$\left| \Lambda^2 (1 + A) + B - \frac{PR}{1+Q} P \right| \geq \Lambda^{2-\eta} \quad \text{si } \Lambda \geq 1$$

Et en intégrant, la contribution du secteur est, puisque $\omega(G) < 0$

$$I_S(\Lambda) \leq \Lambda^{\omega(G)+\eta+2\ell p} \quad \text{pour tout } \eta > 0 \text{ pour } \Lambda \text{ assez grand} \quad (IV.11)$$

où $k < l$, et le terme entre crochets peut s'écrire

$$\left| \Lambda^2 \left[\prod_{i \geq k} \beta_i^2 \right] (1 + A(\beta)) + B(\beta) - \frac{PR}{1+Q} P \right| \quad (IV.12)$$

Ici aussi $A(\beta)$ et $B(\beta)$, $\frac{PR}{1+Q}$ étant positives bornées

$$\left| \Lambda^2 [\dots] + B - \frac{PR}{1+Q} P \right| \geq \Lambda^{2-\eta} \prod_{i \geq k} \beta_i^{2-\eta} \quad \text{et}$$

$$\left| \right|^{\omega/2} \leq \Lambda^{\omega(G)+\eta} \prod_{i \geq k} \beta_i^{\omega(G)} \quad \forall \eta > 0$$

Et dans (IV.9)

$$|I_S(\Lambda)| \leq \Lambda^{\omega(G)+\eta+2\ell p} \int_0^2 \frac{\prod_{i < k} d\beta_i \beta_i^{-\omega(R_i)-2} \prod_{i \geq k} d\beta_i \beta_i^{\omega(G)-\omega(R_i)+\eta-2}}{[1+Q(\beta)]^{D/2}} \quad (IV.13)$$

Il faut prendre $\eta > \omega(R_I) - \omega(G)$, $i \geq k$ où les R_I , $i \geq k$ sont des sous graphes contenant tous les cut-off et correspondent à des sous-graphes du graphe non régularisé. A cette condition

$$|I_S(\Lambda)| \leq cte \times \Lambda^{\omega(G) + \eta + 2\ell p}$$

Pour que les intégrales de tous les secteurs convergent il faut prendre $\eta > \omega(R_I) - \omega(G)$ pour tous les sous graphes R_I de G contenant tous les cut-off. Et en définissant

$$\Omega = \text{Sup} \{ \omega(\mathcal{G}) / \mathcal{G} \subset G \text{ contient tous les cut-off} \}$$

(IV.14)

On a finalement

$$I_G(\Lambda, p) \leq cte \cdot \Lambda^{\Omega + 2\ell p + \eta}$$

quelque soit $\eta > 0$
pour Λ assez grand dépendant
de η mais pas de p .

(IV.15)

REMARQUES

- $\Omega + 2\ell p = \text{Sup} \{ \omega(\mathcal{G}) / \text{sous graphes du graphe non régularisé.} \}$
- Si tous les sous graphes du graphe non régularisé sont convergents notons que le graphe vide \emptyset est contenu dans G et donc $\text{Sup} \omega(\mathcal{G}) = \omega(\emptyset) = 0$.

Donc $|I_G(\Lambda, p)| \leq cte$ quand $\Lambda \rightarrow +\infty$

La contribution d'un graphe convergent est finie quand $\Lambda \rightarrow +\infty$

- Dans le cas non euclidien $\varepsilon < \pi/2$, le raisonnement dans le cas $k = 0$ reste valable, mais si $k < \ell$, l'expression

$$\left(\Lambda^2 \prod_{i \geq k} \beta_i^2 (1+A) + B - P \frac{R}{1+Q} P \right)$$

est complexe et sa partie réelle s'annule pour certaines valeurs de β_i dépendant de Λ , ce qui introduit des difficultés qui ne seront pas exposées.

Le résultat reste cependant valable.

V. DETERMINATION DES TERMES DOMINANTS QUAND $\Lambda \rightarrow +\infty$

A. Transformation de Mellin

Avec les mêmes notations que dans le paragraphe précédent, la contribution d'un graphe régularisé G est d'après (IV.9) en omettant le facteur de proportionnalité et le $\delta^D(\sum P_I)$

$$I_G(p, \Lambda) = \int_0^{+\infty} \prod d\alpha_a \prod d\alpha_{a_i} e^{-i\epsilon^\epsilon [\sum \alpha_a m_a^2 + \sum \alpha_{a_i} \Lambda^2]} \frac{e^{-i\epsilon p d(\alpha) P}}{P(\alpha)^{D/2}} \quad (V.1)$$

Afin de calculer la transformée de Mellin par rapport à Λ (cf. Appendice A) introduisons en fait un cut-off en $\Lambda^2 + a$ où a est un réel > 0 arbitraire assurant l'existence de $I_G(p)$ pour $\Lambda = 0$ et permettant l'intervention des intégrations en α et en Λ par application du théorème de Fubini.

La transformée de Mellin s'écrit

$$M_G(x) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \prod d\alpha_a \prod d\alpha_{a_i} e^{-i\epsilon^\epsilon [\sum \alpha_a m_a^2 + a \sum \alpha_{a_i}]} \times \frac{e^{-i\epsilon p d(\alpha) P}}{P(\alpha)^{D/2}} \times \dots$$

$$\dots \times \int_0^{+\infty} d\Lambda^2 (\Lambda^2)^{\frac{x}{2} - 2} e^{-i\epsilon^\epsilon (\Lambda^2 \sum \alpha_{a_i})} \quad (V.2)$$

(l'intégration en $\bar{\alpha}$ est toujours assurée par $\epsilon > 0$ et $a > 0$) et

$$M_G(x) = \frac{1}{2} \Gamma(-\frac{x}{2}) (i\epsilon^{-i\epsilon})^{\frac{x}{2}} \int_0^{+\infty} \prod d\alpha e^{-i\epsilon^\epsilon (\sum \alpha_a m_a^2 + a \sum \alpha_{a_i})} \dots$$

$$\dots \frac{e^{-i\epsilon^\epsilon p d(\alpha) P}}{P(\alpha)^{D/2}} \left(\sum_{a_i} \alpha_{a_i} \right)^{x/2} \quad (V.3)$$

Puisque $I_G(\Lambda) \sim \Lambda^0$ quand $\Lambda \rightarrow 0$ (puisque $a > 0$)

$I_G(\Lambda) \sim \Lambda^{\Omega+\eta}$ quand $\Lambda \rightarrow +\infty$ $\eta > 0$.

On est assuré de l'analyticité de $M_G(X)$ dans la bande $\Omega < \text{Re} X < 0$.

On peut prouver (Ref. [3]) que $M_G(X)$ est prolongeable dans la zone $R_e X < \Omega$ en une fonction méromorphe possédant des pôles en Ω , $\Omega-2$, etc...

Ce qui assure que $I_G(\Lambda)$ se comporte asymptotiquement en

$$(m^2 - \Lambda^2)^{\epsilon p} \sum_{n \leq \Omega} \sum_{m=0}^{n(n)} C_{nm} \Lambda^n L_n^m \Lambda$$

B. Utilisation de l'opération R dans la première bande.

Dans la bande $\Omega-1 < R_e(X) \leq \Omega$, séparons l'intégrand de (V.3) en deux parties

$$g^2(x, \alpha) = e^{-i\epsilon \sum \alpha_a m_a^2 + \alpha \sum \alpha_{a_i}} R \left[\frac{e^{i\epsilon \sum \alpha_a m_a^2}}{P(\alpha)^{D/2}} \left(\sum_{a_i} \alpha_{a_i} \right)^{x/2} \right] \quad (V.5)$$

$$h^2(x, \alpha) = e^{-i\epsilon \sum \alpha_a m_a^2 + \alpha \sum \alpha_{a_i}} \left(\prod_{\substack{d \in G \\ n \in \mathbb{Z}}} \prod_{g \in d} \left[-\zeta_g^{-2\ell(g)} \right] \right) \frac{e^{-i\epsilon \sum \alpha_a m_a^2}}{P(\alpha)^{D/2}} \left(\sum_{a_i} \alpha_{a_i} \right)^{x/2} \quad (V.6)$$

L'action de R dépend du comportement de $(e^{i\epsilon \sum \alpha_a m_a^2} / P(\alpha)^{D/2}) (\sum_{a_i} \alpha_{a_i})^{x/2}$ en 0, donc de la bande dans laquelle x est choisi. Dans la bande $\Omega-1 < R_e X \leq \Omega$, $g^1(x, \alpha)$ et $h^1(x, \alpha)$ s'expriment en fonctions de développement de Taylor en α à un ordre donné, sont analytiques en x et peuvent se prolonger dans tout le plan complexe en deux fonctions analytiques en x notées par extension $g^1(x, \alpha)$ et $h^1(x, \alpha)$

On peut montrer (Ref. [3]) que :

$\int g^1(x, \alpha) \prod d \alpha_a$ est définie analytique dans la bande $R_e X > \Omega-1$ et prolongeable dans tout le plan complexe en une fonction méromorphe
 $\int h^1(x, \alpha) \prod d \alpha_a$ est définie analytique dans la bande $R_e X > \Omega$, et est également prolongeable en une fonction méromorphe.

Enfin dans tout le plan complexe :

$$M_G(x) = \frac{1}{2} \Gamma(-\frac{x}{2}) (i\epsilon)^{x/2} \left[\int d\alpha g^2(x, \alpha) - \int d\alpha h^2(x, \alpha) \right] \quad (V.7)$$

Formule explicite de R dans la bande $\Omega-1 < R_e X \leq \Omega$.

Calculons

$$\tau_{\mathcal{G}}^{-2\ell(\mathcal{G})} \left[\left(\sum \alpha_{a_i} \right)^{x/2} \frac{e^{-\epsilon^{\ell(\mathcal{G})} P d(\alpha) P}}{P(\alpha)^{D/2}} \right]$$

Les α_{a_i} sont relatifs aux lignes de cut-off et on va utiliser la définition des $\tau_{\mathcal{G}}$ de l'appendice B.

Deux cas sont à considérer :

a) le sous graphe \mathcal{Y} ne contient pas tous les cut-off.

Certains α_{a_i} ne seront pas dilatés en $\rho^2 \alpha_a$ et $(\sum \alpha_{a_i})$ sera en ρ^0 à l'ordre le plus bas en ρ , $P(\alpha)$ dilaté se comportant, d'après (II.17) en $\rho^{2L(\mathcal{Y})} P(\alpha, \rho)$.

Donc $\tau_{\rho}^{-2\ell(\mathcal{Y})}$ s'appliquera à une fonction de la forme $\rho^{-L(\mathcal{Y})D} f(\rho, \alpha)$ où $f(\rho, \alpha)$ sera inf. différentiable en 0

$$\begin{aligned} \tau_{\rho}^{-2\ell(\mathcal{Y})} \left[\rho^{-L(\mathcal{Y})D} f(\rho, \alpha) \right] \Big|_{\rho=1} &= \rho^{-L(\mathcal{Y})D} T_{\rho}^{L(\mathcal{Y})D-2\ell(\mathcal{Y})} \left[f(\rho, \alpha) \right] \Big|_{\rho=1} \\ &= T_{\rho}^{\omega(\mathcal{Y})} \left[f(\rho, \alpha) \right] \Big|_{\rho=1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

car tous les graphes sont régularisés et donc $\omega(\mathcal{Y}) < 0$

Donc $\tau_{\mathcal{G}}^{-2\ell(\mathcal{G})} \left[\left(\sum \alpha_{a_i} \right)^{x/2} \frac{e^{-\epsilon^{\ell(\mathcal{G})} P d(\alpha) P}}{P(\alpha)^{D/2}} \right] = 0$ si \mathcal{Y} ne contient pas tous les cut-off.

REMARQUE : Ce résultat ne dépend pas de la bande dans laquelle on situe X.

b) \mathcal{G} contient tous les cut-off

$$\left(\sum_{\alpha_i} \alpha_{\alpha_i} \right)^{x/2} \text{ dilaté} \rightarrow \rho^x \left(\sum_{\alpha_i} \alpha_{\alpha_i} \right)^{x/2}$$

$$P(\alpha) \text{ dilaté} \rightarrow \rho^{2L(\mathcal{G})} P(\alpha, \rho)$$

et $\zeta_\rho^{-2\ell(\mathcal{G})}$ s'applique à une fonction de la forme $\rho^{x-L(\mathcal{G})D} f(\rho, \alpha)$

où f est infiniment différentiable en 0

$$\text{et } \zeta_\rho^{-2\ell(\mathcal{G})} \left[\rho^{x-L(\mathcal{G})D} f(\rho, \alpha) \right]_{\rho=1} = T_\rho^{\omega(\mathcal{G}) - \varepsilon'(x)} \left[P(\rho, \alpha) \right]_{\rho=1}$$

(cf. définition du ζ)

Puisque $\Omega = \text{Sup } \omega(\mathcal{G})$ et que, puisque $\Omega - 1 < \text{Re}(X) < \Omega$, $E'(X) = \Omega$

et si $\omega(\mathcal{G}) < \Omega$: on a un $T_\rho^{\omega(\mathcal{G}) - \Omega < 0} [-] = 0$

si $\omega(\mathcal{G}) = \Omega$: on a un $T_\rho^0 [f(\rho, \alpha)]|_{\rho=1} \neq 0$.

Donc : si \mathcal{G} contient tous les cut-off et dans la bande $\Omega - 1 < \text{Re} X \leq \Omega$

$$\zeta_\rho^{-2\ell(\mathcal{G})} \left[\left(\sum \alpha_{\alpha_i} \right)^{x/2} \frac{e^{i\varepsilon'x} P dP}{P(\alpha)^{D/2}} \right] \text{ seulement si } \omega(\mathcal{G}) = \Omega \quad (\text{V.9})$$

REMARQUE : le même raisonnement montre que dans la bande $\text{Re } X > \Omega$ toutes les contributions $-\zeta_\rho^{-2\ell(\mathcal{G})}$ sont nulles.

En introduisant les définitions :

. *sous graphe essentiel* : sous graphe contenant tous les cut-off.

. *Leading-graph ou sous graphe principal* : sous graphe essentiel tel que $\omega(\mathcal{G}) = \Omega$.

En combinant (V.8), (V.9), d'après la définition de R et puisque à l'intérieur d'un Nest les opérateurs ζ commutent, on a le résultat fondamental

Si $-\Omega - 1 < \text{Re } X < \Omega$

$$R \left[\left(\sum_{a_i} \alpha_{a_i} \right)^{x/2} \frac{e^{i\epsilon P} P dP}{P(\alpha)^{D/2}} \right] = \left[1 + \sum_{\substack{\mathcal{N} \text{ nest} \\ \text{de Leaning} \\ \text{graphes}}} \prod_{\mathcal{G} \in \mathcal{N}} \left(-\zeta_{\mathcal{G}}^{-2\ell(\mathcal{G})} \right) \right] \left[\dots \right] \quad (\text{V.10})$$

REMARQUE : La remarque de la formule (V.9) montre que, dans la bande $\text{Re } X$ l'action de R se réduit à l'identité.

Extraction du premier pôle en Ω .

Dans cette partie on travaillera dans la bande $\Omega - 2 < \text{Re } X < \Omega$.

En regroupant les nests ayant le même élément minimal \mathcal{G} , on a, d'après (V.8), (V.9) et la définition de R

$$\sum_{\substack{\mathcal{N} \text{ nest} \\ \text{de Leaning}}} \prod_{\mathcal{G} \in \mathcal{N}} \left(-\zeta_{\mathcal{G}}^{-2\ell(\mathcal{G})} \right) = \sum_{\substack{\mathcal{G} \subset G \\ \text{Leaning}}} \left(-\zeta_{\mathcal{G}}^{-2\ell(\mathcal{G})} \right) \left[1 + \sum_{\substack{\mathcal{N} \text{ nest de} \\ \text{Leaning contenant} \\ \mathcal{G}}} \prod_{\mathcal{G}' \in \mathcal{N}} \left(-\zeta_{\mathcal{G}'}^{-2\ell(\mathcal{G}')} \right) \right] \quad (\text{V.11})$$

Explicitons d'abord l'action du $\zeta_{\mathcal{G}}^{-2\ell(\mathcal{G})}$. Avec les notations de la démonstration de (V.9) :

$$\zeta_{\mathcal{G}}^{-2\ell(\mathcal{G})} \left[\left(\sum_{a_i} \alpha_{a_i} \right)^{x/2} \frac{e^{i\epsilon P} P d_0 P}{P_0(\alpha)^{D/2}} \right] = f(\alpha, 0)$$

où $f(\alpha, \rho)$ est obtenue par dilatation $\alpha_a \rightarrow \rho^2 \alpha_a$ de $\frac{e^{i\epsilon - i\epsilon} P dP}{P(\alpha)^{D/2}} \cdot \left(\sum \alpha_{a_i} \right)^{x/2}$.
 $a \in \mathcal{G}$

Et d'après les propriétés des polynomes P et PNP (cf. II)

$$P_G(\alpha) \longrightarrow P_G(\alpha, 0) = P_{\mathcal{G}}(\alpha) P_{[\epsilon/\mathcal{G}]}(\alpha)$$

$$\text{et } P N_G(\alpha) P \longrightarrow P N_G(\alpha, 0) P = P_G(\alpha) \cdot P N_{[G/\mathcal{Y}]}(\alpha) P$$

donc

$$b(\alpha, 0) = \frac{\left(\sum_i d_{a_i}\right)^{x/2}}{P_G(\alpha)^{D/2}} \frac{e^{i\epsilon \sum d_{[G/\mathcal{Y}]}(\alpha)} P d_{[G/\mathcal{Y}]}(\alpha) P}{\left[P_{[G/\mathcal{Y}]}(\alpha)\right]^{D/2}} \quad (\text{V.12})$$

\mathcal{Y} contenant tous les cut-off $[G/\mathcal{Y}]$ est un graphe réduit du graphe initial non régularisé (sans lignes de cut-off).

$$1 + \sum_{\mathcal{Y}' \text{ voisin de } \mathcal{Y}} \prod_{\mathcal{Y}'} \left(-\zeta_{\mathcal{Y}'}^{-2\ell(\mathcal{Y}')} \right)$$

n'agit en fait que sur la partie de (V.12) relative à $[G/\mathcal{Y}]$.

En effet, calculant

$$\zeta_{\mathcal{Y}'}^{-2\ell(\mathcal{Y}')} \left[\frac{\left(\sum d_{a_i}\right)^{x/2}}{P_G^{D/2}} \cdot \frac{e^{i\epsilon \sum P d_{[G/\mathcal{Y}]}(\alpha)} P}{P_{[G/\mathcal{Y}]}^{D/2}} \right] \text{ avec } \mathcal{Y} \subset \mathcal{Y}'$$

la dilatation des α de \mathcal{Y}' suivant ρ^2 transforme

$$\frac{\left(\sum d_{a_i}\right)^{x/2}}{P_G^{D/2}} \longrightarrow P^{x - DL(\mathcal{Y}')} \frac{\left(\sum d_{a_i}\right)^{x/2}}{P_G^{D/2}}$$

d'où par un calcul simple

$$\zeta_{\mathcal{Y}'}^{-2\ell(\mathcal{Y}')} \left[\frac{\left(\sum d_{a_i}\right)^{x/2}}{P_G^{D/2}} \frac{e^{i\epsilon \sum P d_{[G/\mathcal{Y}]}(\alpha)} P}{P_{[G/\mathcal{Y}]}^{D/2}} \right] = \frac{\left(\sum d_{a_i}\right)^{x/2}}{P_G^{D/2}} \zeta_{[G/\mathcal{Y}]}^{-2\ell(\mathcal{Y}') + DL(\mathcal{Y}')} \left[\frac{e^{i\epsilon \sum P d_{[G/\mathcal{Y}]}(\alpha)} P}{P_{[G/\mathcal{Y}]}^{D/2}} \right]$$

$E'(x) = \Omega = \omega(\mathcal{Y}) = DL(\mathcal{Y}) - 2\ell(\mathcal{Y}')$ puisque \mathcal{Y} et \mathcal{Y}' sont des leading graphes et il est facile de montrer que $\ell(\mathcal{Y}') - \ell(\mathcal{Y}) = \ell(\mathcal{Y}'/\mathcal{Y})$. On obtient donc

$$\zeta_{\mathcal{Y}'}^{-2\ell(\mathcal{Y}')} [b(\alpha, 0)] = \frac{\left(\sum d_{a_i}\right)^{x/2}}{P_G^{D/2}} \zeta_{[G/\mathcal{Y}]}^{-2\ell(\mathcal{Y}'/\mathcal{Y})} \left[\frac{e^{i\epsilon \sum P d_{[G/\mathcal{Y}]}(\alpha)} P}{P_{[G/\mathcal{Y}]}^{D/2}} \right] \quad (\text{V.13})$$

où $[G'/G]$ est un sous graphe de $[G/G]$:

Puisque $L(G'/G) = L(G') - L(G)$ on a :

$$\omega(G'/G) = \omega(G') - \omega(G) \tag{V.14}$$

Si G est un leading graphe, le degré superficiel de divergence d'un sous graphe de $[G/G]$ sera toujours ≤ 0 .

On a finalement, d'après (V.11)

$$-\zeta_G^{-2L(G)} \left[1 + \sum_{\substack{\text{d'nest} \\ \text{de leading} \\ \text{contenant } G}} \prod_{G' \in \mathcal{L}} (-\zeta_{G'})^{-2L(G')} \right] \left[\left(\sum_{a_i} d_{a_i} \right)^{x/2} \frac{e^{-i\epsilon P d_G P}}{P_G(\alpha)^{D/2}} \right] =$$

$$-\frac{\left(\sum d_{a_i} \right)^{x/2}}{P_G(\alpha)^{D/2}} \left[1 + \sum_{\substack{\text{Nest d' de} \\ \text{leading} \\ \text{dans } [G/G]}} \prod_{G' \in \mathcal{L}} (-\zeta_{G'})^{-2L(G')} \right] \frac{e^{-i\epsilon P d_{[G/G]} P}}{P_{[G/G]}(\alpha)^{D/2}}$$

(V.15)

le terme relatif à G/G n'est autre que l'expression explicite de R relatif à G/G .

D'où finalement d'après (V.7), (V.11) et (V.15)

$$\int_0^{+\infty} d\alpha h^2(\alpha, x) = - \sum_{\substack{G \subset G \\ \text{leading}}} \int_0^{+\infty} \prod_{a \in G} d d_a \frac{e^{-i\epsilon^{i\epsilon} [\sum_{a \in G} d_a m_a^2 + \sum_{a_i} d_{a_i} \alpha]} }{P_G(\alpha)^{D/2}} \left(\sum_{a_i} d_{a_i} \right)^{x/2} \dots$$

$$\times \int_0^{+\infty} \prod_{a \in [G/G]} d d_a \frac{e^{-i\epsilon^{i\epsilon} [\sum_{a \in [G/G]} d_a m_a^2]} }{P_{[G/G]}(\alpha)^{D/2}} R \left[\frac{e^{-i\epsilon P d_{[G/G]} P}}{P_{[G/G]}(\alpha)^{D/2}} \right]$$

(V.16)

Cette dernière intégrale est l'intégrale soustraite du graphe G/\mathcal{G} indépendante du cut-off et que l'on notera

$$I_{[\mathcal{G}/\mathcal{G}]}^R(p, m) = \int_0^{+\infty} \prod_{a \in [\mathcal{G}/\mathcal{G}]} d\alpha_a e^{-i\epsilon^{-1}\epsilon \left[\sum_a \alpha_a m_a^2 \right]} R \left[\frac{e^{i\epsilon^{-1}\epsilon p d_{[\mathcal{G}/\mathcal{G}]}^P}}{P_{[\mathcal{G}/\mathcal{G}]}(\alpha)^{D/2}} \right] \quad (V.17)$$

De (V.5) et de (V.17). En notant

$$M_G^{R_2}(x, p) = \frac{1}{2} \Gamma(-\frac{x}{2}) (i e^{-i\epsilon})^{x/2} \int \prod_{a \in G} d\alpha_a d\alpha_{a_i} g_2(x, \alpha, p)$$

$$F_{\mathcal{G}}(x, p) = \frac{1}{2} \Gamma(-\frac{x}{2}) (i e^{-i\epsilon})^{x/2} \int \prod_{a, a_i \in \mathcal{G}} d\alpha_a d\alpha_{a_i} \frac{e^{-i\epsilon^{-1}\epsilon \left[\sum_a \alpha_a m_a^2 + \alpha_{a_i} a \right]}}{P_{\mathcal{G}}(\alpha)^{D/2}} \left(\sum_{a_i} \alpha_{a_i} \right)^{x/2} \quad (V.18)$$

$$M_G(x, p) = M_G^{R_2}(x, p) + \sum_{\substack{\mathcal{G} \text{ leading} \\ c \in G}} I_{[\mathcal{G}/\mathcal{G}]}^R(p, m) F_{\mathcal{G}}(x, m, a) \quad (V.19)$$

$M_G^{R_1}(X, p)$ est analytique dans la bande $\Omega - 2 < \text{Re } X < 0$

$F_{\mathcal{G}}(X, m, a)$ est analytique dans la bande $\Omega < \text{Re } X < 0$ et contient un pôle en Ω comme on peut le voir en effectuant dans (V.18) un changement de variable $\alpha_a \rightarrow \rho \alpha_a$ et en dérivant l'expression obtenue par rapport à ρ en $\rho = 1$, l'annulation de la dérivée donnant

$$F_{\mathcal{G}}(x, m, a) = \frac{\Gamma(-\frac{x}{2})}{x - \Omega} (i e^{-i\epsilon})^{x/2 + 1} x \dots$$

$$\dots \int_0^{+\infty} \prod_{\mathcal{G}} d\alpha_a d\alpha_{a_i} \frac{e^{-i\epsilon^{-1}\epsilon \left[\sum_a \alpha_a m_a^2 + \alpha_{a_i} a \right]}}{P_{\mathcal{G}}(\alpha)^{D/2}} \left(\sum_{a_i} \alpha_{a_i} m_a^2 + \alpha_{a_i} a \right) \left(\sum \alpha_{a_i} \right)^{x/2} \quad (V.20)$$

On peut itérer cette extraction de pôle, car Ω est un pôle multiple de $F_{\mathcal{G}}(X, m, a)$.

C. Extraction de la puissance maximale en Λ .

Effectuons une transformation de Mellin réciproque sur (V.19) (ce que l'on a le droit de faire en intégrant la bande $\Omega < \text{Re} X < 0$) et remultiplions par $(m^2 - \Lambda^2)^{\ell p}$, nous retrouvons

$$I_G^r(p, \Lambda) = I_G^{R_2}(p, \Lambda) + \sum_{\substack{\mathcal{G} \subset G \\ \text{leading}}} I_{[\mathcal{G}/\mathcal{Y}]}^R(p, m) \Psi_{\mathcal{G}}(\Lambda) \quad (\text{V.21})$$

$I_G^{R_1}(p, \Lambda)$ obtenu à partir de $M_G^{R_1}(p, x) \sim \Lambda^{\Omega + 2\ell p - 2}$ quand $\Lambda \rightarrow +\infty$

Et on obtient à partir de (V.18)

$$\Psi_{\mathcal{G}}(\Lambda) = (m^2 - \Lambda^2)^{\ell p} \int \prod_{\alpha \in \mathcal{Y}} d\alpha_a \frac{e^{-i\epsilon^+ \epsilon \left[\sum_{\mathcal{Y}} \alpha_a m_a^2 + \alpha_{a_i} (\Lambda^2 + a) \right]}}{P_{\mathcal{G}}(\alpha)^{D/2}} \quad (\text{V.22})$$

\mathcal{Y} contient toutes les lignes de cut-off, désignons par $\tilde{\mathcal{Y}}$ le sous graphe de G obtenu en enlevant à \mathcal{Y} toutes les lignes de cut-off a_i qui ne sont pas relatives à une ligne a de \mathcal{Y} . Il est aisé de voir que $P_{\mathcal{Y}}(\alpha) = P_{\tilde{\mathcal{Y}}}(\alpha)$ et que (V.22) se factorise pour donner après intégrations sur les α_{a_i} relatifs à $[\mathcal{Y}/\tilde{\mathcal{Y}}]$

$$\Psi_{\mathcal{G}}(\Lambda) = I_{\tilde{\mathcal{Y}}}^r(p=0, \Lambda) \left(-i\epsilon^+ \epsilon \frac{m^2 - \Lambda^2}{\Lambda^2 + a} \right)^{\ell(\frac{G}{\mathcal{Y}}) \cdot p} \quad (\text{V.23})$$

$$I_{\tilde{\mathcal{Y}}}^r(p=0, \Lambda) \sim \Lambda^{\Omega - 2\ell(\tilde{G})p}$$

et finalement, (V.21) s'écrit

$$I_G^r(p, \Lambda) = \sum_{\substack{\mathcal{G} \subset G \\ \text{leading}}} I_{[\mathcal{G}/\mathcal{Y}]}^R(p) I_{\tilde{\mathcal{Y}}}^r(p=0, \Lambda) \left(i\epsilon^+ \epsilon \cdot \frac{\Lambda^2 - m^2}{\Lambda^2} \right)^{\ell(\frac{G}{\mathcal{Y}})p} + \text{termes d'ordre} < \Lambda^{\Omega - 2\ell p} \quad (\text{V.24})$$

Tous les termes d'ordre $\Lambda^{\Omega - 2\ell p}$ sont contenus dans les $I_{\tilde{\mathcal{Y}}}^r(p=0, \Lambda)$ relatifs aux sous graphes leadings de G .

Nous allons généraliser une telle décomposition dans le paragraphe suivant.

Remarquons que les $\tilde{\mathcal{G}}$ obtenus à partir de leading sont unions de connexes d'une particule irréductible $\tilde{\mathcal{G}}_I$. En effet, tout graphe d'une particule réductible ne peut être leading, puisque contenant un graphe de degré superficiel de divergence supérieur (obtenu en enlevant des lignes pour le disconnecter).

VI. EXTRACTION DES PARTIES DIVERGENTES A TOUS LES ORDRES POUR UN GRAPHE SCALAIRE

Dans toute la suite G désignera un graphe connexe scalaire sans couplages dérivatifs régularisé par Pauli Villars. Dans l'appendice D nous généraliserons nos résultats aux cas des graphes possédant des couplages dérivatifs.

L'intégrale attachée à G est

$$I_G(\Lambda) = (m^2 - \Lambda^2)^{l_p} \int_0^{+\infty} \prod_{a_i} d\alpha_a d\alpha_{a_i} e^{-i\epsilon [\sum \alpha_a m_a^2 + \sum \alpha_{a_i} \Lambda^2]} \frac{e^{-i\epsilon P d(\alpha) P}}{P(\alpha)^{D/2}} \quad (VI.1)$$

A. Transformation de Mellin, extraction par bande.

Comme dans le § V, nous transformons Λ^2 en $\Lambda^2 + a$ ($a > 0$) et nous transformons de Mellin par rapport à Λ l'intégrand. (La condition $a > 0$ assurant la convergence infrarouge des intégrales et l'inversion des intégrations de Mellin et en α).

Puis en appliquant Mellin inverse, on trouve

$$I_G(\Lambda) = (m^2 - \Lambda^2 - a)^{l_p} \frac{1}{2i\pi} \int_D \Lambda^x M_G(p, x) dx \quad (VI.2)$$

avec

$$M_G(p, x) = \Gamma(-\frac{x}{2}) \frac{(i\epsilon^{-i\epsilon})^{x/2}}{2} \int_0^{+\infty} \prod d\alpha_a d\alpha_{a_i} e^{-i\epsilon (\sum m_a^2 \alpha_a + \sum \alpha_{a_i} \Lambda^2)} \dots \frac{e^{-i\epsilon P d(\alpha) P}}{P(\alpha)^{D/2}} (\sum \alpha_{a_i})^{x/2} \quad (VI.3)$$

$M_G(p, x)$ est analytique dans la bande de $\Omega < \text{Re } X < 0$, prolongeable analytiquement et possède des poles en

$$X = -\Omega - 2n \quad n = 0, 1, \dots, \infty \quad \text{correspondant au comportement asymptotique en } \Lambda \text{ à l'infini}$$

$$X = 2n \quad n = 0, 1, \dots, \infty \quad \text{dus à } \Gamma(-x/2)$$

et D désigne un trajet d'intégration de $\sigma - i\infty$ à $\sigma + i\infty$

$$\Omega < \sigma < 0$$

Extraction successive des puissances

Appliquant l'opérateur R à $\frac{e^{i\epsilon} e^{-i\epsilon P d(\alpha) P}}{P(\alpha)^{D/2}} (\sum \alpha_{ai})^{x/2}$ on trouve par le même raisonnement permettant d'obtenir (V.8) et (V.10)

$$(\sum \alpha_{ai})^{x/2} \left[1 + \sum_{\substack{d' \text{ nest} \\ d' \text{ essentiels}}} \prod_{g \in d'} (-\zeta_g^{-2\ell(g) - E'(x)}) \right] \frac{e^{i\epsilon} e^{-i\epsilon P d(\alpha) P}}{P(\alpha)^{D/2}} \quad (VI.4)$$

ce qui, dans la bande $\Omega - 2n < \text{Re } X < \Omega - 2n + 2$ prend la forme explicite

$$(\sum \alpha_{ai})^{x/2} R^n \left[\frac{e^{i\epsilon} e^{-i\epsilon P d(\alpha) P}}{P(\alpha)^{D/2}} \right] \quad \text{prolongeable dans tout le plan complexe (VI.5)}$$

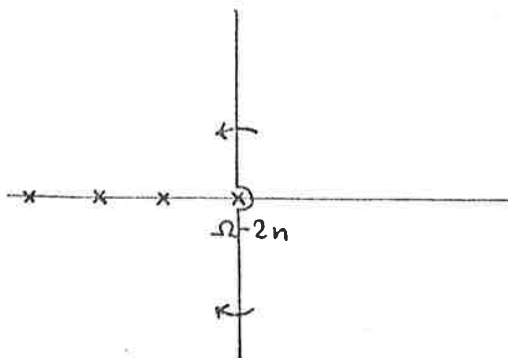
avec

$$R^n = 1 + \sum_{\substack{d' \text{ nest} \\ d' \text{ essentiels}}} \prod_{g \in d'} (-\zeta_g^{-2\ell(g) - \Omega + 2n - 2}) \quad (VI.6)$$

Et on peut montrer () que

$$\int_0^{+\infty} \prod d\alpha_d d\alpha_i e^{-i\epsilon} e^{i\epsilon [\sum \alpha_a m_a^2 + \alpha_{ai} a]} (\sum \alpha_{ai})^{x/2} R^n \frac{e^{i\epsilon} e^{-i\epsilon P d(\alpha) P}}{P(\alpha)^{D/2}}$$

est définie analytique dans le demi plan $\text{Re } X > \Omega - 2n$ et prolongeable analytiquement dans tout le plan complexe en une fonction méromorphe possédant des pôles en $\Omega - 2n, \Omega - 2n - 2, \text{ etc...}$



En repassant en Λ par application de la formule de Mellin réciproque

$$\frac{(m^2 - \Lambda^2 - a)^{\rho_p}}{2i\pi} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} dx \Lambda^x \Gamma(-\frac{x}{2}) \frac{(ie^{-\epsilon})^{x/2}}{2} \int_0^{+\infty} \prod d\alpha_a d\alpha_{a_i} e^{-ie^{-\epsilon}(\sum \alpha_a m_a^2 + \alpha_{a_i} a)} (\sum \alpha_{a_i})^{x/2}$$

$$R^n \frac{e^{ie^{-\epsilon} P d(\alpha) P}}{P(\alpha)^{D/2}}$$

avec $\Omega - 2n < \sigma < 0$, donne, par inversion des intégrations en α et en x (*)

$$I_G^n(\Lambda) = (m^2 - \Lambda^2 - a)^{\rho_p} \int_0^{+\infty} \prod d\alpha_a d\alpha_{a_i} e^{-ie^{-\epsilon}(\sum \alpha_a m_a^2 + \alpha_{a_i}(\Lambda^2 + a))}$$

$$\dots R^n \frac{e^{ie^{-\epsilon} P d(\alpha) P}}{P(\alpha)^{D/2}} \quad (VI.7)$$

où l'on peut faire maintenant $a = 0$ et où l'on est assuré, d'après ce qui précède, que $I_G^n(\Lambda)$ est majoré par $\Lambda^{\Omega - 2n + \eta}$ quand $\Lambda \rightarrow +\infty$, $\eta > 0$ aussi petit que l'on veut.

Cette majoration étant indépendante de a pour a proche de 0.

Puisque $e^{ie^{-\epsilon} P d p / P(\alpha)^{D/2}}$ se dilate en $\rho^{-DL(\mathcal{G})}$ quand les $\alpha \in \mathcal{G}$ sont, dilatés en ρ^2 , dans R^n apparaissent des $T_P^{\omega(\mathcal{G}) - \Omega + 2n - 2}$ où \mathcal{G} sont les sous graphes essentiels de G , donc dans l'expression de R^n n'interviennent en fait que les sous graphes essentiels tels que $\omega(\mathcal{G}) \geq \Omega - 2n + 2$.

En particulier $R^0 = 1$ appliqué à $e^{ie^{-\epsilon} P d p / P(\alpha)^{D/2}}$.

(*) Intervernion assurée par Fubini, la décroissance exponentielle en α et la décroissance exponentielle en X assurée par

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} |\Gamma(x + iy)| e^{\pi |y|/2} |y|^{1/2 - x}$$

(H. Bateman, Higher transcendental function. Vol.1 Mc Graw Hill 1953 page 47 equation (6).)

Alors on peut décomposer $I_G(\Lambda)$ en :

$$I_G(\Lambda) = \sum_{n=0}^M \left(I_G^n(\Lambda) - I_G^{n+1}(\Lambda) \right) + I_G^{M+1}(\Lambda) \quad (VI.8)$$

où chaque terme $I_G^N - I_G^{N+1}$ se comporte en $\Lambda^{\Omega-2n}$ quand $\Lambda \rightarrow +\infty$.

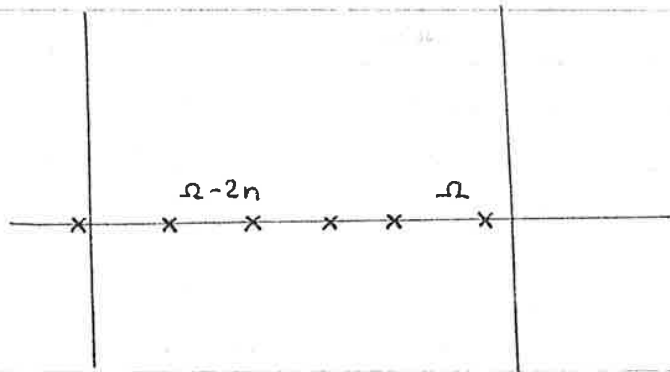
On peut ainsi pour chaque ordre $\Omega-2n$ de divergence en Λ extraire de $I_G(\Lambda)$ un terme $I_G^0 - I_G^{n+1}$ contenant entièrement les divergences d'ordre $\geq \Omega-2n$.

REMARQUES

i) à cette opération d'extraction des divergences en Λ correspond en transformée de Mellin l'opération d'extraction des pôles :

$$\int_0^{+\infty} \prod d\alpha_a d\alpha_i e^{-i\epsilon(\sum \alpha_a m_a^2 + \alpha_i a)} (\sum \alpha_i)^{x/2} [R^0 - R^{n+1}] e^{\frac{i\epsilon^{-i\epsilon} P d(\alpha) P}{P(\alpha)^{D/2}}}$$

contient tous les poles de $M_G(X)$ compris dans la bande $\Omega-2n - 2 < \text{Re}X \leq \Omega$



ii)
$$\int_0^{+\infty} \prod d\alpha_a d\alpha_i e^{-i\epsilon(\sum \alpha_a m_a^2 + \alpha_i a)} [\sum \alpha_i]^{x/2} (R^n - R^{n+1}) e^{\frac{i\epsilon^{-i\epsilon} P d(\alpha) P}{P(\alpha)^{D/2}}}$$

possède un premier pôle en $\Omega-2n$ et en possède aussi en $\Omega-2n-2$, etc...

Donc $I_G^n - I_G^{n+1}$ diverge en $\Lambda^{\Omega-2n+\eta}$ et possède aussi des termes divergeant en $\Lambda^{\Omega-2n-2+\eta}$, etc...

iii) Le passage en transformée de Mellin n'a ici pour but que de montrer que l'opérateur R^n extrait toutes les puissance au dessus d'un certain ordre.

B. Forme des termes extraits à l'ordre n

Explicitons maintenant $I_G^n - I_G^{n+1}$.

D'après (VI.6) on a

$$R^n - R^{n+1} = \sum_{\substack{\mathcal{N} \text{ nest} \\ \text{d'essentiel}}} \left[\prod_{\varphi \in \mathcal{N}} (-\zeta_{\varphi}^{-2\ell(\varphi) - \Omega + 2n - 2}) - \prod_{\varphi \in \mathcal{N}} (-\zeta_{\varphi}^{-2\ell(\varphi) - \Omega + 2n}) \right]$$

Cette différence se calcule en utilisant un procédé semblable à celui utilisé dans l'espace des moments pour prouver l'identité de Zimmermann (Ref. 3 et 6). Pour un nest $\mathcal{N} = \{\varphi_1 \supset \dots \supset \varphi_p\}$ on trouve

$$\begin{aligned} & \prod_{i=2}^p (-\zeta_{\varphi_i}^{-2\ell(\varphi_i) - \Omega + 2n - 2}) - \prod_{i=2}^p (-\zeta_{\varphi_i}^{-2\ell(\varphi_i) - \Omega + 2n}) = \\ & \sum_{i=2}^p \prod_{j=2}^{i-1} (-\zeta_{\varphi_j}^{-2\ell(\varphi_j) - \Omega + 2n}) \cdot \left(\zeta_{\varphi_i}^{-2\ell(\varphi_i) - \Omega + 2n} - \zeta_{\varphi_i}^{-2\ell(\varphi_i) - \Omega + 2n - 2} \right) \cdot \\ & \prod_{j=i+1}^p (-\zeta_{\varphi_j}^{-2\ell(\varphi_j) - \Omega + 2n - 2}) \end{aligned}$$

Etant entendu que

$$\prod_{j=2}^{i-1} (\cdot) = 1 \quad \text{si } i=2$$

$$\prod_{j=i+2}^p (\cdot) = 1 \quad \text{si } i=p$$

On en déduit, en resommant sur tous les nests contenant un sous graphe donné :

$$\begin{aligned} R^n - R^{n+1} = & \sum_{\substack{\mathcal{G} \text{ essentiels} \\ \subseteq G}} \left[1 + \sum_{\substack{\mathcal{N} \text{ nest} \\ \text{d'essentiels } \varphi_i \\ \text{t.q. } \varphi \not\subseteq \varphi_i}} \prod_{\varphi_i \in \mathcal{N}} (-\zeta_{\varphi_i}^{-2\ell(\varphi_i) - \Omega + 2n}) \right] \cdot \\ & \left[\zeta_{\varphi}^{-2\ell(\varphi) - \Omega + 2n} - \zeta_{\varphi}^{-2\ell(\varphi) - \Omega + 2n - 2} \right] \left[1 + \sum_{\substack{\mathcal{N} \text{ nest} \\ \text{d'essentiels } \varphi_j \\ \varphi_j \not\subseteq \varphi}} \prod_{\varphi_j \in \mathcal{N}} (-\zeta_{\varphi_j}^{-2\ell(\varphi_j) - \Omega + 2n - 2}) \right] \end{aligned}$$

Enfin on remarque que

$$\begin{pmatrix} \tau_{\mathcal{G}}^{-2\ell(\mathcal{G})-\Omega+2n} & -\tau_{\mathcal{G}}^{-2\ell(\mathcal{G})-\Omega+2n-2} \\ \tau_{\mathcal{G}} & -\tau_{\mathcal{G}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\tau_{\mathcal{G}}^{-2\ell(\mathcal{G})-\Omega+2n-2} \\ & \tau_{\mathcal{G}} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \tau_{\mathcal{G}}^{-2\ell(\mathcal{G})-\Omega+2n} & -\tau_{\mathcal{G}}^{-2\ell(\mathcal{G})-\Omega+2n-2} \\ \tau_{\mathcal{G}} & -\tau_{\mathcal{G}} \end{pmatrix}$$

ceci découle du fait que pour tout couple (n_1, n_2)

$$\tau_{\mathcal{G}}^{n_1} \cdot \tau_{\mathcal{G}}^{n_2} = \tau_{\mathcal{G}}^{n_2} \tau_{\mathcal{G}}^{n_1} = \tau_{\mathcal{G}}^{\text{In}(\mathcal{G})(n_1, n_2)}$$

En conséquence, on peut remplacer dans (VI.9) la condition $\mathcal{G}_j \neq \mathcal{G}_i$ par $\mathcal{G}_j \subseteq \mathcal{G}_i$ et on obtient, en faisant commuter les τ .

$$R^n - R^{n+1} = \sum_{\substack{\mathcal{G} \text{ essentiel} \\ \subseteq \mathcal{G}}} \left[1 + \sum_{\substack{\mathcal{G}_j \text{ d'essentiels} \\ \mathcal{G}_j \subseteq \mathcal{G}}} \prod_{\mathcal{G}_j} \left(-\tau_{\mathcal{G}_j}^{-2\ell(\mathcal{G}_j)-\Omega+2n-2} \right) \right].$$

$$\cdot \left[1 + \sum_{\substack{\mathcal{G}_i \text{ d'essentiels} \\ \mathcal{G} \neq \mathcal{G}_i}} \prod_{\mathcal{G}_i} \left(-\tau_{\mathcal{G}_i}^{-2\ell(\mathcal{G}_i)-\Omega+2n} \right) \right] \begin{bmatrix} \tau_{\mathcal{G}}^{-2\ell(\mathcal{G})-\Omega+2n} & -\tau_{\mathcal{G}}^{-2\ell(\mathcal{G})-\Omega+2n-2} \\ \tau_{\mathcal{G}} & -\tau_{\mathcal{G}} \end{bmatrix} \quad (\text{VI.10})$$

Lorsque l'on applique $R^n - R^{n+1}$ à $Z_G(p, x) = \frac{e^{ie^{-i\epsilon} \text{pd}(\alpha) \bar{p}}}{p(\alpha)^{D/2}}$, on

obtient une somme d'expressions relatives aux sous-graphes essentiels contenus dans G (c'est à dire contenant tous les cut-off).

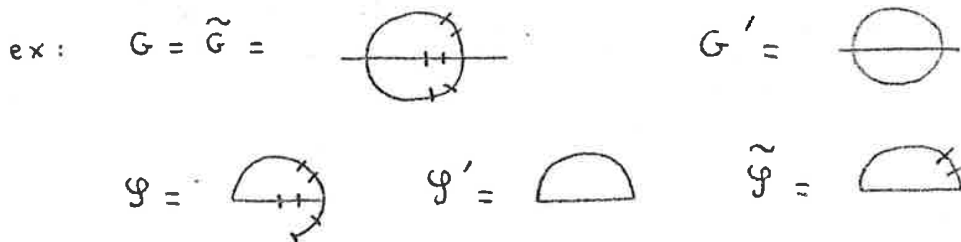
Il sera très utile, comme nous le verrons par la suite, et comme le suggère l'étude des graphes dans la première bande faite précédemment, de se ramener à des contributions de sous-graphes formés de graphes disjoints connexes une particule irréductible. Nous allons y parvenir en déterminant d'abord

$$\begin{bmatrix} \tau_{\mathcal{G}}^{-2\ell(\mathcal{G})-\Omega+2n} & -\tau_{\mathcal{G}}^{-2\ell(\mathcal{G})-\Omega+2n-2} \\ \tau_{\mathcal{G}} & -\tau_{\mathcal{G}} \end{bmatrix} Z_G(p, \alpha)$$

En généralisant des résultats dus à M. Bergère et Y. Pham (Ref. [3]).

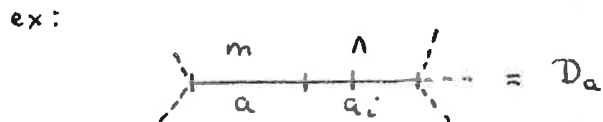
Dans toute la suite, G sera un graphe connexe une particule irréductible, régularisé, G' le graphe non régularisé correspondant. Les sous-graphes essentiels de G , c'est-à-dire contenant toutes les lignes de cut-off seront notés \mathcal{G} , les sous graphes non régularisés correspondant, c'est à dire, les sous-graphes de G' formés des lignes de masse m de \mathcal{G} seront notés \mathcal{G}'

Enfin, on notera $\tilde{\mathcal{G}}$ les sous-graphes de G obtenus en ajoutant aux lignes de \mathcal{G}' seulement les lignes de cut-off correspondantes.

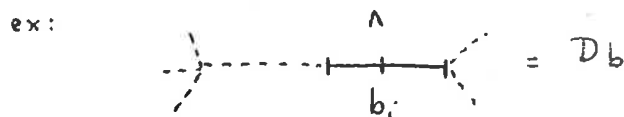


Soit \mathcal{G} un sous-graphe essentiel de G .

\mathcal{G} se décompose en : - parties connexes une particule irréductible \mathcal{G}_x
 - en ensembles D_a composés d'une ligne a de masse m et des p lignes a_i de cut-off associés, si $a \in (\mathcal{G} \cup \mathcal{G}_x)$



- en ensembles D_b composés des p lignes de cut-off b_i associées à une ligne $b \in [G/\varphi]$



Les lignes D_a pourront être isolées dans G , aboutir à un \mathcal{G}_x ou joindre deux \mathcal{G}_x suivant le cas

En désignant pour simplifier

$$\omega_n(\mathcal{G}) = \omega(\mathcal{G}) - \Omega + 2n$$

on a (voir appendice C)

$$\left[\begin{array}{cc} -2\ell(\mathcal{G}) - \Omega + 2n & -2\ell(\mathcal{G}) - \Omega + 2n - 2 \end{array} \right] Z_G(p, \alpha) = \mathcal{Y}_{\mathcal{G}}^{\chi_{\omega_n(\mathcal{G})}}(\alpha) \mathcal{Y}_{[G/\mathcal{G}]_{\chi_{\omega_n(\mathcal{G})}}}(p, \alpha) \quad (VI.11)$$

où χ_p désigne une suite de p composantes d'impulsions externes à \mathcal{G} (non nécessairement toutes distinctes) $p_{i_1}^{\mu_1}, p_{i_2}^{\mu_2}, \dots, p_{i_p}^{\mu_p}$ μ_i indices de Lorentz

$$\mathcal{Y}_{\mathcal{G}}^{\chi_p}(\alpha) = \frac{1}{p!} \frac{\partial^p}{\partial p_{i_1}^{\mu_1} \dots \partial p_{i_p}^{\mu_p}} Z_{\mathcal{G}}(p, \alpha) \Big|_{p=0}$$

où $Z_{\mathcal{G}}(p, \alpha)$ désigne la fonction en α attachée à \mathcal{G} et dépendant des impulsions p externes à \mathcal{G}

$$\mathcal{Y}_{[G/\mathcal{G}]_{\chi_p}}(p, \alpha)$$

désigne la contribution en α du graphe $[G/\mathcal{G}]_{\chi_p}$ obtenu à partir de $[G/\mathcal{G}]$ par adjonction des couplages $p_i^{\mu_i}$ correspondant au choix χ_p

- et dans (VI.11), la somme sur les $\chi_{\omega_n(\mathcal{G})}$ est sous-entendue.

Remarquons, (cf. appendice C) que $\mathcal{Y}_{\mathcal{G}}^{\chi_{\omega_n(\mathcal{G})}}(\alpha)$ est homogène dans les α de \mathcal{G} de degrés $\omega_n(\mathcal{G}) - L(\mathcal{G})$

En conséquence, si $\mathcal{G}' \supset \mathcal{G}$

$$\mathcal{Y}_{\mathcal{G}'}^{\chi_{\omega_n(\mathcal{G})}}(\alpha) \mathcal{Y}_{[G/\mathcal{G}]_{\chi_{\omega_n(\mathcal{G})}}}(p, \alpha) = \mathcal{Y}_{\mathcal{G}}^{\chi_{\omega_n(\mathcal{G})}}(\alpha) \left[\begin{array}{c} -2\ell(\mathcal{G}') - \Omega + 2n \\ \mathcal{Y}_{[G/\mathcal{G}']} \mathcal{Y}_{[G/\mathcal{G}]_{\chi_{\omega_n(\mathcal{G})}}} \end{array} \right] \quad (VI.12)$$

Et (VI.10) appliqué à $Z_G(p, \alpha)$ se réécrit

$$(R^n - R^{n+1}) Z_G(p, \alpha) = \sum_{\substack{\mathcal{G} \text{ essentiels} \\ \mathcal{G} \leq G}} R^{\chi_{\omega_n(\mathcal{G})}} \mathcal{Y}_{\mathcal{G}}^{\chi_{\omega_n(\mathcal{G})}}(\alpha) \cdot R \mathcal{Y}_{[G/\mathcal{G}]_{\chi_{\omega_n(\mathcal{G})}}}(p, \alpha) \quad (VI.13)$$

$$\begin{aligned} \text{où } R' \chi_{\mathcal{G}}^{\omega_n(\mathcal{G})} &= \left[1 + \sum_{\substack{\mathcal{N} \text{ next} \\ \text{d'essentiels} \\ \mathcal{G}_i \subseteq \mathcal{G}}} \prod_{\mathcal{G}_i \in \mathcal{N}} (-\zeta_{\mathcal{G}_i})^{-2\ell(\mathcal{G}_i) - \omega(\mathcal{G}) - \omega_n(\mathcal{G}) - 2} \right] \chi_{\mathcal{G}}^{\omega_n(\mathcal{G})} \\ &= \prod_{\substack{\mathcal{G}_i \text{ essentiels} \\ \mathcal{G}_i \subseteq \mathcal{G}}} (1 - \zeta_{\mathcal{G}_i})^{-2\ell(\mathcal{G}_i) - \omega(\mathcal{G}) - \omega_n(\mathcal{G}) - 2} \chi_{\mathcal{G}}^{\omega_n(\mathcal{G})} \quad (\text{VI.14}) \end{aligned}$$

en appliquant (B.7).

Notons que R' est intrinsèque au graphe \mathcal{G} et au nombre de derivations $\omega_n(\mathcal{G})$.

Compte tenu de la décomposition du graphe \mathcal{G} en parties connexes une particule irréductible $\tilde{\mathcal{G}}_x$, et en ensembles de lignes D_a et D_b

$$\chi_{\mathcal{G}} = \prod_x \frac{e^{i\epsilon \rho d_{\tilde{\mathcal{G}}_x}}}{P_{\tilde{\mathcal{G}}_x}(\alpha)^{D/2}} \prod_{D_a} e^{i\epsilon \rho_a^2 (\alpha_a + \sum_i \alpha_{a_i})} \prod_{D_b} e^{i\epsilon \rho_b^2 (\sum_i \alpha_{b_i})} \quad (\text{VI.15})$$

où les p sont les impulsions externes des sous-graphes $\tilde{\mathcal{G}}_x$ et où k_a et k_b sont les impulsions parcourant les lignes D_a ou D_b . Dilatant tous les α par ρ^2 et prenant la dérivée d'ordre $\omega_n(\mathcal{G})$ on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_n!} \frac{\partial^{\omega_n}}{\partial \rho^{\omega_n}} \chi_{\mathcal{G}}(\alpha \rho^2, \rho) &= \sum_{\{X_{p_x}, n_a, m_b\}} \prod_{\tilde{\mathcal{G}}_x} \chi_{\tilde{\mathcal{G}}_x}^{p_x}(\alpha) \prod_{D_a} \frac{1}{n_a!} [i\epsilon^{-i\epsilon} (\alpha_a + \sum_i \alpha_{a_i})]^{n_a} \dots \\ &\dots \prod_{D_b} \frac{1}{m_b!} [i\epsilon^{-i\epsilon} (\sum_i \alpha_{b_i})]^{m_b} \quad \text{polynôme des impulsions externes} \\ &\quad p, k_a, k_b. \quad (\text{VI.16}) \end{aligned}$$

Ce polynôme est réintroduit dans $\chi[G/\mathcal{G}]$ pour obtenir $[G/\mathcal{G}]_{\chi_{\omega_n}}$ (cf. appendice C). Dans (VI.16) la somme est entendue sur toutes les familles $\{X_{p_x}, n_a, m_b\}$ telles que p_x, n_a et $m_b > 0$ et $\sum_x p_x + 2 \sum_a n_a + 2 \sum_b m_b = \omega_n(\mathcal{G})$.

Enfin, vue l'homogénéité des fonctions $\chi_{\tilde{\mathcal{G}}_x}^{p_x}(\alpha)$ et en vertu du théorème de factorisation de l'opération R' (B.8),

$$\begin{aligned}
 & R' \prod_{\tilde{\mathcal{G}}_x} y_{\tilde{\mathcal{G}}_x}^{\chi_{p_x}}(\alpha) \prod_{D_a} \frac{[i e^{-i\epsilon} (\alpha_a + \sum_i \alpha_{a_i})]^{n_a}}{n_a!} \prod_{D_b} \frac{[i e^{-i\epsilon} (\sum_i \alpha_{b_i})]^{m_b}}{m_b!} \\
 &= \prod_{\tilde{\mathcal{G}}_x} R' y_{\tilde{\mathcal{G}}_x}^{\chi_{p_x}}(\alpha) \prod_{D_a} R' \frac{[i e^{-i\epsilon} (\alpha_a + \sum_i \alpha_{a_i})]^{n_a}}{n_a!} \prod_{D_b} R' \frac{[i e^{-i\epsilon} (\sum_i \alpha_{b_i})]^{m_b}}{m_b!}
 \end{aligned}$$

(VI.17)

où R' ne soustrait éventuellement que les essentiels de chaque partie connexe.

Il est évident, en considérant le $1-\zeta$ pour les lignes de cut-off de D_a et de D_b , que :

$$R' (\alpha_a + \sum_i \alpha_{a_i})^{n_a} = 0 \quad \text{(VI.18)}$$

$$R' (\sum_i \alpha_{b_i})^{m_b} = (\sum_i \alpha_{b_i})^{m_b} \quad \text{(VI.19)}$$

Et (VI.13) se réécrit, en vertu de ce qui précède

$$\begin{aligned}
 & (R^n - R^{n+1}) Z_G(p, \alpha) = \\
 & \sum_{\substack{\mathcal{G} \subseteq G \\ \text{essentiel}}} \prod_x R' y_{\tilde{\mathcal{G}}_x}^{\chi_{p_x}}(\alpha) \prod_{D_b} \frac{[i e^{-i\epsilon} (\sum_i \alpha_{b_i})]^{m_b}}{m_b!} \cdot R y_{[G/\mathcal{G}]}^{\{\chi_{p_x}, m_b\}}(\alpha, p) \quad \text{(VI.20)}
 \end{aligned}$$

où la somme est restreinte aux \mathcal{G} essentiels tels que le graphe \mathcal{G}' correspondant dans G' non régularisé soit une union de connexes une particule irréductible disjoints \mathcal{G}'_x , et où les p_x et les m_b sont ≥ 0 et restreint par la condition $\sum_x p_x + 2 \sum_b m_b = \omega(\mathcal{G}) - \Omega + 2n$.

Notons que à toute ligne de $[G/\mathcal{G}]$ correspond un ensemble de lignes D_b .

On peut maintenant déterminer l'expression $I_G^n(\Lambda) - I_G^{n+1}(\Lambda)$. En intégrant (VI.20) respectivement sur les variables α de $\tilde{\mathcal{G}}_x$, D_b et G/\mathcal{G} on trouve

$$I_G^n(p, \Lambda) - I_G^{n+1}(p, \Lambda) = \tag{VI.21}$$

$$\sum_{\{\mathcal{G}'_x\}} \prod_x I_{\tilde{\mathcal{G}}_x}^{\chi_{p_x} R'}(\Lambda) \prod_b \left[\frac{C(m_b, p)}{\Lambda^{2m_b}} \left(1 - \frac{m^2}{\Lambda^2}\right)^p \right] \cdot I_{[G/\mathcal{G}]_{\chi_{p_x, m_b}}}^R(p)$$

où

$$I_{\tilde{\mathcal{G}}_x}^{\chi_{p_x} R'}(\Lambda) = (m^2 - \Lambda^2)^{e(\mathcal{G}'_x)p} \int_0^{+\infty} \prod d\alpha e^{-i e^{i\epsilon} (\sum \alpha_a m_a^2 + \alpha_a \Lambda^2)} R' \chi_{p_x} \mathcal{G}'_x(\alpha) \tag{VI.22}$$

(au coefficient multiplicatif classique près), et se comporte en

$$\Lambda^{\omega(\mathcal{G}'_x) - p_x + \eta} \quad (\eta > 0) \text{ quand } \Lambda \rightarrow +\infty$$

(quelconque)

$I_{[G/\mathcal{G}]_{\chi_{p_x, m_b}}}^R(p)$ est l'amplitude renormalisée du graphe $[G/\mathcal{G}]$ avec couplages χ_{p_x, m_b} dérivatifs, indépendante des cut-off

$C(m_b, p)$ est une constante égale à $\frac{(m_b + p - 1)!}{m_b! (p - 1)!}$

Dans (VI.21) la somme sur les $\{\mathcal{G}'_x\}$ se rapporte aux familles de connexes I-P.I. disjoints, et les coefficients positifs p_x et m_b sont restreints par la condition

$$\sum_x p_x + 2 \sum_b m_b = \sum_x \omega(\mathcal{G}'_x) - \sup_{\mathcal{G}' \subset G'} \omega(\mathcal{G}') + 2n$$

C. Décomposition finale de $I_G(\Lambda)$

Décomposons $I_G(p, \Lambda)$ jusqu'à l'ordre $M+1$ (M entier ≥ 0) par

$$I_G(p, \Lambda) = \sum_{n=0}^M \left\{ I_G^n(p, \Lambda) - I_G^{n+1}(p, \Lambda) \right\} + I_G^{M+1}(p, \Lambda)$$

En utilisant (VI.21), on obtient par famille $\{\mathcal{G}'_x, \chi_{p_x}\}$ fixée une somme

sur les nombres de couplages m_b sur les lignes de $[G/\mathcal{G}]$ dans le domaine

$$0 \leq \sum_b m_b \leq \frac{1}{2} \left[\left(\sum_x \omega(\varphi'_x) - p_x \right) - \Omega' \right] + M$$

$$\Omega' = \sup_{\varphi' \subset G'} \omega(\varphi')$$

Donc, en définissant Y^N par

$$Y_{[G/\mathcal{G}]_{\chi_p}}^N(p, \Lambda) = \sum_{\substack{\{m_b\} \\ 0 \leq m_b \leq N}} \prod_b \left[\frac{c(m_b, p)}{\Lambda^{2m_b}} \left(\frac{m^2}{\Lambda^2} - 1 \right) \right] \cdot I_{[G/\mathcal{G}]_{\chi_{p_x, m_b}}}^R(p) \quad \text{si } N \geq 0$$

$$= 0 \quad \text{si } N < 0 \tag{VI.23}$$

expression tendant vers $I_{[G/\mathcal{G}]_{\chi_{p_x}}}^R$ quand $\Lambda \rightarrow +\infty$ quelque soit N .

On a finalement

$$I_G^r(p, \Lambda) = \sum_{\substack{\{\varphi'_x, \chi_{p_x}\} \\ \text{connexes, une-} \\ \text{part. irréduct.} \\ \text{disjoints}}} \prod_x \left[I_{\varphi'_x}^{\chi_{p_x} R'}(\Lambda) \right] Y_{[G/\mathcal{G}]_{\chi_{p_x}}}^N(p, \Lambda) + I_G^{M+1}(p, \Lambda) \tag{VI.24}$$

avec $N = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_x \omega(\varphi'_x) - p_x \right) - \Omega' \right] + M$

. Formule qui, puisque $N \leq M - \frac{1}{2} \left(\sum_x p_x \right) \leq M$, donne

$$I_G^r(p, \Lambda) = \sum_{\{\varphi'_x, \chi_{p_x}\}} \prod_x I_{\varphi'_x}^{\chi_{p_x} R'}(\Lambda) Y_{[G/\mathcal{G}]_{\chi_{p_x}}}^M(p, \Lambda) \dots$$

$$\dots + \text{terme d'ordre } \Lambda^{-\Omega' - 2M - 2} \tag{VI.25}$$

Dans l'appendice D, nous généralisons cette décomposition pour les graphes avec couplages dérivatifs.

VII. RENORMALISATION ET STRUCTURE EN CONTRE-TERMES DU LAGRANGIEN ET DES INTEGRALES DE FEYNMANN POUR UN CHAMP SCALAIRE.

A. La procédure BPHZ de renormalisation.

Nous sommes maintenant à même d'expliquer complètement la procédure de renormalisation de Bogolioubov-Parasiuk-Hepp. Rappelons brièvement la nécessité de la renormalisation et le principe de la renormalisation BPHZ (pour plus de détails voir Ref. [4] [5] [6]).

Nous nous restreindrons ici au cas d'un champ scalaire massif.

Une théorie du champ est définie essentiellement par la donnée d'un lagrangien $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ et des équations du mouvement qui en découlent. Après quantification, on cherche à déterminer les fonctions de Green $G_n(x_1, \dots, x_n)$ qui permettent de calculer la matrice S et tous les processus physiques de la théorie.

On ne sait bien définir les règles de quantification que pour des théories dites du *champ libre*, définies dans notre cas par un lagrangien libre

$$\mathcal{L}_0(\phi) = \frac{1}{2} (\partial_\nu \phi)(\partial^\nu \phi) - \frac{m^2}{2} \phi^2$$

En ajoutant un terme d'interaction dans le lagrangien

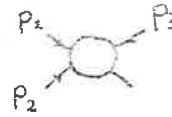
$$\mathcal{L}_{int}(\phi) = - \frac{g}{4!} \phi^4$$

les règles perturbatives permettent de définir les fonctions de Green comme des séries entières formelles de la constante de couplage, dont les coefficients s'expriment en fonction des intégrales attachées aux graphes de Feynman de la théorie. On a vu que les intégrales n'étaient en général pas définies, à cause de l'existence de singularités des intégrands, liés aux singularités des propagateurs libres sur le cône de lumière $X^2 = 0$ (divergences ultraviolettes). Ces singularités provenant de la nature du lagrangien libre, on va renoncer à donner un sens physique à \mathcal{L}_0 , pour s'attacher à obtenir des quantités définies caractérisant le système en interaction.

C'est à dire que l'on va introduire des contre-terms dans le lagrangien libre de manière à éliminer ces singularités des propagateurs. De cette manière on obtiendra des expressions finies pour les fonctions de vertex.

(En particulier pour la fonction à deux points  qui définira la

masse physique et de la fonction à quatre points la constante de couplage physique).



qui définira

Le lagrangien libre, qui n'aura été qu'un intermédiaire dans la définition de la physique, perd toute définition précise.

Deux problèmes se posent à ce stade.

- Pour garder un sens à la théorie, le nombre de contre-terms à introduire doit être fini. Ce n'est pas le cas pour les théories non renormalisables. Sinon, l'arbitraire laissé dans la définition des contre-terms (on peut modifier les contre-terms pour induire une modification finie des fonctions de vertex) revient en fait à un arbitraire dans la définition des constantes physiques. (masse, constante de couplage etc...)

- En fait, les contre-terms à introduire pour éliminer les divergences sont eux aussi divergents et font apparaître d'autres termes infinis dans les calculs. On introduira une procédure de régularisation, pour suivre les étapes suivantes.

1) On regularise les intégrales pour leur donner un sens et obtenir des expressions finies (par exemple par Pauli-Villars en cut-off Λ) qui divergeront quand le cut-off tendra vers 0 ($\Lambda \rightarrow +\infty$)

2) On introduit des contre-terms finis qui seront fonctions du cut-off afin d'éliminer ces divergences (quand $\Lambda \rightarrow +\infty$).

On obtiendra alors des expressions finies des intégrales de Feynman, qui resteront finies quand le cut-off tendra vers 0.

3) quand le cut-off tendra vers 0, les contre-terms deviendront infinis et le lagrangien ne sera plus défini, seules resteront définies les intégrales renormalisées attachées aux diagrammes

Considérons donc un Lagrangien
$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2}(\partial \phi)^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{g}{4!} \phi^4$$

Des fonctions de vertex à n points $\Gamma_N(p)$, on peut déduire les fonctions de Green $G_N(p)$. Ce sont les sommes des contributions des diagrammes 1-particule irréductibles connexes (c'est-à-dire que si on enlève une ligne quelconque le diagramme reste connexe) sans tenir compte des contributions des pattes externes.

Si on numérote les diagrammes I.P.I. connexes à N pattes et à n vertex par i, N, n, i , les fonctions de vertex sont données par

$$\Gamma_N(p, m, g) = \sum_{n=0}^{\infty} g^n \sum_{i=1}^{I(N,n)} \Theta_{G_{N,n,i}} I_{G_{N,n,i}}(p, m) \quad (\text{VII.1})$$

Θ_G facteur de symétrie attaché au graphe G .

$I_G(p, m)$ amplitude de Feynman attachée au graphe G .

Les I_G ne sont pas définies. Après régularisation de Pauli-Villars, on obtient des amplitudes régularisées $I_G^r(p, m, \Lambda)$ et des fonctions de vertex régularisées.

$$\Gamma_N^r(p, m, g, \Lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} g^n \sum_{i=1}^{I(N,n)} \Theta_{G_{N,n,i}} I_{G_{N,n,i}}^r(p, m, \Lambda) \quad (\text{VII.2})$$

Introduisons des contre-termes dans le lagrangien, fonction de g et de Λ/m

$$\mathcal{L} = \frac{b(g, \Lambda/m)}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{m^2}{2} a(g, \Lambda/m) \phi^2 - \frac{c(g, \Lambda/m)}{4!} \phi^4 \quad (\text{VII.3})$$


supposés séries formelles de g .

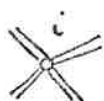
$$a(g, \frac{\Lambda}{m}) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\frac{\Lambda}{m}) g^n \quad (\text{VII.4})$$

$$b(g, \frac{\Lambda}{m}) = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} b_n(\frac{\Lambda}{m}) g^n \quad (\text{VII.5})$$

$$c(g, \frac{\Lambda}{m}) = g + \sum_{n=2}^{\infty} c_n(\frac{\Lambda}{m}) g^n \quad (\text{VII.6})$$

A ce nouveau lagrangien correspondent les nouveaux propagateurs et les nouvelles règles de Feynman :

à la ligne  est associé le propagateur $\frac{i}{b k^2 - a m^2}$

au vertex i  est associé $-i(2\pi)^D \delta(\sum_a \epsilon_{ia} k_a)$ (VII.7)

Ce nouveau propagateur est régularisé comme l'ancien par :

$$\text{propagateur régularisé} \quad \frac{k}{\underline{\underline{k}}} \rightarrow \frac{i}{b k^2 - a m^2} \left(\frac{m^2 - \Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2} \right)^p \quad (\text{VII.8})$$

A chaque diagramme régularisé correspond la nouvelle contribution $K_G(p, m, g, \frac{\Lambda}{m})$ et de nouvelles fonctions de vertex.

$$\tilde{\Gamma}_N(p, m, g, \Lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c(g, \frac{\Lambda}{m})^n \sum_{i=1}^{I(N,n)} \theta_{G_{N,n,i}} K_{G_{N,n,i}}(p, m, g, \frac{\Lambda}{m}) \quad (\text{VII.9})$$

Notre but va être de réexprimer les Γ_N en un développement en série entière de g , dont les termes tendront vers une limite finie quand $\Lambda \rightarrow +\infty$ (tous les calculs suivants seront entièrement formels, on ne s'occupera pas de la convergence des séries considérées).

Le nouveau propagateur s'écrit

$$\frac{i}{b k^2 - a m^2} = \frac{i}{k^2 - m^2} \sum_{q=0}^{\infty} \left[\frac{(1-b)k^2 - (1-a)m^2}{k^2 - m^2} \right]^q \quad (\text{VII.10})$$

c'est-à-dire que chaque ligne du nouveau propagateur $\underline{\underline{\quad}}$ peut s'écrire en fonction des anciens

$$\underline{\underline{\quad}} = \text{---} + \text{---}\square\text{---} + \text{---}\square\square\text{---} + \text{---}\square\square\square\text{---} + \dots \quad (\text{VII.11})$$

où \square désigne un vertex correspondant à un couplage dérivatif

$$-i \delta(\sum k) [(1-b)k^2 - (1-a)m^2]$$

et la nouvelle contribution du graphe $G_{N,n,i}$ s'écrira comme somme des contributions des nouveaux graphes $H_{N,n,i}(q_1, \dots, q_\ell)$ obtenus à partir de $G_{N,n,i}$ par adjonction de q_i "boîtes" \square sur la ligne i . Ou encore, en contractant les boîtes pour obtenir des diagrammes de Feynman classiques.

et en "sortant" l'action des boîtes sous forme d'opérateurs $\vec{O}_j(g, \frac{\Lambda}{m}) = (1-b)k_j^2 - (1-a)m^2$ (att. \vec{O}_j agit à l'intérieur de l'intégrale I_H)

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_N(p, m, g, \frac{\Lambda}{m}) &= \dots \quad (\text{VII.12}) \\ \dots \sum_{n=0}^{\infty} c(g, \frac{\Lambda}{m})^n \sum_{i=1}^{I(N,n)} \theta_{G_{N,n,i}} \sum_{\substack{q_j=0 \dots \infty \\ j=1 \dots \ell}} \prod_{j=1}^{\ell} \left[\vec{O}_j(g, \frac{\Lambda}{m}) \right]^{q_j} I_{H_{N,n,i}}^{r}(p, m, \Lambda, q_1, \dots, q_\ell) \end{aligned}$$

En développant C et \vec{O} , puis en regroupant tous les termes correspondant à une puissance donnée de g, on obtient le développement :

$$\tilde{\Gamma}_N = \sum_{\gamma=0}^{\infty} g^{\gamma} \sum_{n=0}^{\gamma} \sum_{i=1}^{\mathcal{I}(N,n)} \theta_{G(N,n,i)} \dots \quad (\text{VII.13})$$

$$\dots \sum_{\{r\}\{q\}\{s\}} \left(\prod_{j=2}^n c_{r_j} \right) \left(\prod_{u=1}^{\ell} \prod_{v=1}^{q_u} \vec{\theta}_{S_{uv}} \right) \mathbb{I}_{H\{q\}}^{\gamma} (p, m, \Lambda)_{N,n,i}$$

où

$\{r\} = \{r_1, \dots, r_n\}$ $r_i = 1, 2, \dots$ puissance de g associée au vertex i

$\{q\} = \{q_1, \dots, q_{\ell}\}$ $q_u = 0, 1, \dots$ q_u vertex insertions sur la ligne u de $G_{N,n,i}$

$\{s\} = \{s_{uv}, u [1 \dots \ell]\}$ $s_{uv} = 1, 2, \dots$ puissance de g associée à l'insertion de masse \vec{v} sur la ligne u.
 $v [1 \dots q_u]$

et où l'opérateur $\vec{O}_{su,v}$ est défini par $b_{su,v} k_u^2 - a_{su,v} m^2$ et la somme

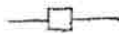

sur les $\{v\}\{q\}\{s\}$ est restreinte à $\sum_i r_i + \sum_{u,v} s_{uv} = \gamma$.





Enfin, développons les a_n , b_n et c_n suivant les graphes C.I.P.I. à n vertex en définissant des coefficients (en grande partie arbitraires) :

$$c_{G_{2,n,i}} \left(\frac{\Lambda}{m} \right) \quad i=1 \dots \mathcal{I}(2,n) \quad \text{tels que} \quad a_n = \sum_{i=1}^{\mathcal{I}(2,n)} \theta_{G_{2,n,i}} a_{G_{2,n,i}} \quad (\text{VII.14})$$

$$b_{G_{2,n,i}} \left(\frac{\Lambda}{m} \right) \quad i=1 \dots \mathcal{I}(2,n) \quad \text{tels que} \quad b_n = \sum_{i=1}^{\mathcal{I}(2,n)} \theta_{G_{2,n,i}} b_{G_{2,n,i}} \quad (\text{VII.15})$$

$$c_{G_{4,n,i}} \left(\frac{\Lambda}{m} \right) \quad i=1 \dots \mathcal{I}(4,n) \quad \text{tels que} \quad c_n = \sum_{i=1}^{\mathcal{I}(4,n)} \theta_{G_{4,n,i}} b_{G_{4,n,i}} \quad (\text{VII.16})$$

Ce qui revient à développer un contre-terme relatif à  en série de contre termes relatifs aux graphes C.I.P.I. à 2 pattes, et un contre terme relatif à  en série de contre-terme relatifs aux C.I.P.I. à quatre pattes.

Resommant sur tous les graphes (à γ vertex) obtenus à partir d'un $H\{q\}$ en remplaçant finalement les vertex  par des C.I.P.I. quatre pattes  et les vertex  par des C.I.P.I. deux pattes .

Nous obtenons finalement l'expression de la fonction de vertex renormalisée, en notant

$$\vec{\Theta}_G = b_G k^2 - a_G m^2 \quad (\text{VII.17})$$

et en remarquant que Θ se factorise •

$$\tilde{\Gamma}_N^r(p, m, \Lambda) = \sum_{\gamma=0}^{\infty} g^\gamma \sum_{i=2}^{\mathcal{I}(N, \gamma)} \Theta_{G_{N, \gamma, i}} \sum_{\{R\}} \left[\prod_{\substack{R \\ 4 \text{ pattes}}} C_R \left(\frac{\Lambda}{m} \right) \prod_{\substack{R \\ 2 \text{ pattes } r}} \vec{\Theta}_R \left(\frac{\Lambda}{m} \right) \right] \dots \mathcal{I}_{[G_{N, \gamma, i}/UR]}(p, m, \Lambda) \quad (\text{VII.18})$$

où la somme est effectuée sur les familles $\{R\}$ de graphes C.I.P.I. disjoints à 2 ou 4 pattes contenus dans G .

Notons qu'un graphe C.I.P.I. à deux pattes est défini par $\omega(R) = 2$ et un C.I.P.I. à 4 pattes par $\omega(R) = 0$, et que, avec les notations du § VI :

$$\vec{\Theta}_R \mathcal{I}_{[G/R]} = b_R \mathcal{I}_{[G/R]_{\chi_2}} - a_R m^2 \mathcal{I}_{[G/R]} \quad (\text{VII.19})$$

où le couplage χ_2 en k^2 est effectué au vertex réduit de R .

$\tilde{\Gamma}_N$ ne peut se développer en fonction des amplitudes de Feynman renormalisées

$$\tilde{\Gamma}_N^r(p, \Lambda) = \sum_{\gamma=0}^{\infty} g^\gamma \sum_{i=2}^{\mathcal{I}(N, \gamma)} \Theta_{G_{N, \gamma, i}} \tilde{\mathcal{I}}_{G_{N, \gamma, i}}^R(p, m, \Lambda) \quad (\text{VII.20})$$

où l'amplitude renormalisée est définie par la relation :

$$\tilde{\mathcal{I}}_G^R(p, m, \Lambda) = \sum_{\substack{\{R, \chi_{P_R}\} \\ \omega(R) - P_R \geq 0}} \prod_R C_R^{\chi_{P_R}} \left(\frac{\Lambda}{m} \right) \mathcal{I}_{[G/UR]}^r(p, \Lambda)_{\chi_{P_R}} \quad (\text{VII.21})$$

La somme étant effectuée sur les familles $\{R, \chi_{P_R}\}$ de connexes I.P.I. et de couplages associés χ_p (p pair) tels que

$$\omega(R) - P_R \geq 0 \quad (\text{VII.22})$$

Et les contre-termes $C_R^{\chi_{PR}}(\Lambda)$ sont définis à partir des anciens par :

$$\begin{aligned} C_R^{\chi_{PR}}\left(\frac{\Lambda}{m}\right) &= C_R\left(\frac{\Lambda}{m}\right) \text{ si } R \text{ 4 pattes } (P_R=0) \\ &= -a_R\left(\frac{\Lambda}{m}\right)m^2 \text{ si } R \text{ 2 pattes et } P_R=0 \\ &= b_R\left(\frac{\Lambda}{m}\right) \text{ si } R \text{ 2 pattes et } P_R=2 \end{aligned} \quad (\text{VII.23})$$

Pour obtenir une théorie renormalisée, il faut déterminer (si c'est possible) les contre-termes $C_R^{\chi_{PR}}(\Lambda)$ de manière que l'expression (VII.14) ait une limite finie quand le cut-off $\Lambda \rightarrow +\infty$.

L'amplitude renormalisée sera la limite de (VII.15) quand $\Lambda \rightarrow +\infty$

$$\tilde{I}_G^R(p) = \lim_{\Lambda \rightarrow +\infty} \tilde{I}_G^R(p, \Lambda) \quad (\text{VII.24})$$

B. Structure des contre-termes et intégrales renormalisées.

Nous allons, avec les résultats du § VI et de l'Appendice D, montrer qu'un tel choix de contre-termes est possible et donner la structure de ces contre termes.

Réécrivons (VII.20)

$$\tilde{I}_G^R(p, \Lambda) = \sum_{\substack{\{R_I, \chi_{P_I}\} \\ \omega(R_I) - P_I \geq 0}} \prod_I C_{R_I}^{\chi_{P_I}}(\Lambda) I_{[G/UR_I]_{\chi_{P_I}}}^r(p, \Lambda)$$

D'après le § VI et l'appendice D, $I_{[G/UR_I]_{\chi_{P_I}}}^r$ se décompose en (D.15)

$$I_{[G/UR_I]_{\chi_{P_I}}}^r(p, \Lambda) = \sum_{\substack{\{R_J, \chi_{P_J}\} \\ R_J \subset [G/UR_I]_{\chi_{P_I}}}} \prod_J I_{R_J}^{\chi_{P_J}}(\Lambda) \prod_{\substack{M \\ \left[\frac{[G/UR_I]_{\chi_{P_I}}}{UR_J} \right]_{\chi_{P_J}}}} (p, \Lambda) + \text{termes d'ordre} \\ \text{inférieurs en } \Lambda \quad (\text{VII.25})$$

A chaque $[R_J, \chi_{P_I}]$ dans $[G/UR_I]_{\chi_{P_I}}$ correspond un nouveau graphe dans G obtenu en dilatant les R_I contenus dans R_J et en ajoutant dans ce graphe les couplages χ_{P_I} correspondants. (VI.20) se réécrit donc, pour M donné, après resommation sur tous les R_I contenus dans un R_J .

$$\begin{aligned} \tilde{I}_G^R(p, \Lambda) = & \sum_{\substack{\{R_I, \chi_{P_I}\} \\ \text{v.g. } \omega(R_I) - p_I \geq 0 \\ \{R_J, \chi_{P_J}\}}} \prod_I C_{R_I}^{\chi_{P_I}}(\Lambda) \prod_J \left[\sum_{\substack{\{R_i^J, \chi_{P_i^J}\} \\ \neq R_J}} \prod_i C_{R_i^J}^{\chi_{P_i^J}}(\Lambda) \prod_{\substack{[R_J] \\ [UR_i^J]} \chi_{P_i^J}} \right] \dots \\ & \dots Y_{\substack{[G/UR_I \cup R_J] \\ \chi_{P_I}, \chi_{P_J}}}^M(p, \Lambda) + \sum_{\substack{\{R_I, \chi_{P_I}\} \\ \omega(R_I) - p_I \geq 0}} \prod_I C_{R_I}^{\chi_{P_I}}(\Lambda) \times o\left(\Lambda^{-\alpha\left[\frac{G}{R_I}, \chi_{P_I}\right] - M}\right) \end{aligned}$$

(VII.26)

où $\sum_{\{R_i^j, \chi_{P_i^j}\}}$ désigne une somme sur les ensembles de $R_i^j, \chi_{P_i^j}$ où les

R_i^j sont des connexes une particule irréductible disjoints divergents contenus dans R_J et distincts de R_J et $\chi_{P_i^j}$ des couplages associés tels que

$$\omega(R_i^j) - p_i^j \geq 0$$

Dans cette formule, les ensembles connexes peuvent fort bien être vides, auquel cas la contribution est 1.

Notons

$$F_Y^{\chi_P}(\Lambda) = \sum_{\substack{\{R, \chi_{P_R}\} \\ \text{connexes I.P.I.} \\ \neq Y \text{ evt. } \emptyset \\ \text{v.g. } \omega(R) - p_R \geq 0}} \left[\prod_R C_R^{\chi_{P_R}}(\Lambda) \right] \prod_{\substack{[Y/UR] \\ \chi_{P_R}}}^{\chi_P}(\Lambda) \quad \text{(VII.27)}$$

(VII.26) se réécrit, en séparant les R_I suivant le signe de $\omega(R_I) - p_I$

$$\begin{aligned} \tilde{I}_G^R(p, \Lambda) = & \sum_{\{R_I, \chi_{P_I}\}} \prod_{R_I} \left[C_{R_I}^{\chi_{P_I}}(\Lambda) + F_{R_I}^{\chi_{P_I}}(\Lambda) \right] \prod_{\substack{R_I \\ \omega(R_I) - p_I < 0}} F_{R_I}^{\chi_{P_I}}(\Lambda) \dots \\ & \dots Y_{\substack{[G/UR_I] \\ \chi_{P_I}}}^M + \sum_{\substack{\{R_I, \chi_{P_I}\} \\ \omega(R_I) - p_I \geq 0}} \prod_i C_{R_I}^{\chi_{P_I}}(\Lambda) \times o\left(\Lambda^{-\alpha\left[\frac{G}{UR_I}, \chi_{P_I}\right] - M}\right) \end{aligned} \quad \text{(VII.28)}$$

Pour obtenir des amplitudes finies, et puisque $Y_{[G/UR_I] \chi_{P_I}}^M(p, \Lambda)$ tend vers

$I_{[G/UR_I]}^R$ (p) pour tout M , il suffit de déterminer des contre-terms tels

que :

a) Pour tout ensemble $\{R_I, \chi_{p_I}\}$.

$$\prod_{\omega(R_I) - p_I > 0} \left[C_{R_I}^{\chi_{p_I}}(\Lambda) + F_{R_I}^{\chi_{p_I}}(\Lambda) \right] \prod_{\omega(R_I) - p_I < 0} F_{R_I}^{\chi_{p_I}}(\Lambda)$$

soit fini quand $\Lambda \rightarrow +\infty$ ce qui est équivalent aux conditions

(a') $C_{R_I}^{\chi_{p_I}}(\Lambda) + F_{R_I}^{\chi_{p_I}}(\Lambda)$ fini quand $\Lambda \rightarrow \infty$ si $\omega(R_I) - p_I \geq 0$

(a'') $F_{R_I}^{\chi_{p_I}}(\Lambda)$ fini quand $\Lambda \rightarrow +\infty$ si $\omega(R_I) - p_I < 0$

b) Il existe un M tel que, pour tout ensemble $\{R_I, \chi_{p_I}\}$ tel que $\omega(R_I) - p_I \geq 0$

$$\lim_{\Lambda \rightarrow +\infty} \prod_i C_{R_I}^{\chi_{p_I}}(\Lambda) \cdot \Lambda^{-\omega(G/UR_I)\chi_{p_I} - M} = 0$$

Déterminons d'abord des contre-terms vérifiant a

. Le contre terme le plus général vérifiant (a') s'écrit

$$C_R^{\chi_p}(\Lambda) = \tilde{C}_R^{\chi_p}(\Lambda) - F_R^{\chi_p}(\Lambda)$$

(VII.29)

où $\tilde{C}_R^{\chi_p}(\Lambda)$ est une fonction arbitraire de Λ tendant vers une limite finie que l'on notera $\tilde{C}_R^{\chi_p}$ quand $\Lambda \rightarrow +\infty$.

$C_R^{\chi_p}(\Lambda)$ est donc défini par récurrence puisque dépendant des contre-terms des graphes connexes une particule irréductible $\mathcal{G} \notin R$.

. Démontrons par récurrence que pour tout R ,

$$C_R^{\chi_p}(\Lambda) \sim \Lambda^{\omega(R) - p} \quad \text{quand } \Lambda \rightarrow +\infty \quad \text{(VII.30)}$$

. c'est vrai le graphe vide \emptyset où $F_{\emptyset}(\Lambda) = 0$

. Si c'est vérifié pour tous les sous graphes $R_I \subsetneq R$ puisque

$$I_{\left[\begin{smallmatrix} R' \\ R/U_{R_I} \end{smallmatrix} \right]_{\chi_{P_I}}}^{\chi_P}(\Lambda) \sim \Lambda^{\omega\left(\left[\begin{smallmatrix} R' \\ R/U_{R_I} \end{smallmatrix} \right]_{\chi_{P_I}}\right) - P}$$

et que,

$$\omega\left(\left[\begin{smallmatrix} R \\ R/U_{R_I} \end{smallmatrix} \right]_{\chi_{P_I}}\right) = \omega(R) - \sum_I [\omega(R_I) - P_I]$$

$$F_R^{\chi_P}(\Lambda) \sim \Lambda^{\omega(R) - P}$$

donc le résultat est vrai

(α'') n'est qu'une conséquence que (VII.30) et en fait

si $\omega(R) - P < 0$ $F_R^{\chi_P}(\Lambda) \rightarrow 0$ quand $\Lambda \rightarrow +\infty$

D'après (VII.30), il suffit de prendre $M > 2\Omega(G)$ pour que b) soit vérifié.

En passant alors à la limite $\Lambda \rightarrow +\infty$, dans (VII.44) les termes où apparaissent des $F_{R_I}^{PI}(\Lambda)$ isolés disparaissent et il reste pour la nouvelle amplitude du graphe G :

$$\tilde{I}_G^R(P) = \sum_{\substack{\{R, \chi_P\} \\ \text{connexes I.P.I.} \\ \omega(R) - P \geq 0}} \left[\prod_R \tilde{C}_R^{\chi_P} \right] I_{\left[\begin{smallmatrix} R \\ G/U_R \end{smallmatrix} \right]_{\chi_P}}^R(P) \quad (\text{VII.31})$$

où les $\tilde{C}_R^{\chi_P}$ sont des coefficients arbitraires.

. Si on prend tous les \tilde{C} nuls sauf $\tilde{C}_{\emptyset} = 1$, on retrouve

$$\tilde{I}_G^R(P) = I_G^R(P)$$

Enfin, en explicitant la dépendance de $C_R^{\chi_P}$ en fonction des contre termes d'ordre inférieurs, on trouve finalement la *formule sur les forêts* de connexes une particule-irréductible

$$C_G^{X_p} = \sum_{\substack{\mathcal{F} \text{ forêt de} \\ \{R, X_{P_R}\} \text{ tels que} \\ \omega(R) - P_R > 0 \text{ et} \\ \forall q \{G, X_p\} \in \mathcal{F}}} \prod_{R \in \mathcal{F}} \left(\tilde{C}_R^{X_{P_R}} - I_R^{X_{P_R} R'} \right) \prod_{R \in \mathcal{F}} \left(-I_{\left[\frac{R}{UR'} \right] X_{R'}}^{X_{P_R} R'} \right) \quad (\text{VII.32})$$

minimaux
non minimaux


- où un graphe R est un élément minimal de \mathcal{F} s'il ne contient pas d'autres éléments de \mathcal{F} que lui même
- et si R est non minimal, UR' désigne l'union des graphes de \mathcal{F} contenus strictement dans R.


Ce résultat a été obtenu initialement par Zimmermann Ref. [6] dans l'espace des impulsions.

VIII. CONCLUSION

Nous avons donc entièrement explicité la procédure de renormalisation d'une théorie scalaire ϕ^4 . Examinons d'abord un peu plus en détail les résultats trouvés.


- Tad-pôles et produits normaux

Nous n'avons pas considéré le cas un peu particulier des graphes possédant des tad-pôles du type 


Remarquons d'abord que la contribution d'un tad pôle  dans un graphe G se factorise et est purement divergente, donc rendue nulle par l'opération R. Donc, si G contient un tad pôle

$$I_G^R(p) = 0$$

(Résultat valable si on ajoute des couplages , donc $Y_G(p) = 0$).

Si, dans (VII.31), on prend $\tilde{C}_R^{\chi P} = 0$ si R contient un tad pôle les intégrales renormalisées des graphes avec  seront nuls.

Donc, si l'on part d'une théorie où l'on n'a pas adopté la convention des produits normaux, la théorie renormalisée, par un choix adéquat de contre-terme, ne contiendra de toutes manières que des produits normaux (une renormalisation finie des tad-pôles modifiera les propagateurs sans modifier cette prescription).

Dire que l'on part d'une théorie non renormalisée avec produits normaux, c'est dire qu'en fait on a déjà introduit dans le lagrangien les contre-terme relatifs aux graphes avec tad pôles .

- On peut vérifier que pour un graphe G superficiellement divergent de degrés ω , toutes les dérivées d'ordre $\omega' \leq \omega$ sont nulles.

$$\frac{\partial \omega'}{\partial p_i \dots \partial p_{i \omega'}} I_G^R(p) \Big|_{p=0} = 0$$

On a effectué ce que l'on appelle une renormalisation intermédiaire, c'est à dire que les conditions de renormalisation sont fixées à l'origine des impulsions $p = 0$.

- Enfin, l'amplitude renormalisée (VII.31) d'un graphe G dépend d'un certain nombre de coefficients arbitraires $\tilde{C}_R^{\chi R}$.

Les fonctions de vertex sont entièrement déterminées si on connaît les sommes partielles $\sum_{R_I} \tilde{C}_{R_I}^{\chi P} \theta_{R_I}$ à p donné pour tous les graphes R_I C.I.P.I. ayant le même nombre de vertex et de pattes externes. Ces sommes partielles sont uniquement déterminées, dans la théorie ϕ^4 massive, si l'on impose les conditions de normalisation à tous les ordres de perturbation :

- 1) $\Gamma^{(2)}(p^2 = m^2) = 0$ qui impose l'existence d'un pôle de la fonction de Green quand $p^2 = m^2$.
- 2) $\frac{d}{dp^2} \Gamma^{(2)}(p^2 = m^2) = 1$ le résidu du pôle doit être égal à 1
- 3) $\Gamma^{(4)}(p_i p_j = \frac{m^2}{3} (4\delta_{ij} - 1)) = g$ qui impose la valeur de la constante de couplage.

Il faudrait vérifier que la théorie obtenue satisfait aux principes fondamentaux : causalité - unitarité - localité.

Sans entrer dans le détail, on peut s'en convaincre en remarquant que la procédure de renormalisation adoptée permet de garder une formulation lagrangienne, ce qui assure l'unitarité, au prix de l'adjonction d'un nombre fini de contre termes (ici trois), ce qui assure la localité et la causalité.

Notons enfin que la théorie renormalisée est bien invariante de Lorentz. Poincaré. C'est la seule symétrie de la théorie ϕ^4 massive. Les problèmes sont bien plus complexes lorsque la théorie possède des symétries internes ou une invariance de Jauge. La régularisation brise souvent la symétrie et il faut s'assurer qu'un choix adéquat de contre-termes permet de récupérer la symétrie dans la théorie normalisée.

Il est intéressant de noter que, contrairement à l'habitude, nous avons développé dans ce rapport une méthode non récurrente pour étudier la structure des contre-termes.

La méthode utilisée ici pour la régularisation de Pauli-Villars peut être adoptée à d'autres régularisations (régularisation analytique de Speer, régularisation en dimension) et conduirait à des résultats équivalents.

APPENDIX A

TRANSFORMATION DE MELLIN

Soit f une fonction complexe sur $]0, +\infty[$. On définit sa transformée de Mellin $M(x)$ fonction sur le plan complexe par

$$M(x) = \int_0^{+\infty} d\Lambda \Lambda^{-x-1} f(\Lambda) \tag{A.1}$$

Cette intégrale n'est bien sur pas convergente à priori pour toutes les valeurs de x

Si on sépare $M(x) = M_1(x) + M_2(x)$

$$M_1(x) = \int_1^{+\infty} d\Lambda \Lambda^{-x-1} f(\Lambda)$$

$$M_2(x) = \int_0^1 d\Lambda \Lambda^{-x-1} f(\Lambda)$$

si $|f(\Lambda)| < A^{\alpha+\epsilon} \quad \forall \epsilon > 0 \text{ quand } \Lambda \rightarrow +\infty$

$M_1(x)$ n'est définie que dans le domaine $R_e(x) > a$

si $|f(\Lambda)| < \Lambda^{b-\epsilon} \quad \forall \epsilon > 0 \text{ quand } \Lambda \rightarrow 0_+$

$M_2(x)$ n'est définie que dans le domaine $R_e(x) < b$

$M(x)$ n'est donc définie que dans un certain domaine du plan complexe éventuellement vide.

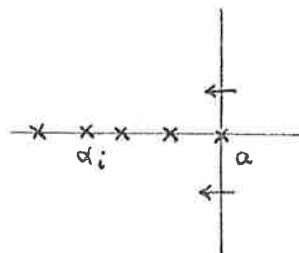
Cependant, si le comportement à ∞ de $f(\Lambda)$ est du type.

$$f(\Lambda) = \sum_{i,j} c_{ij} \Lambda^{\alpha_i} \text{Ln}^{\beta_{ij}} \Lambda \quad \text{quand } \Lambda \rightarrow +\infty \quad \begin{matrix} \alpha_i \in \mathbb{R} \\ \beta_{ij} \in \mathbb{R}^+ \end{matrix} \tag{A.2}$$

$M_1(x)$ est prolongeable analytiquement en une fonction méromorphe sur $R_e(x) \leq a$ possédant des pôles.

A un terme en $\Lambda^{\alpha} \text{Ln}^{\beta} \Lambda$ de $f(\Lambda)$ correspond une singularité en

$$\frac{\Gamma(\beta)}{(x-\alpha)^{\beta+1}} \quad \text{pour } M_1(x)$$



(A.3)

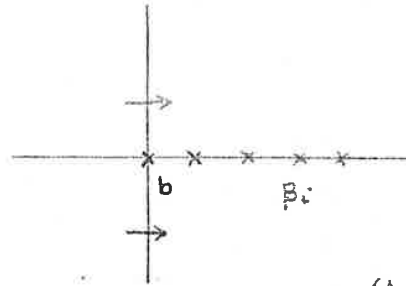
De même, si le comportement en 0 de $f(\Lambda)$ est du type

$$\beta(\Lambda) \sim \sum_{ij} D_{ij} \Lambda^{\alpha_i} \text{Ln}^{\beta_{ij}} \Lambda \quad \text{quand } \Lambda \rightarrow +\infty \quad \begin{array}{l} \alpha_i \in \mathbb{R} \\ \beta_{ij} \in \mathbb{R}^+ \end{array}$$

$M_2(x)$ est prolongeable analytiquement sur $\text{Re}(x) \geq b$ en une fonction méromorphe. A un terme en $\Lambda^\gamma \text{Ln}^\delta \Lambda$

$\Lambda \rightarrow 0_+$ de $f(\Lambda)$ correspond une singularité en

$$\frac{-\Gamma(\delta)}{(x-\gamma)^{1+\delta}}$$



(A.4)

La transformée de Mellin $M(x)$ est finalement définie comme une fonction méromorphe sur \mathbb{C} dont les pôles nous permettrons de déterminer le développement asymptotique de $f(\Lambda)$

Formule réciproque.

On a enfin la formule réciproque, si $f(\Lambda)$ est telle que la Transformée de Mellin $M(x)$ est définie par (2), pour $a < \text{Re} x < b$

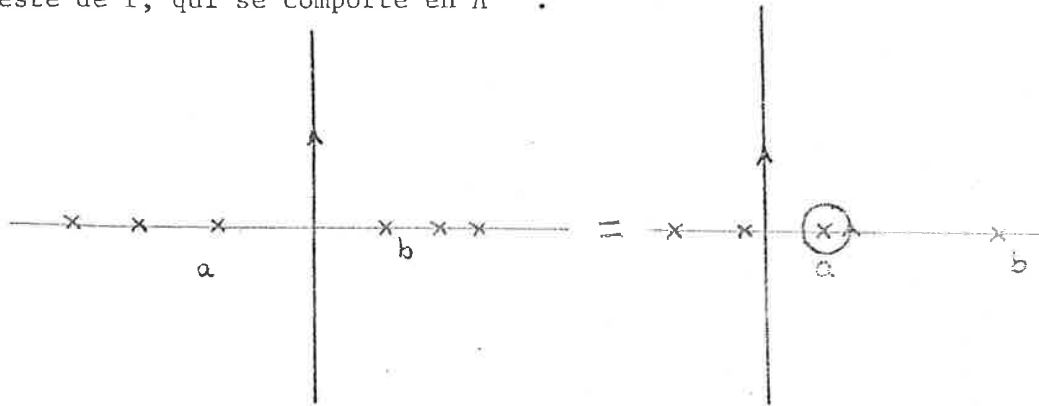
$$\beta(\Lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} dz \Lambda^z \Gamma(z) \quad a < \sigma < b \quad \text{(A.5)}$$

Si on fait "glisser" le contour d'intégration dans (5) derrière le premier pôle a , l'intégration autour du pôle donne le terme asymptotique

$$\Lambda^a \left[\sum_i C_i \text{Ln}^{\beta_i} \Lambda \right]$$

et l'intégration entre $\sigma-i\infty$ est $\sigma+i\infty$
reste de f , qui se comporte en Λ^{a-1} .

$(a-1 < \sigma < a)$ donne le



APPENDIX B

OPERATIONS $\zeta_{\mathcal{G}}^n$ ET OPERATION R - PROPRIETES ET THEOREME DE CONVERGENCE

Soit f une fonction sur C telle que, pour ν complexe donné $x^{-\nu}f(x)$ soit C^∞ en $x=0$ (f pourra posséder des singularités en $x=0$).

1. Transformations ζ_x^n

On définit la transformation ζ_x^n par

$$\zeta_x^n \beta(x) = x^{-\lambda-\epsilon} T_{x=0}^{n+\lambda} \{ x^{\lambda+\epsilon} \beta(x) \} \quad (B.1)$$

où, en définissant la partie entière supérieure de $\operatorname{Re} \nu$ $E'(\nu)$ par le plus petit entier $\geq \operatorname{Re} \nu$:

- λ entier quelconque $\geq -E'(\nu)$
- $\epsilon = E'(\nu) - \nu$

$T_{x=a}^m \{g(x)\}$ désigne le polynôme d'ordre m en $(x-a)$ formé des m premiers termes du développement de Taylor de g fonction infiniment différentiable en a (si $m < 0$, par définition $T^m = 0$).

Cette définition est indépendante de $\lambda \geq -E'(\nu)$ et donc indépendante de ν pourvu que $x^{-\nu}f(x)$ soit infiniment différentiable. En effet

$$T_{x=0}^{n+\lambda} \{ x^{\lambda+\epsilon} \beta(x) \} = x^{\lambda+E'(\nu)} T_{x=0}^{n-E'(\nu)} \{ x^{-\nu} \beta(x) \}$$

pourvu que $\lambda \geq -E'(\nu)$

Pour toute fonction f , $(1 - \zeta_x^n) f(x)$ se comporte en $O(x^{n+1})$ en $x=0$.

2. Transformation $\zeta_{\mathcal{G}}^n$

Soit G un graphe et $f(\alpha)$ une fonction des variables α_a attachées aux lignes a de G . Pour tout sous-graphe \mathcal{G} de G on définit l'opération $\zeta_{\mathcal{G}}^n$ par.

$$\zeta_{\mathcal{G}}^n \beta(\alpha) = \zeta_{\mathcal{P}}^n \beta_{\mathcal{G}}(\rho, \alpha) \quad (B.2)$$

où $f(\rho, \alpha)$ est la fonction obtenue à partir de f par dilatation $\alpha_a \rightarrow \rho^2 \alpha_a$ des lignes $a \in \mathcal{G}$.

On notera parfois dans la suite $\rho_{\mathcal{G}}(\rho, \alpha) = \rho(\alpha) \Big|_{\substack{\alpha_a \rightarrow \rho^2 \alpha_a \\ a \in \mathcal{G}}}$

3. Opération R.

L'opérateur R agissant sur les fonctions $f(\alpha)$ des variables α_a attachées aux lignes a d'un graphe quelconque G est défini par :

$$R = \prod_{\substack{\mathcal{G} \subseteq G \\ \mathcal{G} \neq \emptyset}} \left[1 - \tau_{\mathcal{G}}^{-2\ell(\mathcal{G})} \right] \tag{B.3}$$

(le produit est effectué sur tous les sous graphes \mathcal{G} inclus dans G)

Remarque : Les opérations $\tau_{\mathcal{G}}$ ne commutent pas, la définition (B.3) dépend de l'ordre du produit.

Nous énonçons sans démonstration les propriétés de l'opération R démontrée par M. Bergère et Y.P. Lam (cf. 2 et 3).

THEOREME

Une fonction $Z(\alpha)$ sera dite possédant la propriété de développement de Taylor simultanée si :

pour tout nest $\mathcal{N} = \{\mathcal{G}_i\}$ dans G, $Z(\alpha)$ se transforme sous l'effet d'une dilatation en ρ_i relative à ce nest (cf. II.20) en $Z(\alpha, \rho_i) = \prod_i \rho_i^{p_i} Z'(\alpha, \rho_i)$ où les p_i sont des entiers quelconques et où $Z'(\alpha, \rho_i)$ admet un développement de Taylor dans tous les ρ_i .

Pour une telle fonction :

$$\prod_{\substack{\mathcal{G} \subseteq G \\ \mathcal{G} \neq \emptyset}} \left[1 - \tau_{\mathcal{G}}^{-2\ell(\mathcal{G})} \right] Z(\alpha) \tag{B.4}$$

est indépendant de l'ordre du produit des soustractions.

PROPRIETE :

Si \mathcal{G} et \mathcal{G}' sont deux sous-graphes de G disjoints, ou que l'un contient l'autre. $\tau_{\mathcal{G}}^n$ et $\tau_{\mathcal{G}'}$, commutent pour tout couple (n,m).

THEOREME DE CONVERGENCE

Si $Z(\alpha)$ vérifie :

- i) $Z(\alpha)$ et ses dérivées existent dans tout le domaine $0 < \alpha_a < +\infty$
- ii) $Z(\alpha)$ et ses dérivées sont polynomialement bornées quand les α de tout sous-graphe \mathcal{G} de G tendent simultanément vers $+\infty$

iii) $Z(\alpha)$ vérifie la propriété de développement de Taylor simultanée

l'intégrale $\int_0^{+\infty} \prod_a d\alpha_a e^{-ie^{i\epsilon} [\sum \alpha_a m_a^2]} R Z(\alpha)$ est absolument convergente (B.5)

REMARQUES

- La condition (i) assure l'existence de l'intégrand, la condition (ii) assure la convergence à l'infini, et la condition (iii) assure la définition de R par (B.4).

- La propriété essentielle de l'opération R est donc d'éliminer les singularités en 0 de $Z(\alpha)$ qui font éventuellement diverger l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \prod_a d\alpha_a e^{-ie^{i\epsilon} [\sum \alpha_a m_a^2]} Z(\alpha)$$

C'est bien une opération de soustraction éliminant les divergences ultra-violettes dans les intégrales de Feynman.

THEOREME

Si $Z(\alpha)$ vérifie la propriété de développements de Taylor simultanés on peut donner à R la forme équivalente à (B.3).

$$R Z(\alpha) = \left[1 + \sum_{\substack{\text{nest } \mathcal{A} \\ \text{dans } G}} \prod_{\mathcal{G} \in \mathcal{A}} (-\zeta_{\mathcal{G}}^{-2\ell(\mathcal{G})}) \right] Z(\alpha) \tag{B.6}$$

(B.4) et (B.6) se généralisent par le théorème suivant :

Soit $Z(\alpha)$ vérifiant la propriété de développements de Taylor simultanés, S une famille de sous-graphes de G vérifiant la propriété :

$$(A) \quad \mathcal{G}_1 \text{ et } \mathcal{G}_2 \in S \Rightarrow \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2 \text{ et } \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2 \in S$$

et soit $c(\mathcal{G})$ des entiers associés aux éléments de S vérifiant l'inégalité

$$(B) \quad c(\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2) \geq c(\mathcal{G}_1) + c(\mathcal{G}_2) - c(\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2)$$

Alors

$$\left[1 + \sum_{\substack{\text{nest } \mathcal{A} \\ \text{d'éléments} \\ \text{de } S}} \prod_{\mathcal{G} \in \mathcal{A}} (-\zeta_{\mathcal{G}}^{-2\ell(\mathcal{G})+c(\mathcal{G})}) \right] Z(\alpha) = \prod_{\substack{\mathcal{G} \in S \\ \neq \emptyset}} (1 - \zeta_{\mathcal{G}}^{-2\ell(\mathcal{G})+c(\mathcal{G})}) Z(\alpha) \tag{B.7}$$

La première somme porte sur les nests d'éléments de S et le produit sur les éléments de S est indépendant de l'ordre dans lequel il est effectué.

Il est bon de rappeler les définitions suivantes, essentielles dans les démonstrations de ces propriétés.

Deux sous-graphes de G seront dits overlappants (enchevêtrés) si ils ont au moins un vertex en commun et s'ils ne sont pas l'un dans l'autre.

Une forêt \mathcal{F} dans G est un ensemble de sous-graphes de G non overlappants.

On a besoin au § VI du théorème de factorisation suivant :

THEOREME

Soient $G = G_1 \cup G_2$ un graphe décomposable en deux parties : G_1 et G_2 sans lignes communes (mais éventuellement des vertex).

. $Z_1(\alpha)$ et $Z_2(\alpha)$ deux fonctions relatives aux lignes de G_1 et de G_2 respectivement telles que :

a) Z_1 et Z_2 vérifient la propriété du développement de Taylor simultanée.

b) Z_1 et Z_2 sont des fonctions homogènes dans les α de degrés respectifs $p_1 - 2\ell(G_1)$ et $p_2 - 2\ell(G_2)$ où p_1 et p_2 sont deux entiers relatifs quelconques.

. S_1 et S_2 deux familles de sous-graphes de G_1 et G_2 respectivement vérifiant.

c) la propriété (a) de (B.7)

d) telles que $G_1 \in S_1$ et $G_2 \in S_2$.

Alors, si S désigne la famille des sous graphes de G formés par union d'un élément de S_1 et d'un élément de S_2 . On a la propriété de Factorisation

$$\prod_{\substack{\mathcal{G} \in S \\ \neq \emptyset}} \left[1 - \zeta_{\mathcal{G}}^{-2\ell(\mathcal{G}) + p_1 + p_2 - 2} \right] Z_1(\alpha) Z_2(\alpha) \dots$$

$$= \prod_{\substack{\mathcal{G} \in S_1 \\ \neq \emptyset}} \left[1 - \zeta_{\mathcal{G}}^{-2\ell(\mathcal{G}) + p_1 - 2} \right] Z_1(\alpha) \cdot \prod_{\substack{\mathcal{G} \in S_2 \\ \neq \emptyset}} \left[1 - \zeta_{\mathcal{G}}^{-2\ell(\mathcal{G}) + p_2 - 2} \right] Z_2(\alpha)$$

(B.8)

DEMONSTRATION

S vérifie trivialement la propriété (α), donc l'expression de gauche est indépendante de l'ordre des opérateurs. Plaçons à droite les opérateurs relatifs aux \mathcal{G} de la forme $\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$ où $\mathcal{G}_1 \in S_1$ et remarquons que

$$\left(1 - \zeta_{\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2}^{-2\ell(\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2) + p_1 + p_2 - 2} \right) Z_1 Z_2 = Z_2 \times \left(1 - \zeta_{\mathcal{G}_1}^{-2\ell(\mathcal{G}_1) + p_1 - 2} \right) Z_1$$

(ceci découle de la propriété (b) d'homogénéité des Z).

En agissant de même pour les graphes de la forme $G_1 \cup \mathcal{G}_2$ ($\mathcal{G}_2 \in S_2$) on obtient finalement pour le premier membre de (B.8)

$$\prod_{\substack{\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2 \\ \mathcal{G}_1 \neq G_1 \text{ et } \emptyset \\ \mathcal{G}_2 \neq G_2 \text{ et } \emptyset}} \left(1 - \zeta_{\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2}^{-2\ell(\mathcal{G}) + p_1 + p_2 - 2} \right) \cdot \prod_{\substack{\mathcal{G}_1 \in S_1 \\ \neq \emptyset}} \left(1 - \zeta_{\mathcal{G}_1}^{-2\ell(\mathcal{G}_1) + p_1 - 2} \right) Z_1(\alpha) \\ \cdot \prod_{\substack{\mathcal{G}_2 \in S_2 \\ \neq \emptyset}} \left(1 - \zeta_{\mathcal{G}_2}^{-2\ell(\mathcal{G}_2) + p_2 - 2} \right) Z_2(\alpha)$$

Toujours d'après (α) on peut ordonner de manière quelconque les opérations $(1 - \zeta_{\mathcal{G}_1})$ et $(1 - \zeta_{\mathcal{G}_2})$ et puisque

$$\zeta_{\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2}^{-2\ell(\mathcal{G}_1) - 2\ell(\mathcal{G}_2) + p_1 + p_2} \times \left(1 - \zeta_{\mathcal{G}_1}^{-2\ell(\mathcal{G}_1) + p_1 - 2} \right) \left(1 - \zeta_{\mathcal{G}_2}^{-2\ell(\mathcal{G}_2) + p_2 - 2} \right)$$

appliqué à une fonction factorisée en un élément relatif à G_1 et un élément relatif à G_2 est *identiquement nul* (on applique un Taylor d'ordre $-2\ell(\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2) + p_1 + p_2 - 2$ à une fonction qui se comporte à l'ordre le plus bas en $-2\ell(\mathcal{G}_1) - 2\ell(\mathcal{G}_2) + p_1 + p_2$). On en déduit finalement le résultat.

Notons que la condition d'homogénéité (b) est *impérative*.

Le théorème se généralise sans difficulté à une factorisation en N éléments $Z_1 Z_2 \dots Z_N$ relatifs à N graphes $G_1 \dots G_N$ sans lignes en commun.

APPENDICE C

Nous reprenons ici en la simplifiant la démonstration de l'appendice A de la référence [3] pour calculer

$$\left[\overline{\mathcal{L}}_{\mathcal{G}}^{-2\ell(\mathcal{G})-N} - \overline{\mathcal{L}}_{\mathcal{G}}^{-2\ell(\mathcal{G})-N-2} \right] Z_G(p, \alpha)$$

Si G possède ℓ lignes, n vertex et d_a couplages dérivatifs sur la ligne a $Z_G(p, \alpha)$ est défini par l'intégrale dans l'espace des moments

$$Z_G(p, \alpha) = \int \prod_{a=1}^{\ell} d^D k_a e^{i\tilde{\epsilon}^a \alpha_a k_a^2} (k_a)^{d_a} \prod_{i=1}^{n-1} \delta(p_i - \epsilon_{ia} k_a) \quad (C.1)$$

(une patte externe doit aboutir au vertex n)

Après dilatation $\alpha_a \rightarrow \rho^2 \alpha_a$, $a \in \mathcal{Y}$, et changement de variable $k'_a = \rho k_a$ on obtient :

$$Z_G(p, \alpha, \rho) = \rho^{-D\ell(\mathcal{G}) - \sum_{a \in \mathcal{Y}} d_a} \int \prod_{a=1}^{\ell} d^D k_a e^{i\tilde{\epsilon}^a (\alpha_a k_a^2)} (k_a)^{d_a} \prod_{i=1}^{n-1} \delta(p_i - \sum_{a \in \{\mathcal{G}/\mathcal{Y}\}} \epsilon_{ia} k_a - \sum_{a \in \mathcal{Y}} \frac{\epsilon_{ia} k_a}{\rho})$$

En isolant un vertex frontière de \mathcal{Y} et en transformant le δ correspondant en $\delta(\sum \text{impulsions externes à } \mathcal{Y})$ on obtient

$$Z_G(p, d, \rho) = \rho^{-D\ell(\mathcal{G}) - d(\mathcal{Y})} \int \prod_{a \in \mathcal{G}/\mathcal{Y}} d^D k_a e^{i\tilde{\epsilon}^a (\alpha_a k_a^2)} (k_a)^{d_a} \prod_{i \in \{\mathcal{G}/\mathcal{Y}\}} \delta(\tilde{p}_i - \tilde{\epsilon}_{ia} k_a) \dots$$

$$\dots \int \prod_{a \in \mathcal{Y}} d^D k_a e^{i\tilde{\epsilon}^a (\alpha_a k_a^2)} (k_a)^{d_a} \prod_{i \in \mathcal{Y}} \delta \left[\rho(p_i - \epsilon_{ia} k_a) - \epsilon_{ia} k_a \right] \quad (C.2)$$

ou p_i et ϵ_{ia} sont relatifs aux vertex de $[G/\mathcal{Y}]$

L'intégrale relative à \mathcal{Y} n'est autre que $Z_{\mathcal{Y}}(\rho(p_i - \epsilon_{ia} k_a), \alpha_a)$

$$\left[\overline{\mathcal{L}}_{\mathcal{Y}}^{-2\ell(\mathcal{Y})-N} - \overline{\mathcal{L}}_{\mathcal{Y}}^{-2\ell(\mathcal{Y})-N-2} \right] Z_G(p, \alpha)$$

donne d'après (C.2) :

$$\int \prod_{a \in \mathcal{G}/\mathcal{G}} d^D k_a e^{i \epsilon (d_a k_a^2)} (k_a)^{d_a} \prod_{i \in [\mathcal{G}/\mathcal{G}] \text{ sauf un}} \delta[\tilde{p}_i - \tilde{\epsilon}_{ia} k_a] \dots$$

$$\dots \frac{1}{p!} \frac{d^p}{d\rho^p} Z_{\mathcal{G}}[p(\tilde{p}_i - \tilde{\epsilon}_{ia} k_a), d_a]$$
(C.3)

où $p = DL(\mathcal{G}) + d(\mathcal{G}) - 2L(\mathcal{G}) - N = \omega(\mathcal{G}) - N$

Désignons pour simplifier

$$Y_{\mathcal{G}}(p, k; \alpha) = Z_{\mathcal{G}}(p_i - \epsilon_{ia} k_a, d_a)$$
(C.4)

$Y_{\mathcal{G}}$ est une fonction des impulsions externes de \mathcal{G}

Désignons par χ_p une suite de p composantes d'impulsions externes à $\{q_i^{\mu_i}\}$ (où les q peuvent être des p ou des $-\epsilon_{ia} k_a$) et notons

$$Y_{\mathcal{G}}^{\chi_p}(\alpha) = \frac{1}{p!} \frac{\partial^p}{\partial q_1^{\mu_1} \dots \partial q_p^{\mu_p}} Y_{\mathcal{G}}(p, k; \alpha) \Big|_{p=k=0}$$

La dérivation par rapport à ρ donne :

$$\frac{1}{p!} Y_{\mathcal{G}}(p, p; p, k; \alpha) = \sum_{\chi_p} \prod_{i=1}^p (q_i^{\mu_i}) Y_{\mathcal{G}}^{\chi_p}(\alpha)$$
(C.5)

Le $\prod_{i=1}^p (q_i^{\mu_i})$ rentre dans l'intégrale relative à $[\mathcal{G}/\mathcal{G}]$. Notons

$$Y_{[\mathcal{G}/\mathcal{G}]_{\chi_p}}(\alpha, \tilde{p}) = \int \prod_{a \in [\mathcal{G}/\mathcal{G}]} d^D k_a e^{i \epsilon (d_a k_a^2)} (k_a)^{d_a} \prod_{i \in [\mathcal{G}/\mathcal{G}] \text{ sauf un}} \delta[\tilde{p}_i - \tilde{\epsilon}_{ia} k_a] \prod_{i=1}^p (q_i^{\mu_i})$$
(C.6)

qui n'est rien d'autre que la contribution attachée au graphe $[\mathcal{G}/\mathcal{G}]$ auquel on ajoute les couplages dérivatifs correspondant à χ_p .

Finalement, on a

$$\left(\overline{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}^{-2L(\mathcal{G})-N} - \overline{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}^{-2L(\mathcal{G})-N-2} \right) Z_{\mathcal{G}}(p, \alpha) = Y_{\mathcal{G}}^{\chi_p}(\alpha) Y_{[\mathcal{G}/\mathcal{G}]_{\chi_p}}(p, \alpha)$$
(C.7)



la sommation sur tous les χ_p tels que $p = \omega(\mathcal{G}) - N$ étant sous entendue
Cette formule est valable pour tous les graphes avec ou sans couplages dérivés.

Remarquons enfin que, puisque
$$\chi_{\mathcal{G}}(p; \alpha) = \rho^{-DL(\mathcal{G}) - d(\mathcal{G})} \chi_{\mathcal{G}}(p; \alpha)$$
 (C.8)

$\chi_{\mathcal{G}}^{X_p}(\alpha)$ est homogène de degré $-DL(\mathcal{G}) - d(\mathcal{G}) + p$ dans les α .

APPENDICE D

GRAPHES AVEC COUPLAGES DERIVATIFS ET INSERTIONS DE MASSE.

On voit dans le § VII que l'introduction de contre termes nous conduit à considérer des graphes obtenus à partir des graphes de la théorie originale ϕ^4 par une ou plusieurs insertions de masse  ou de masse et de couplage dérivatif 

Nous rappelons ici quelques résultats sur les graphes avec couplages dérivatifs et généraliserons la décomposition effectuée dans le § VI.

a. Rappels.

Soit G un graphe possédant des couplages dérivatifs. La formule (I.3) se généralise en :

$$I_G(p) = \delta(\sum_i p_i) \int_0^{+\infty} \prod_{\alpha} d\alpha_{\alpha} e^{-\alpha_{\alpha} m_{\alpha}^2} Z_G(\alpha, p) \quad (D.1)$$

$Z_G(\alpha, p)$ est une fonction de α et de p vérifiant les propriétés (i), (ii) et (iii) du théorème (B.5).

Sous l'effet d'une dilatation $\alpha_a \rightarrow \rho^2 \alpha_a$ ($a \in \mathcal{G}$) relative à un sous graphe \mathcal{G} de G.

$$Z_G(\alpha) \longrightarrow \rho^{-D_L(\mathcal{G}) - d(\mathcal{G})} Z'_G(\alpha, \rho) \quad (D.2)$$

où $d(\mathcal{G})$ désigne le nombre de couplages en k contenus dans \mathcal{G} et où $Z'_G(\alpha, \rho)$ admet un développement de Taylor à tous les ordres en $\rho=0$.

Le degré superficiel de divergence d'un graphe \mathcal{G} est défini par

$$\omega(\mathcal{G}) = D_L(\mathcal{G}) - 2\ell(\mathcal{G}) + d(\mathcal{G}) \quad (D.3)$$

On a la condition de convergence

$$I_G(p) \text{ existe si } \sup_{\mathcal{G} \subseteq G} \omega(\mathcal{G}) < 0$$

Dans le cas du § VII, les graphes G_c obtenus à partir d'un graphe G de ϕ^4 sont, puisqu'on ajoute au plus, autant de couplages en k^2 que d'insertions de masse, tels que

$$\omega(G_c) \leq \omega(G) \quad \text{et} \quad \sup_{\mathcal{G} \subseteq G_c} \omega(\mathcal{G}) \leq \sup_{\mathcal{G} \subseteq G} \omega(\mathcal{G}) \quad (D.4)$$

Si on veut régulariser par Pauli Villars, il suffit d'introduire p lignes de cut-off au bout d'un ensemble de lignes de G_c correspondant à une ligne de G (c'est à dire de multiplier l'expression correspondante par $(m^2 - \Lambda^2/k^2 - \Lambda^2)^p$)

exemple

$$G = \begin{array}{c} m \\ \longrightarrow \end{array} \quad G_c = \begin{array}{c} m \quad m \quad m \quad m \\ \longrightarrow \quad \dashrightarrow \quad \dashrightarrow \quad | \end{array}$$

$$G_c^{\text{rég.}} = \begin{array}{c} m \quad m \quad m \quad m \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \\ \longrightarrow \quad \dashrightarrow \quad \dashrightarrow \quad | \quad | \quad | \end{array}$$

ceci correspond à la procédure de régularisation employée dans le §VII.

b. Comportement asymptotique des intégrales et extraction des pôles.

Avec les notations du § VI, à un graphe initial de ϕ^4 non régularisé G'_{in} correspond, après insertions de masse et adjonctions de couplages en k^2 , un graphe G' , auquel correspond après régularisation un graphe G .

Définissons comme pour les graphes scalaires

$$\Omega(G) = \sup_{\mathcal{G}_{\text{essentiell}} \subseteq G} \omega(\mathcal{G})$$

D'après (D.4) $\Omega(G) \leq \Omega(G_{in}^{\text{rég.}})$

L'amplitude de G s'écrit :

$$I_G(\Lambda) = (m^2 - \Lambda^2)^{\ell(G'_{in})P} \int \prod d\alpha_a d\alpha_{aj} d\alpha_{ai} \left[\dots \right. \quad (D.5)$$

$$\left. \dots e^{-ie^{i\epsilon} (\sum m_a^2 \alpha_a + m_a^2 \alpha_{aj} + \Lambda^2 \alpha_{ai})} \cdot Z_G(\alpha_a, \alpha_{aj}, \alpha_{ai}) \right]$$

les lignes de G'_{initial} sont indexées par a , les lignes supplémentaires correspondant à a dans G' par a_j et les lignes de cut-off par a_i .

Après transformation de Mellin et adjonction de l'opération R , on obtient un intégrand analogue à (V.7).

$$R \left[Z_G(\alpha_a, \alpha_{a_j}, \alpha_{a_i}) \left(\sum_{a_i} \alpha_{a_i} \right)^{x/2} \right]$$

La convergence de l'intégrale est assurée par l'opération R . Les mêmes arguments que dans le § V. permettent de réécrire l'intégrand

$$\left(\sum_{a_i} \alpha_{a_i} \right)^{x/2} \left[1 + \sum_{\substack{\mathcal{G} \text{ nest} \\ \text{d'essentiel} \\ \text{dans } G}} \prod_{\mathcal{G} \in \mathcal{G}} \left(-\zeta_{\mathcal{G}}^{-2\ell(\mathcal{G}) - \varepsilon'(x)} \right) \right] Z_G(\alpha_a, \alpha_{a_j}; \alpha_{a_i}) \quad (D.6)$$

D'après (D.2), dans la bande $\Omega(G) - 2n < \text{Re } x < \Omega(G) - 2n + 2$, seuls contribuent les graphes \mathcal{G} tels que

$$\omega(\mathcal{G}) - \Omega(G) + 2n > 0$$

Si $\text{Re } x > \Omega(G)$, l'action de R est réduite à l'identité et l'intégrale est convergente. Le premier pôle est en $x = \Omega(G)$ et on a le même comportement asymptotique

$$I_G(\Lambda) \sim \Lambda^{-\Omega(G) + \ell(G'_{\text{in}})P + \eta} \quad \eta > 0 \text{ arbitraire}$$

quand $\Lambda \rightarrow +\infty$

Ceci constitue plutôt une démonstration à posteriori, la connaissance du comportement asymptotique est nécessaire pour justifier la transformation de Mellin. Les raisonnements du § IV restent parfaitement valables.

c. Extraction des parties divergentes.

Toutes les opérations effectuées dans le § VI se généralisent sans problème. Nous rappelons sans démonstrations la procédure en insistant seulement sur les différences avec le § VI.

Les mêmes raisonnements montrent que l'intégrale

$$I_G^n(\Lambda) = (m^2 - \Lambda^2)^{\ell(G'_{in})p} \int_0^{+\infty} \prod d\alpha_a d\alpha_j d\alpha_i e^{-i\epsilon^{ve} (\sum \alpha_a m_a^2 + \alpha_j m_j^2 + \alpha_i \Lambda^2)} \dots R^n Z_G(\alpha_a, \alpha_j, \alpha_i) \quad (D.7)$$

où R^n est défini par (VI.6), est définie et se comporte en :

$$I_G^n(\Lambda) \sim \Lambda^{-\Omega - 2n + 2\ell p} \quad \text{quand } \Lambda \rightarrow +\infty \quad (D.8)$$

En particulier :

$$I_G^0(\Lambda) = I_G(\Lambda) \quad (D.9)$$

D'après l'appendice C, la formule (VI.11) reste valable, ainsi que la factorisation de R' et on obtient l'analogie de (VI.20)

$$[R^n - R^{n+1}] Z_G(p, \alpha) = \sum_{\substack{\mathcal{G} \in G \\ \text{essentiels}}} R y_{[\mathcal{G}/\mathcal{G}]_{\chi_{p_x}, n_a, m_b}}(\alpha, p) \prod_x R' y_{\tilde{\mathcal{G}}_x}^{\chi_p}(\alpha) \dots \dots \prod_{D_a} R' \frac{(i\epsilon^{-ve} \sum_{a \in D_a} \alpha_a)^{n_a - d_a}}{(n_a - d_a)!} \prod_{D_b} R' \frac{(i\epsilon^{ve} \sum_i \alpha_{b_i})^{m_b}}{m_b!} \quad (D.10)$$

où \mathcal{G} est un sous graphe essentiel de G et se décompose en

- parties connexes une particule irréductibles $\tilde{\mathcal{G}}_x$
- ensemble de lignes de cut-off et de lignes de masse correspondant

à une ligne donné a de $G'_{in} : D_a$

- ensembles de lignes de cut-off ne correspondant à aucune ligne de $\mathcal{G} : D_b$

d_a désigne le nombre de couplages dérivatifs de D_a .

χ_{p_x} désigne un choix arbitraire d'impulsions externes aux $\tilde{\mathcal{G}}_x$ comme dans le § VI.

La sommation est entendue sur tous les $\{\chi_{p_x}, n_a, m_b\}$ positifs tels que

$$\sum_x p_x + 2 \sum_a n_a + 2 \sum_b m_b = \omega(\mathcal{G}) - \Omega(G) + 2n \quad (D.11)$$

Le même raisonnement que dans § VII montre que :

$$R' \left(\sum_{j \in \mathcal{D}_a} \alpha_{a_j} \right)^{n_a - c_a} = 0 \tag{D.12}$$

$$R' \left(\sum_i \alpha_{b_i} \right)^{m_b} = \left(\sum_i \alpha_{b_i} \right)^{m_b} \tag{D.13}$$

Après intégration, on retrouve (VI.21)

$$\begin{aligned} I_G^n(p, \Lambda) - I_G^{n+1}(p, \Lambda) &= \sum_{\{\mathcal{G}'_x\}} \prod_x I_{\mathcal{G}'_x}^{\chi_{p_x}} R'(\Lambda) \prod_b \left[\frac{C(m_b, p)}{\Lambda^{2m_b}} \left(1 - \frac{m^2}{\Lambda^2} \right)^p \right] \dots \\ &\quad \text{connexes une-particule-irred.} \\ &\dots I_{[G/\mathcal{G}]}^R(p)_{\chi_{p_x}, m_b} \end{aligned} \tag{D.14}$$

$I_{\mathcal{G}'_x}^{\chi_{p_x} R'}(\Lambda)$ est défini comme dans le § VI et se comporte en $\Lambda^{\omega(\mathcal{G}'_x) - p_x + \eta}$ quand $\Lambda \rightarrow +\infty$, $\eta > 0$

p_x et m_b sont positifs et vérifient (D.11).

Après resommation sur n jusqu'à l'ordre M , on obtient l'analogue de (VI.25)

$$I_G^r(p, \Lambda) = \sum_{\{\mathcal{G}'_x, \chi_{p_x}\}} \left(\prod_x I_{\mathcal{G}'_x}^{\chi_{p_x}} R'(\Lambda) \right) Y_{[G/\mathcal{G}]}^M(p, \Lambda) + O(\Lambda^{-2l-2M-2}) \tag{D.15}$$

$Y_{[G/\mathcal{G}]}^M$ est défini par (VI.23) et tend vers $I_{[G/\mathcal{G}]}^R$ quand $\Lambda \rightarrow +\infty$

REMARQUES

. Les \mathcal{G}'_x , inclus dans G' et connexes une particules irréductible, sont déduits des graphes connexes I.P.I. de G'_{in} par les insertions de masses, de couplages et de cut-off correspondantes dans G .

• $[G/g]_{\chi_p}$

possède des couplages dérivatifs sur des vertex à deux
pattes $\rightarrow \rightarrow$ provenant de ceux de G et p_x couplages
dérivatifs sur des lignes correspondant à la dérivation
par rapport au graphe contracté .



REFERENCES

1. M.C. Bergère et J.B. Zuber, Commun. Math. Phys. 35, 113 (1974).
2. M.C. Bergère et Y.M.P. Lam, Bogolioubov Parasiuk theorem in the α -parametric representation. J. Math. Phys., 17,8, Aug. 1976.
3. M.C. Bergère et Y.M.P. Lam, "Asymptotic Expansion of Feynman Amplitudes Part. II : the divergence case" Freie Universitat Berlin, H.E.P. May 74/9 (unpublished).
4. Bogolioubov, N.N. et O.S. Parasiuk : Acta Math. 97, 227 (1957).
5. K. Hepp, Commun. Math. Phys. 2, 301-326 (1966).
6. W. Zimmermann, Ann. Phys. (N.Y.) 77, 536 (1973).
7. C. Itzykson, J.B. Zuber, Electrodynamique et théorie quantique des champs Notes de cours Orsay 1974-75.
8. Bogolioubov et Shirkov. Introduction to the Theory of Quantized Fields (Interscience, New York, 1959).
9. W. Pauli, and F. Villars, Revs. Modern Phys., 21, 434 (1949).