- Loi du temps local à l'origine.
- Généralisation à une diffusion quelconque.
- Comportement asymptotique dans le cas récurrent.
- Fonction de grande déviation.
- Cas transcient.
- Inverse du temps local.
- Subordinateurs et mesures de Lévy.
- Théorème de Ray-Knight et oscillateur harmonique en dimension 2.
- Interactions ponctuelles et champs gaussiens.

Généralisation à une diffusion quelconque

a) Rappel : le processus $X(t)$ solution de l'équation de Langevin

$$\dot{x} = F(x) + \eta(t) = -\frac{\partial U}{\partial x} + \eta(t)$$

où $E[\eta(t)\eta(t')] = \delta(t-t')$

a pour probabilité de transition $P(x\,t \mid y\,0) = P_t(x,y)$

où P est solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(F(x)P\right) \\ \lim\limits_{t\to 0} P_t(x,y) = \delta(x-y) \end{cases}$$

Posant $P(x\,t \mid y\,0) = e^{-U(x)}\psi(x,t)$

on vérifie que $\psi(x,t)$ est solution de

$$-\frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$$

où $\hat{H} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{dU}{dx}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{d^2U}{dx^2}$

Par conséquent, on peut représenter $P(x\,t \mid y\,0)$ en terme des fonctions propres et états propres de $\hat{H}$

$$P(x\,t \mid y\,0) = \exp -\left(U(x) - U(y)\right) \langle x | e^{-t\hat{H}} | y \rangle$$

S'il existe un état d'équilibre, l'état fondamental $\hat{H}\psi_0 = 0$

$\psi_0(x) = e^{-U(x)}$ est un état d'énergie nulle

et $P(x\,t \mid y\,0) \xrightarrow[t\to\infty]{} e^{-2U(x)} = \psi_0^2(x)$

b) <u>Conséquence</u> : en utilisant Feynman-Kac on peut exprimer une fonctionnelle quelconque du processus sous forme spectrale

$$Q_p(x,t) = E_x \, e^{-p\int_0^t V[x(\tau)]\,d\tau}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dy \; e^{-[U(y)-U(x)]} \langle y | e^{-t(\hat{H}+V)} | x \rangle$$

<u>Exercice</u> : vérifier que $Q_p(x,t)$ est solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial t} = g\, Q - p\, V(x)\, Q \\ Q(x,0) = 1 \end{cases}$$

où $g = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + F(x)\frac{d}{dx}$ est le générateur du processus.

Plutôt que de travailler avec le générateur, il est tout aussi commode de travailler avec $\hat{H}$.

<u>Application</u> : désignons par $\mathcal{T}(t)$ le temps local à l'origine de la diffusion $X(t)$

$$\mathcal{T}(t) = \int_0^t \delta[X(\tau)]\,d\tau$$

Cette variable aléatoire admet une densité $P(T,t)\,dT = \text{Prob}[\mathcal{T}(t) \in dT]$ dont la transformée de laplace <u>en t</u> s'écrit

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-\alpha t} P(T,t)\,dt = \frac{1}{\alpha \hat{G}_\alpha(0,0)} \, e^{-\frac{T}{\hat{G}_\alpha(0,0)}}}$$

$\hat{G}_\alpha(0,0)$ est l'élément de matrice de la résolvante

$$\hat{G}_\alpha(0,0) = \langle 0 | \frac{1}{\hat{H}+\alpha} | 0 \rangle$$

Cette jolie formule qui généralise le cas du brownien ordinaire exhibe le lien entre le temps local et les propriétés spectrales de $\hat{H}$

c) <u>Cas d'une diffusion récurrente</u>

S'il existe un état d'équilibre, la diffusion est récurrente et la convergence du temps local est contrôlée par l'état fondamental de $\hat{H}$.

En séparant l'état fondamental du reste du spectre on obtient

$$\hat{G}_\alpha(0,0) = \sum_n \frac{\psi_n^2(0)}{E_n+\alpha} = \frac{\psi_0^2(0)}{\alpha} + \sum_{n\neq 0} \frac{\psi_n^2(0)}{E_n+\alpha}$$

On vérifie que

$$P(T,t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \delta\left(T - t\,\psi_0^2(0)\right)$$

Cette formule traduit l'ergodicité du processus. La fraction du temps passé à l'origine est reliée à la mesure d'équilibre. En effet

$$\psi_0^2(x) = \frac{e^{-2U(x)}}{\int dy\, e^{-2U(y)}}$$

Pour aller plus loin et étudier la convergence vers l'équilibre, procédons d'abord de manière heuristique en utilisant la théorie des perturbations. On retrouvera ainsi un comportement de type limite centrale.

Ensuite nous partirons de la formule générale et calculerons explicitement la fonction de grande déviation

$$P(T,t) \xrightarrow[t\to\infty]{} e^{-t\,\phi\left(\frac{T}{t}\right)}$$

<u>Régime de la limite centrale</u>

$$Q_p(x,t) = \int dy\ \frac{\psi_0(y)}{\psi_0(x)} \langle y | e^{-t(\hat{H}+V)} | x \rangle$$

théorie des perturbations avec $V = p\delta(x)$

$$\langle y | e^{-t(\hat{H}+V)} | x \rangle \sim e^{-t\,E(p)}$$

$$E(p) = E_0(p) + p\langle \psi_0 | \delta | \psi_0 \rangle + \frac{p^2}{2}\sum_n \frac{|\langle \psi_0 | \delta | \psi_n \rangle|^2}{E_0 - E_n}$$

$\exists$ état équilibre $\Rightarrow E_0 = 0$

Donc

$$E(p) = p\,\psi_0^2(0) + \frac{p^2}{2}\sum_n \frac{\psi_0^2(0)\,\psi_n^2(0)}{E_0 - E_n}$$

de la forme

$$E(p) = ap - \frac{bp^2}{2}$$

A cet ordre on obtient

$$Q_p(x,t) = \mathbb{E}\, e^{-p\,T(t)} = e^{-t\left[ap - \frac{bp^2}{2}\right]}$$

Par conséquent

$$\frac{T(t) - at}{\sqrt{bt}} \longrightarrow N(0,1)$$

ou encore $\quad P(T,t) = e^{-t\,\phi\left(\frac{T}{t}\right)}$

avec $\quad \phi(r) = \frac{1}{2b}(r-a)^2$

Grandes déviations, généralités

Dans le cas élémentaire de variables i.i.d d'espérance $E(X) = 0$, la loi faible des grands nombres affirme que $\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ converge en probabilité

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \text{Prob}\left[\frac{S_n}{n} > \epsilon\right] = 0$$

Pour préciser cette convergence on dispose du théorème de la limite centrale

$$\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \rightarrow X \text{ de densité } N(0,1)$$

Donc

$$P(S_n > \sqrt{n}\,\sigma a) \sim 1 - \phi(a) = 1 - \int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2} dx$$

L'événement $S_n > n\epsilon$ est une grande déviation.

On montre que $\quad P(S_n > na) \sim e^{-n\varphi(a)}$

où $\varphi(a)$ s'appelle la fonction de grande déviation.

Calcul de $\varphi(a)$ dans le cas i.i.d : rappel

Soit X une v.a positive et $a>0$. Nous allons utiliser l'inégalité de Markov

$$\text{Prob}[X>a] \leq \frac{1}{a}\mathbb{E}(X)$$

Soit $S_n = X_1+\cdots+X_n$ et $\lambda>0$

$$\text{Prob}[S_n > na] = \text{Prob}[e^{\lambda S_n} > e^{\lambda n a}]$$

$$\leq e^{-\lambda n a}\,\mathbb{E}(e^{\lambda S_n}) = e^{-\lambda n a}\,\varphi(\lambda)^n$$

où $\varphi(\lambda) = \mathbb{E}(e^{\lambda X})$

Par conséquent

$$-\frac{1}{n}\log \text{Prob}[S_n > na] \geq \lambda a - \log\varphi(\lambda)$$

$$\geq \sup_\lambda(\lambda a - \log\varphi(\lambda))$$

La théorie des grandes déviations permet d'obtenir une minoration et donc, sous certaines conditions une égalité. Par conséquent

$$\text{Prob}[S_n > na] \sim e^{-nf(a)}$$

où $f(a) = \sup_\lambda[\lambda a - \log\varphi(\lambda)]$

La fonction de grande déviation est la transformée de legendre de la fonction convexe $\log\varphi(\lambda)$.

Fonction de grande déviation dans le cas récurrent

Hypothèse : $P(T,t) \sim e^{-t\,\phi\left(\frac{T}{t}\right)}$ pour $\begin{matrix} T \to \infty \\ t \to \infty \end{matrix}$ et $\frac{T}{t}$ fixé

La formule générale devient

$$\int_0^\infty dt\; e^{-\alpha t - t\phi\left(\frac{T}{t}\right)} = \frac{1}{\alpha \hat{G}_\alpha(0,0)}\, e^{-\frac{T}{\hat{G}_\alpha(0,0)}}$$

Posons $\lambda(\alpha) = \frac{1}{\hat{G}_\alpha(0,0)}$ et $\frac{T}{t} = x$

$$\int \frac{dx}{x^2}\, e^{-(\alpha t + t\phi(x))} = \int \frac{dx}{x^2}\, e^{-T\left(\frac{\alpha}{x} + \frac{\phi(x)}{x}\right)}$$

la méthode de laplace donne

$$\min_x \left(\frac{\alpha}{x} + \frac{\phi(x)}{x}\right) = \lambda(\alpha)$$

Par conséquent

$$\boxed{\phi(x) = x \max_\alpha \left[\lambda(\alpha) - \frac{\alpha}{x}\right]}$$

exemples solubles

1) $\begin{cases} F(x) = -\mu \,\mathrm{sign}\, x \\ U(x) = \mu |x| \end{cases}$

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\mu^2}{2} - \mu\,\delta(x)$$

On trouve

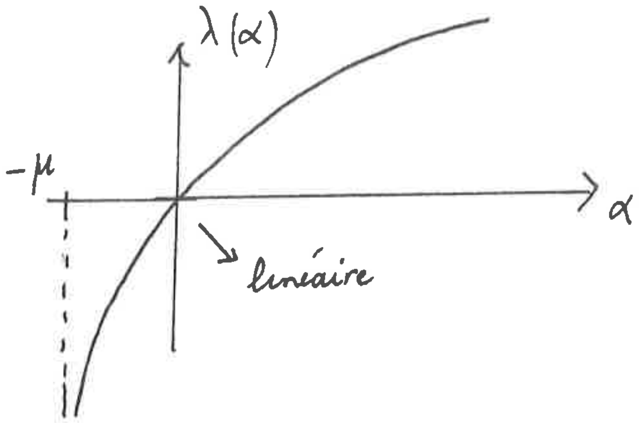
$$\lambda(\alpha) = \sqrt{\mu^2 + 2\alpha} - \mu$$

d'où $\phi(x) = \frac{1}{2}(x-\mu)^2$

2) $F(x) = -\mu x$

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\mu^2 x^2}{2} - \frac{\mu}{2}$$

$$\lambda(\alpha) = 2\sqrt{\mu}\ \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2\mu}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2\mu}\right)}$$



① $\begin{cases} \lambda(\alpha) \sim \sqrt{2\alpha} \\ \alpha \to \infty \end{cases}$

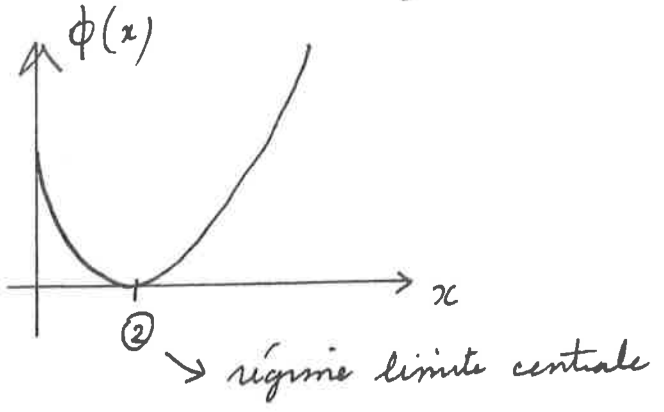
② $\begin{cases} \lambda(\alpha) \sim \sqrt{\frac{\pi}{\mu}}\left(\alpha - \log 2 - \frac{\alpha^2}{\mu}\right) \\ \alpha \to 0 \end{cases}$

③ $\begin{cases} \lambda(\alpha) \sim \dfrac{-\sqrt{\frac{4\mu^3}{\pi}}}{\mu+\alpha} \\ \alpha \to -\mu^+ \end{cases}$

① $\Rightarrow \ \phi(x) = \frac{x^2}{2}$
$x \to \infty$

③ $\Rightarrow \ \phi(x) = \mu - 2\left(\sqrt{\frac{4\mu^3}{\pi}}\right)^{1/4}\sqrt{x}$
$x \to 0$

② $\Rightarrow \phi(x) = \frac{\pi}{4\log 2}\left(x - \sqrt{\frac{\mu}{2}}\right)^2$



3) Cas général d'un potentiel pair)

$$\lambda(\alpha) = C \prod_n \frac{\left(1+\frac{\alpha}{E_n^+}\right)}{\left(1+\frac{\alpha}{E_n^-}\right)}$$

Inverse du temps local

le temps local au niveau $x = a$

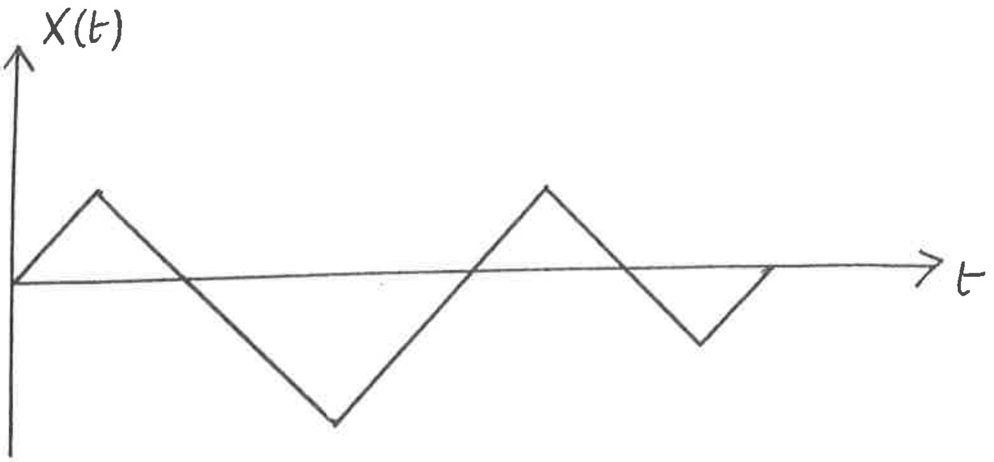
$$\mathcal{T}_a(t) = \int_0^t \delta\left[x(\tau) - a\right] d\tau$$

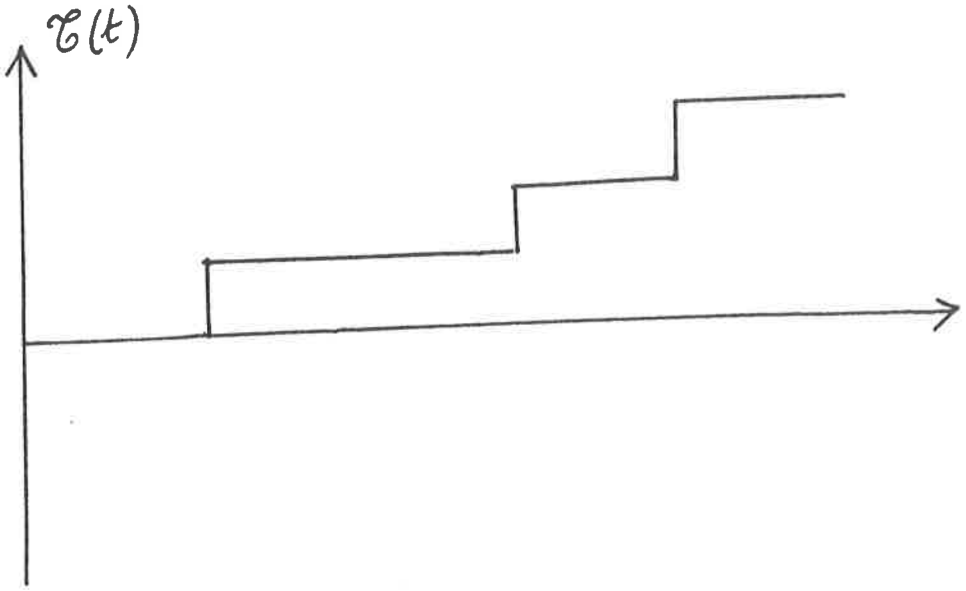
est l'intégrale d'une mesure aléatoire dont le support coïncide avec l'ensemble des visites du point a. C'est une fonction continue non décroissante dont les trajectoires sont celles de la fonction $M(t) = \max\limits_{0<\tau<t}\left[x(\tau)\right]$.

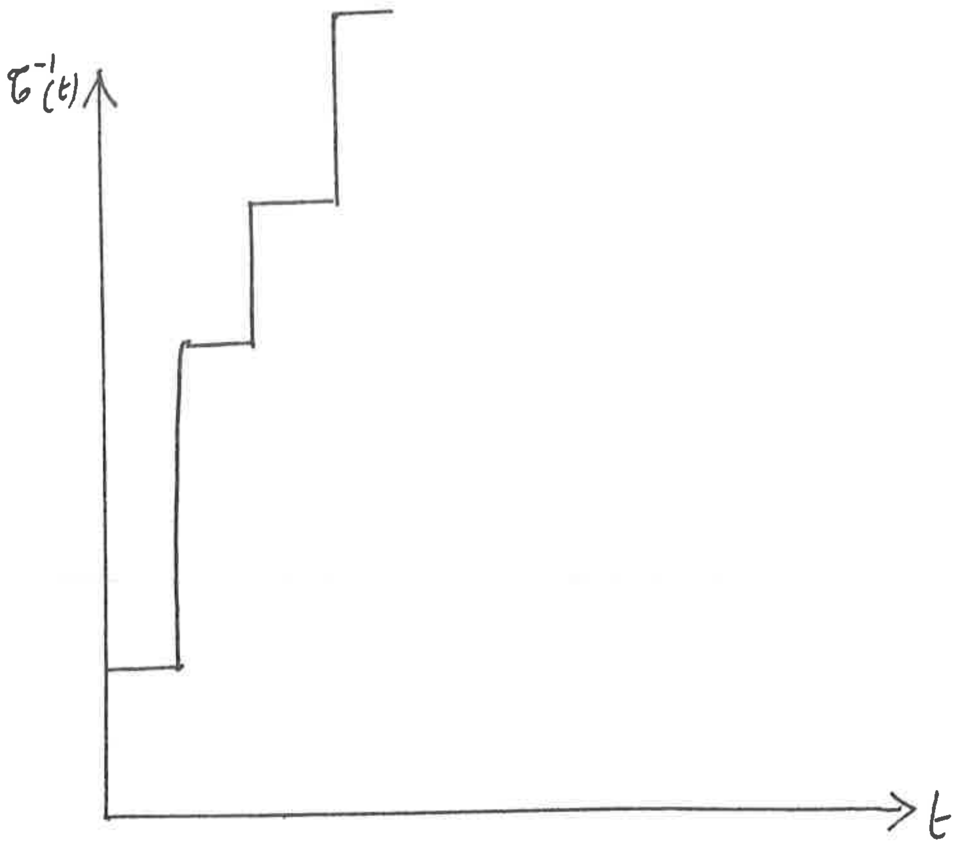
On peut définir la fonction inverse $\mathcal{T}_a^{-1}(t)$

$$\mathcal{T}_a^{-1}(t) = \inf\left[s > 0 \quad \mathcal{T}_a(s) > t\right]$$

$\mathcal{T}_a^{-1}(t)$ s'appelle l'inverse du temps local. Il mesure le temps qu'il faut attendre avant que le temps local n'atteigne un certain niveau. Cette fonction présente des sauts dont la hauteur est égale à la longueur des excursions comme le suggère le schéma suivant.


X(t)
t


τ(t)


τ⁻¹(t)
t

On montre que $T_a^{-1}(t)$ est un processus à accroissements indépendants et stationnaires dont la transformée de laplace s'écrit

$$\mathbb{E}\left(e^{-\alpha T_a^{-1}(t)}\right) = e^{-\frac{t}{G_\alpha(a,a)}}$$

où $G_\alpha(x,y) = \langle x | \frac{1}{\hat{H}+\alpha} | y \rangle$ est la fonction de Green

$T_a^{-1}(t)$ est un subordinateur

<u>Définition</u> : un subordinateur $Y(t)$ est un processus à accroissements indépendants et stationnaires dont les trajectoires sont continues à droite et non décroissantes

$$Y(t+h) - Y(t) \stackrel{\ell}{=} Y(h)$$

$Y(t_3) - Y(t_2)$ et $Y(t_1) - Y(t_0)$ sont indépendants

si $t_3 > t_2 \geq t_1 > t_0$

L'exposant de laplace d'un subordinateur $Y(t)$ est donné par la formule de levy Khintchine

$$\mathbb{E}\, e^{-\alpha Y(t)} = e^{-t\left[m\alpha + \int_0^\infty (1-e^{-\alpha s})\, d\mu(s)\right]}$$

$$\phi(\alpha) = m\alpha + \int_0^\infty (1-e^{-\alpha s})\, d\mu(s)$$

est l'exposant de laplace.

Exemples élémentaires

1) le processus de Poisson $N(t)$

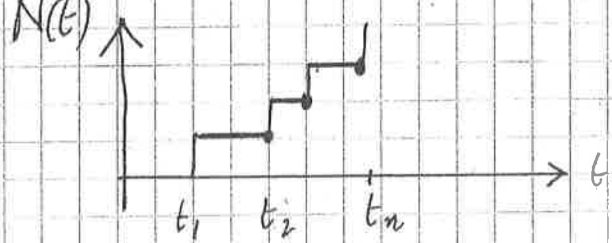
On considère une séquence de v.a T_i de loi exponentielle $P(T_i \in dt) = \lambda e^{-\lambda t} dt$

et l'on pose $t_0 = 0$ $\quad t_n = \sum_{i=1}^{n} T_i \quad n \geq 1$

le potentiel $V(t) = \sum_n \delta(t - t_n)$ décrit un modèle de Kronig Penney avec des impuretés aléatoires de loi exponentielle.

le processus $N(t) = \int_0^t V(\tau)\, d\tau$ <u>compte</u> le nombre d'impuretés dans l'intervalle $[0, t]$

$$N(t) = \max\{n, t_n \leq t\}$$



le calcul donne $\quad P[N(t) = n] = e^{-\lambda t} \dfrac{(\lambda t)^n}{n!}$

Fonction génératrice $\quad E\left(e^{-\alpha N(t)}\right) = e^{-\lambda t [1 - e^{-\alpha}]}$

2) Considérons le modèle gl de Kronig Penney

$V(t) = \sum v_n \delta(t - t_n)$ où les v_n sont i.i.d de loi f

$Y(t) = \int_0^t V(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} v_k$ est un processus de Poisson composé. On trouve

$$E\left(e^{-\alpha Y(t)}\right) = e^{-\lambda t \int (1 - e^{-\alpha v}) f(v)\, dv}$$

3) Inverse du temps local brownien

Montrons que $T_0^{-1}(t)$ est un subordinateur.

Partons de l'expression de la fonction de green libre

$$\lambda(\alpha) = \frac{1}{G_\alpha(x,x)} = \frac{1}{2}\left[\frac{u_-'(x)}{u_-(x)} - \frac{u_+'(x)}{u_+(x)}\right]$$

où $u_+(x)$ et $u_-(x)$ sont les solutions récessives en $+\infty$ et $-\infty$ de l'équation

$(\hat{H}+\alpha)\,u = 0$ soit

$$\left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}+\alpha\right)u(x) = 0$$

On trouve $u_+(x) = e^{-x\sqrt{2\alpha}}$

$u_-(x) = e^{x\sqrt{2\alpha}}$

Par conséquent

$$\frac{1}{G_\alpha(x,x)} = \sqrt{2\alpha}$$

On en déduit la mesure de levy $\mu(s)$

$$\sqrt{2\alpha} = \int_0^\infty \left(1-e^{-\alpha s}\right) d\mu(s)$$

où $d\mu(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{s^{3/2}}$

$$\mu[s,\infty[= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{s}}$$

Conclusion : $T_0^{-1}(t)$ est un subordinateur dont les sauts correspondent à la durée des excursions.

On en déduit que le nombre N d'excursions de durée $\geqslant s$ jusqu'au temps t est donné par la distribution de Poisson

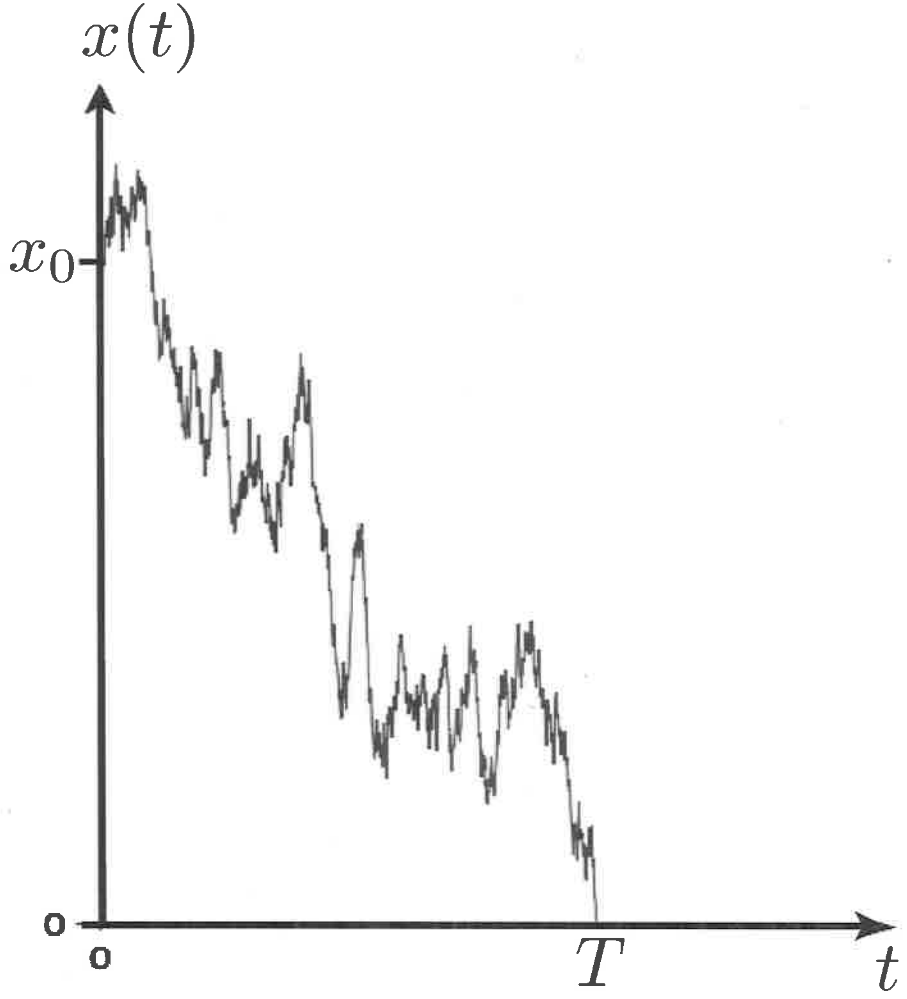
$$P(N = n) = e^{-t\mu[s,\infty[} \frac{(t\mu[s,\infty[)^n}{n!}$$

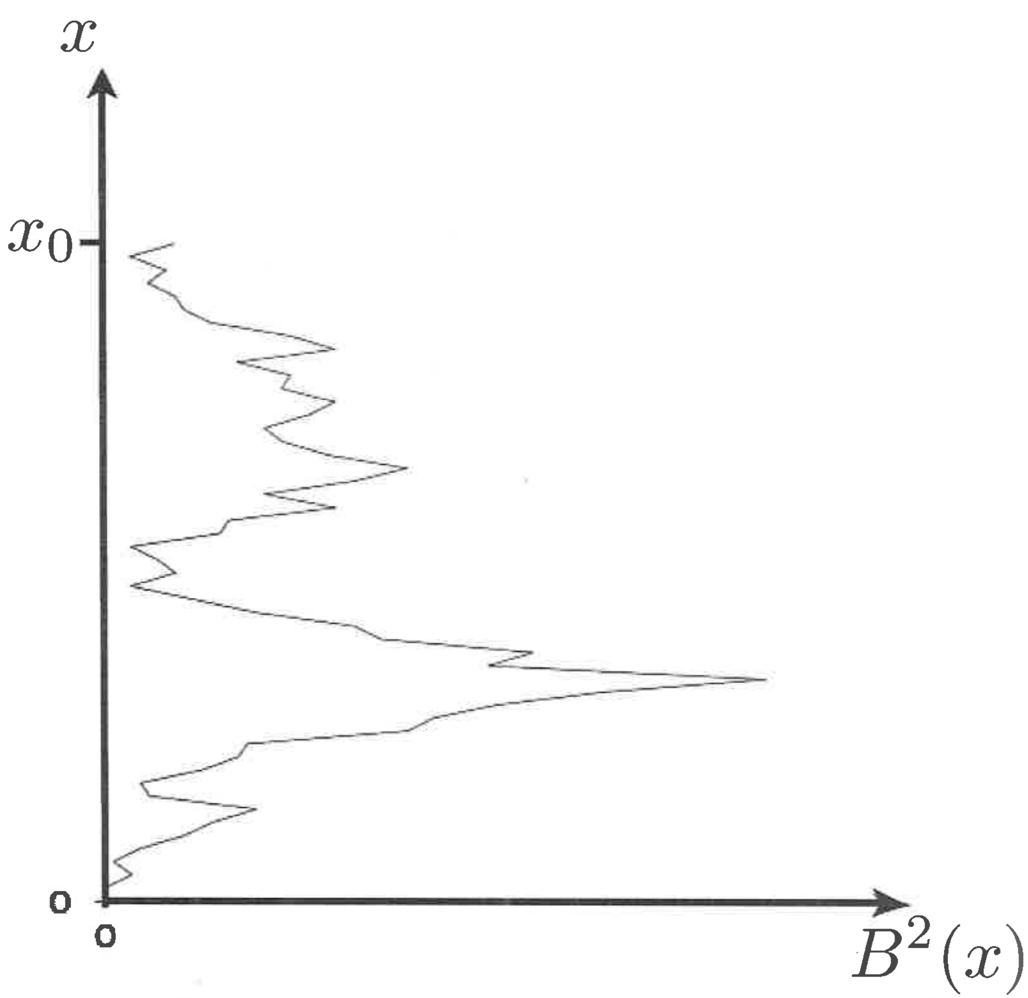
le nombre moyen d'excursions de longueur $\geqslant s$ dans l'intervalle $[0,t[$ est

$$t\mu[s,\infty[= t\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{s}}$$

Il y a donc une infinité de petits sauts puisque $\mu[0,\infty[= \infty$.

Ray-Knight theorem





$$B^2(x) = B_1^2(x) + B_2^2(x)$$

Théorème de Ray-Knight et oscillateur harmonique

Théorème : Soit $X(t)$ un brownien issu de $a>0$ et arrêté au premier temps de passage en $x=0$

$$\tau_0 = \inf(t \geq 0, X(t)=0)$$

le processus

$$T_x(\tau_0) = \int_0^{\tau_0} \delta[X(\tau)-x]\, d\tau \qquad 0 \leq x \leq a$$

a même loi que $B_1^2(x)+B_2^2(x)$ où B_1, B_2 sont deux browniens issus de 0

Voir dessin de Peres (fig 6.5 p 170)

Avant d'en donner une preuve nous pouvons utiliser FK pour étudier certaines lois marginales

Lois marginales

Considérons $T_x(\tau_0)$ que nous noterons désormais $T(x)$.

La transformée de Laplace

$$Q(a) = E_a\left(e^{-p\,T(x)}\right)$$

satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{1}{2}\frac{d^2Q}{da^2} - p\,\delta(x-a)\,Q(a) = 0$$

avec condition aux limites $Q(0)=1$

Solution

$$Q(a) = 1 - \frac{2pa}{2px+1} \quad 0 < a < x$$

$$= \frac{1}{1+2px} \quad 0 < x < a$$

On vérifie que pour $0 < x < a$

$$Q(a) = E_0 \left(e^{-p\left[B_1^2(x) + B_2^2(x)\right]} \right)$$

On en déduit que $T(x)$ a pour densité

$0 < x < a \qquad P(T) = \frac{1}{2x} e^{-\frac{T}{2x}}$

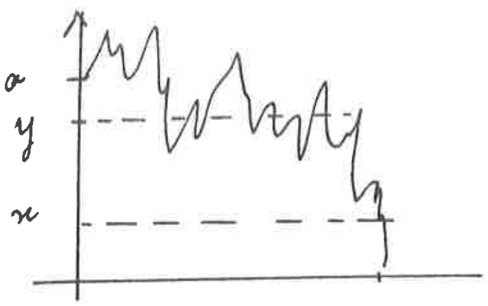
$x > a \qquad P(T) = \left(\frac{x-a}{x}\right)\delta(T) + \frac{a}{2x^2} e^{-\frac{T}{2x}}$

On peut reprendre le même exercice en étudiant la loi jointe du couple $T(x)$/ $T(y)$

pour $0 < x < y$

$$T(x) = \int_0^{\tau_0} \delta[x(\tau) - x]\, d\tau$$

$$T(y) = \int_0^{\tau_0} \delta[x(\tau) - y]\, d\tau$$



Cette fois ci il faut résoudre

$$\frac{1}{2}\frac{d^2Q}{da^2} - \left[p\,\delta(a-x) + q\,\delta(a-y)\right] Q = 0$$

avec $Q(0) = 1$

On trouve

$$Q(a) = \frac{1}{1+2(px+qy)+4x(y-x)pq}$$

On montre que

$$Q(a) = E_a\left(e^{-pT(x)-qT(y)}\right) = E_0\left(e^{-pW(x)-qW(y)}\right)$$

où $W(x) = B_1^2(x) + B_2^2(x)$

<u>Remarque</u> : dans la littérature probabiliste on montre que

$W(t) = B_1^2 + \dots + B_n^2(t)$

où les $B_i(t)$ sont des browniens standards

est un processus de diffusion de générateur

$$G_W = 2x \frac{d^2}{dx^2} + n \frac{d}{dx}$$

et $Y(t) = \sqrt{B_1^2 + \dots + B_n^2}$ a pour générateur

$$G_Y = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dy^2} + \frac{n-1}{2y}\frac{d}{dy} = \frac{1}{2}\Delta_n \leftarrow \text{partie radiale du laplacien en dim } n$$

$Y(t)$ est un processus de Bessel de dimension n

$\nu = \frac{n}{2} - 1$ est l'indice du processus de Bessel

Dans notre cas $n = 2$, donc $W(t) = Y^2(t)$

est le carré d'un processus de Bessel d'indice $\nu = 0$

<u>Preuve</u> on veut montrer que $\forall \cancel{x} \in [0, a]$

$$T(\cancel{s}) = T_{\cancel{x}}(\tau_0) \equiv B_1^2(\cancel{s}) + B_2^2(s)$$

pour cela on montre que $\forall V(s)$ ~~[0, a]~~

$$\int_0^a ds\, V(s)\, T(s) \stackrel{\ell}{=} \int_0^a V(s)\left[x_1^2(s) + x_2^2(s)\right] ds$$

Pour prouver cette identité on prouvera que $\forall V$

$$E_a\, e^{-\int_0^a V(s) T(s)\, ds} = E_0\, e^{-\int_0^a V(s)\left[x_1^2(s) + x_2^2(s)\right] ds}$$

le membre de gauche peut encore s'écrire

$$\int_0^a ds\, V(s) \cdot \int_0^{T_0} \delta\left[x(\tau) - s\right] d\tau = \int_0^{T_0} V\left[x(\tau)\right] d\tau$$

Il faut donc prouver que

$$E_a\, e^{-\int_0^{\tau_0} V[x(\tau)]\, d\tau} = E_0\, e^{-\int_0^a V(s)\,[x_1^2(s)+x_2^2(s)]\,ds}$$

Posons $\quad Q(x) = E_x\, e^{-\int_0^{\tau_0} V[x(\tau)]\,d\tau} \qquad 0<x<a$

$Q(x)$ est solution de

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2Q}{dx^2} - V(x)\,Q = 0 \\ \text{avec } Q(0) = 1 \qquad Q'(a) = 0 \end{cases}$$

le membre de droite est une fonctionnelle quadratique faisant intervenir deux browniens independants issus de 0. Dans le langage de la mécanique quantique on a 2 oscillateurs harmoniques de fréquence arbitraire.

Pour 1 oscillateur on définit

$$K(x,y,t) = \int_{x(0)=x}^{x(t)=y} \mathcal{D}x(\tau)\, e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \dot{x}^2(\tau) - \int_0^t V(\tau)\,x^2(\tau)\,d\tau}$$

on peut calculer K par une méthode semi-classique

$$K = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\left|\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial y}\right|}\ \exp - S_{cl}$$

où $\quad S_{cl} = \int_0^t \left[\frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(\tau)\,x^2\right] d\tau$

l'éq. du mvt $\quad \ddot{x} = +2\,x\,V(\tau)$

[est identique à l'éq $\quad \frac{1}{2}\frac{d^2Q}{dx^2} = V\,Q$]

$\exists$ 2 solutions independantes $\quad \varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$

Soient $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ deux solutions indépendantes de

$$\frac{1}{2}\frac{d^2Q}{dx^2} - V(x)\,Q(x) = 0$$

telles que $\begin{cases} \varphi_1(0) = 1 \\ \varphi_1'(0) = 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \varphi_2(0) = 0 \\ \varphi_2'(0) = 1 \end{cases}$

Posons $Q(x) = \alpha\,\varphi_1(x) + \beta\,\varphi_2(x)$

Conditions aux limites $Q(0) = 1 \quad Q'(a) = 0$

On en déduit

$$Q(x) = \varphi_1(x) - \frac{\varphi_1'(a)}{\varphi_2'(a)}\,\varphi_2(x)$$

Par conséquent

$$Q(a) = \frac{1}{\varphi_2'(a)}$$

Considérons maintenant le membre de droite

$$E_0\, e^{-\int_0^a V(\tau)\left(x_1^2(\tau) + x_2^2(\tau)\right)}$$

Nous le calculons par Feynman Kac

Considérons l'espérance conditionnelle

$$I(x,t) = E_0\left\{ e^{-\int_0^t V(\tau)\,x^2(\tau)}\,;\; x(t) = x \right\}$$

où $x(\tau)$ est un brownien issu de 0

$I(x,t)$ est solution de

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - x^2 V(t)\, I(x,t)$$

Cherchons la solution sous la forme

$$I(x,t) = A(t)\, e^{-\frac{1}{2} B(t) x^2}$$

On vérifie que $A(t)$, $B(t)$ satisfont

$$\begin{cases} \dfrac{\dot A}{A} = -\dfrac{B}{2} \\ \dot B = -B^2 + 2V(t) \end{cases}$$

Posons $B(t) = \dfrac{\dot u(t)}{u(t)}$

On obtient

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\ddot u(t) - V(t)\, u(t) = 0 \\ A(t) = \dfrac{\lambda}{\sqrt{u(t)}} \end{cases}$$

En intégrant $I(x,t)$ sur le point final on en déduit

$$E_0\, e^{-\int_0^t V(\tau) x^2(\tau)\, d\tau} = \int_{-\infty}^{+\infty} I(x,t)\, dx = A \sqrt{\frac{2\pi}{B}}$$

$$= \frac{\lambda\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\dot u(t)}}$$

Par conséquent pour deux browniens indépendants on obtient

$$E_0\, e^{-\int_0^a V(\tau)\left[x_1^2(\tau) + x_2^2(\tau)\right] d\tau} = \frac{2\pi\lambda^2}{\dot u(a)}$$

On détermine la constante d'intégration λ en considérant la limite de $I(x,t)$ pour $t \to 0$

$I(x,t)$ tend vers le propagateur libre

$$I(x,t) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \, e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

par conséquent $A(t) \sim \dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}}$

Donc $\begin{cases} u(t) \sim t \\ \lambda = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \end{cases}$

$u(t)$ correspond donc ~~k~~ à la solution $\varphi_2(t)$

$$E_0 \, e^{-\int_0^a V(\tau)\,[x_1^2(\tau) + x_2^2(\tau)]\, d\tau} = \frac{1}{\varphi_2'(a)}$$

On a donc prouvé que

$$Q(a) = E_0 \, e^{-\int_0^a d\tau\, V(\tau)\,[x_1^2(\tau) + x_2^2(\tau)]}$$