- Fonctionnelles arrêtées au temps de premier passage.
  Application: la diffusion de Kolmogorov.
- Remarques sur le processus du maximum et son inverse.
- Introduction aux temps d'occupation
  Position du problème.
  Etude des valeurs moyennes selon la dimension.
  Théorème de Ciesielski-Taylor.

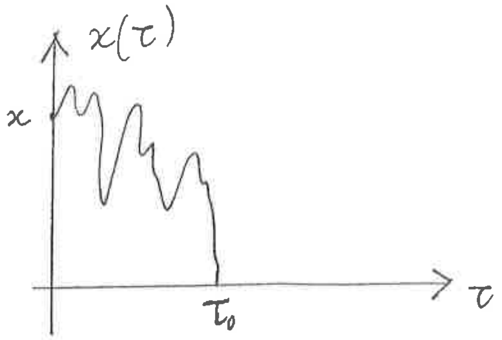
- Le temps local du brownien 1d
  Définition.
  Remarques diverses:
  Formule des temps d'occupation. Le temps local en physique statistique et en mécanique quantique.
  Calcul de la loi.

- Généralisation à une diffusion quelconque.
- Comportement asymptotique dans le cas transcient, fonction de grande déviation

Fonctionnelles arrêtées au temps de premier passage

Supposons que l'espace des trajectoires admissibles soit restreint à celles qui sont arrêtées au temps de premier passage en 0.

$$\tau_0 = \inf\,[\cancel{\tau \leq t}\ \tau > 0,\ x(\tau) = 0]$$



La fonctionnelle

$$\varphi(x) = E_x\, e^{-\int_0^{\tau_0} V[x(\tau)]\,d\tau}$$

est solution d'un problème de Dirichlet.

Voir Chung "Green Brown and probability"

$\varphi(x)$ est la solution <u>positive</u> de l'équation intégrale

$$\varphi(x) = 1 - \int G(x,y)\,\varphi(y)\,V(y)\,dy$$

où $G(x,y)$ est la fonction de Green

$$+\frac{1}{2}\frac{d^2 G}{dx^2} = \delta(x-y) \quad \text{avec condition de Dirichlet en } x=y=0$$

$$G(x,y) = -|x-y| + (x+y) = +\int_0^\infty P_t^D(x,y)\,dt.$$

Ou encore

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2\varphi}{dx^2} - V(x)\,\varphi(x) = 0 \\[2ex] \varphi(0) = 1 \end{cases}$$

Example : calcul de la loi de T_0

prenons $V(x) = p\ \theta(x)$

solution bornée de

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\varphi}{dx^2} - p\,\varphi(x) = 0 \qquad \text{avec} \quad \varphi(0) = 1$$

$$\varphi(x) = e^{-x\sqrt{2p}}$$

On a donc $\qquad E_x\left(e^{-pT_0}\right) = e^{-x\sqrt{2p}}$

La densité de T_0 vérifie donc.

$$e^{-x\sqrt{2p}} = \int_0^\infty e^{-p\tau} f_x(\tau)\, d\tau$$

$$\boxed{f_x(\tau) = \frac{|x|}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{1}{\tau^{3/2}}\ \exp - \frac{x^2}{2\tau}}$$

Remarques

(1) En utilisant la densité du premier temps d'atteinte de ~~son~~ l'origine nous pouvons calculer la probabilité pour un brownien issu de x de ne pas avoir atteint le niveau 0 au temps t.

$$p(x,t) = P_x(\tau_0 > t) = \int_t^\infty d\tau\, f_x(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{t}}} dy \exp - \frac{y^2}{2}$$

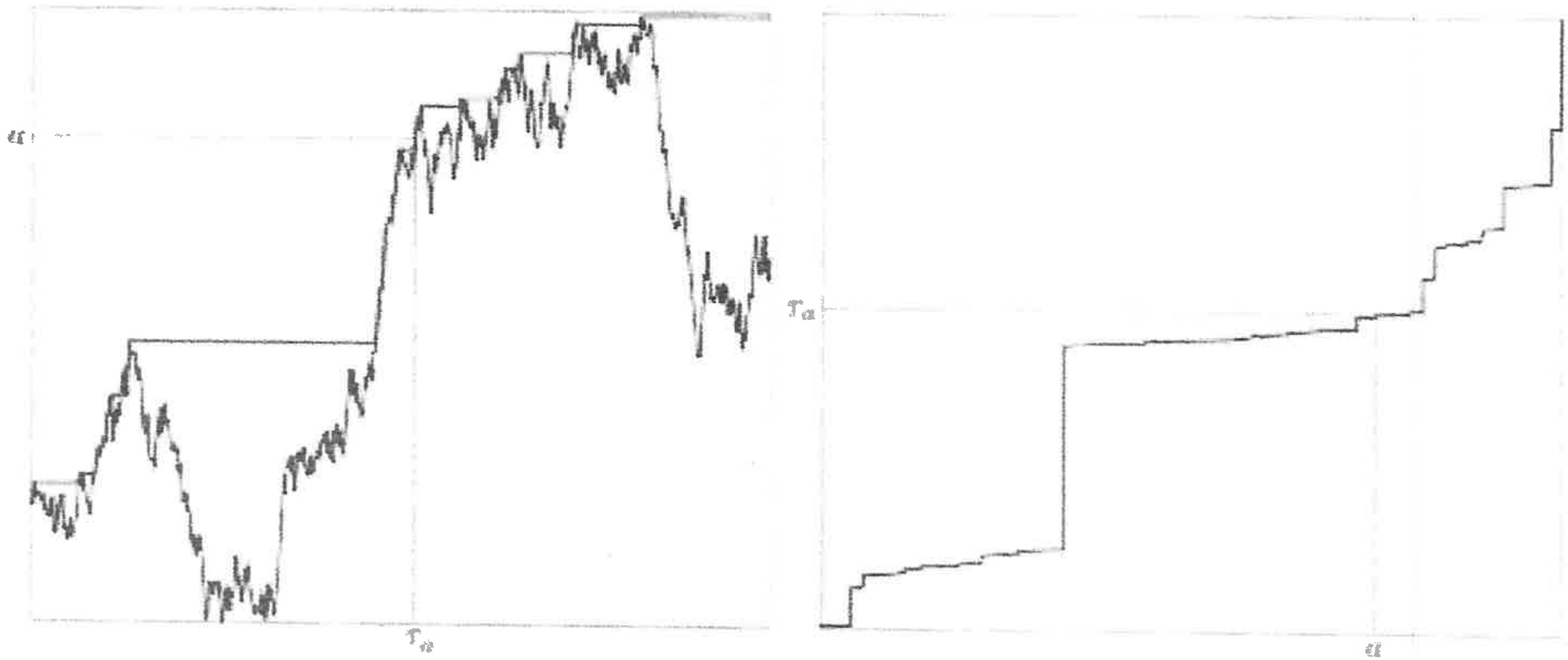
C'est aussi par renversement des trajectoires la probabilité pour un brownien issu de 0 de ne pas avoir atteint le niveau x au temps t qui est la distribution du maximum

$$P_x(\tau_0 > t) = P_0 \left[\underset{\tau \in [0,t]}{x(t) < x} \right] = P_0 \left[M(t) < x \right]$$

résolution que nous avons déjà calculé par Feynman-Kac.

On peut comprendre ce résultat de façon plus intrinsèque en dessinant ~~le~~ processus du maximum ~~et~~ et celui de sa fonction inverse.

Maximum process and its inverse



C'est un processus croissant qui admet une fonction inverse définie par

$T_x = \inf(t > 0,\ M(t) \geq x)$

Nous verrons plus loin que T_x que T_x est en fait un processus de levy croissant appelé subordinateur

(2) La probabilité $Q(x,t)$ de ne pas avoir atteint l'origine au temps t

$$Q(x,t) = P_x(\tau_0 > t)$$

se comporte pour $t \to \infty$ comme

$$Q(x,t) = \int_t^\infty \frac{d\tau}{\tau^{3/2}} \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$$

De façon générale lorsque $Q(x,t)$ a une décroissance algébrique en $t^{-\theta}$

θ s'appelle l'exposant de persistance.

On peut vérifier que la proba de "survie" est

$$Q(x,t) = \int_0^\infty P_t(y,x)\,dy$$

où $P_t(y,x)$ est le propagateur sur $[0,\infty[$ avec condition de Dirichlet en $x = 0$

$$P_t(y,x) = G(y\,t \mid x\,0) - G(y\,t \mid -x\,0)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left[\exp - \frac{(y-x)^2}{2t} - \exp - \frac{(y+x)^2}{2t}\right]$$

Idée de la démonstration : calcul des moments

$$\varphi(x) = E_x\, e^{-p\int_0^{T_0} V[x(\tau)]\,d\tau}$$

$$\varphi(x) = 1 - p\, E_x \int_0^{T_0} V[x(\tau)]\,d\tau + \frac{p^2}{2} + \cdots$$

en reportant dans l'éq intégrale on trouve l'identité

$$E_x \int_0^{T_0} V[x(\tau)]\,d\tau = +\int G(x,y)\, V(y)\,dy$$

Pour la prouver ~~ex~~ exprimons que dans le calcul du membre de gauche on doit intégrer sur toutes les trajectoires qui ne sont pas sorties du domaine

$$E_x \int_0^{T_0} V[x(t)]\,dt = E_x \int_0^{\infty} [V[x(t)], t < \tau_0]\,dt$$

$$= \int dy\; V(y) \int p_t^D(y,x)\,dt$$

$$= \int dy\; V(y) \int \langle y | e^{-t H_D^0} | x \rangle\,dt$$

$$= \int dy\; V(y) \langle y | \frac{1}{H_D^0} | x \rangle$$

$$= \int dy\; V(y)\; G_D(x,y)\,dy$$

où $$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} G_D(x,y) = \delta(x-y)$$

fonction de green avec condition de Dirichlet en $x = y = 0$

Diffusion de Kolmogorov

Considérons la diffusion de Langevin

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(t) \\ m\dot{v}(t) = -\gamma v(t) + \eta(t) \end{cases}$$

. limite visqueuse $t \gg \frac{m}{\gamma}$, on néglige le terme de masse

$$v(t) = \frac{1}{\gamma}\eta(t) \Rightarrow x(t) = \frac{1}{\gamma}\int_0^t \eta(\tau)\,d\tau = \frac{1}{\gamma}B(t)$$

. diffusion de Kolmogorov $\gamma = 0$

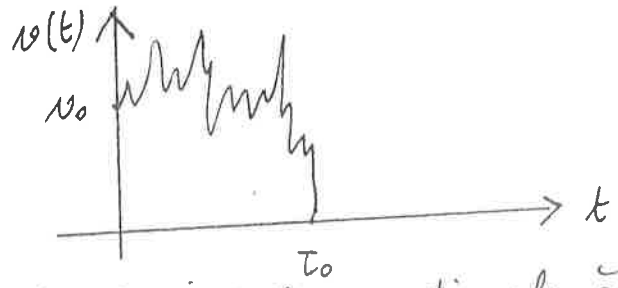
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(t) \\ \dot{v}(t) = \frac{1}{m}\eta(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(t) = \frac{1}{m}\int_0^t B(\tau)\,d\tau \\ v(t) = \frac{1}{m}B(t) \end{cases}$$

prenons les conditions initiales et faisons $m = 1$

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ v(0) = v_0 > 0 \end{cases}$$

$v(t)$ est un brownien issu de $v_0 > 0$

Posons $\tau_0 = \inf(t > 0 \quad v(\tau) = 0)$



Position de la particule à l'instant τ_0 ?

loi de $x(\tau_0) = \int_0^{\tau_0} B(\tau)\,d\tau$?

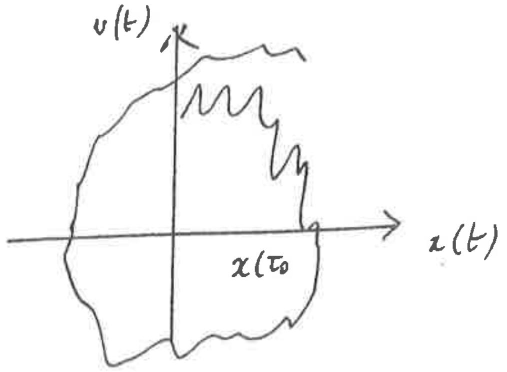
$$\varphi_{p}(v_0) = E_{v_0}\, e^{-p\int_0^{\tau_0} B(\tau)\,d\tau}$$ solution de

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{d^2\varphi}{dv^2} - p\,v\,\varphi = 0 \\ \varphi(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \varphi(v_0) = 3^{2/3}\,\Gamma\!\left(\tfrac{2}{3}\right) Ai\left(2^{1/3} p^{1/3} v_0\right)$$

Laplace inverse $\Rightarrow$ densité de $x(\tau_0)$

$$f(x) = \frac{2^{1/3}\, v_0}{3^{1/3}\,\Gamma(2/3)\, x^{4/3}} \exp -\frac{2}{9}\frac{v_0^3}{x}$$

Trajectoires dans le plan (x, v)



les trajectoires s'enroulent autour de 0 avec une vitesse angulaire

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\theta(t)}{\log t} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$ Mc Kean

∘ Pour étudier cette asymptotique il faut regarder l'asymptotique des temps de retour successifs

$$T_0^{(n)} = \inf \left(t > T_0^{(n-1)} \quad x(t) = 0 \right)$$

entre 2 temps successifs la particule a fait 1/2 tour.

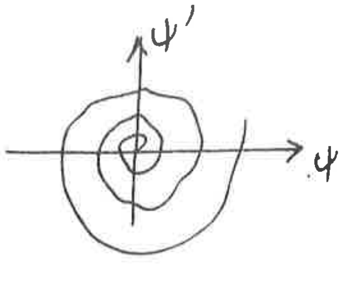
Voir une généralisation à des processus de Levy (Thomas Simon, Profetta)

∘ Remarque : résultat très différent du brownien 2d

$$x = \frac{2\,\theta(t)}{\ln t} \qquad P(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$$ Spitzer

dans ce cas il n'y a pas de ~~direction~~ sens privilégié

∘ On verra plus loin un problème d'enroulement lié ~~aux~~ la localisation $\psi = \rho \sin\theta \qquad \psi' = \sqrt{E}\, \rho \cos\theta$



$$\frac{\theta(x)}{x} \longrightarrow \pi N(E)$$

1) Position du problème

La notion de temps local que nous nous proposons d'étudier se rattache à celle de temps d'occupation
Le temps d'occupation est le temps passé par une particule dans un domaine Ω. On peut l'écrire

$$T_\Omega(t) = \int_0^t \theta_\Omega[\vec{x}(\tau)]\, d\tau$$

Cette quantité est une variable aléatoire qui est manifestement une fonctionnelle de toute la trajectoire.
Questions : comment est-elle distribuée
Peut-on analyser son comportement à grand temps ?
Peut-on utiliser des arguments d'ergodicité.
Remplacer la moyenne temporelle par une moyenne d'ensemble. S'il existe une distribution d'équilibre, relier T_Ω à $\int_\Omega P_{eq}(\vec{x})\, d\vec{x}$

Que peut-on dire s'il n'y a pas de mesure d'équilibre ?
Questions débattues dans le contexte des systèmes étendus

- modèles de spins : proba de non retournement
  Godrèche - Luck, Godrèche Dornic.
- étude de la fluorescence de nanocristaux uniques.
  Intensité émise sous forme de scintillement avec un caractère aléatoire. Alternance d'états allumés et d'états éteints (Dahan - Barkai).

Dans le cas brownien il existe une vaste littérature sur ce sujet. Ces problèmes ont commencé à être discutés dans le contexte des marches aléatoires sur réseau.

Quel est le nombre de visites d'un site donné par une marche aléatoire de longueur n ?

. calculer le nb de visites d'une page

Soit $\vec{x}_k$ une marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}^d$.

$$T_{\vec{x}}(n) = \#\{k,\ 0 < k \leq n,\ \vec{x}_k = \vec{x}\}$$

$\exists$ th limites

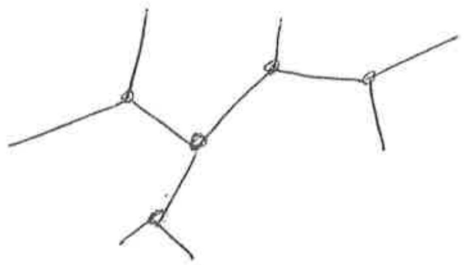
$d = 1$
$$\lim_{n \to \infty} P\left[\frac{T_x(n)}{\sqrt{n}} < u\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^u e^{-t^2/2}\, dt$$

$d = 2$
$$\lim_{n \to \infty} P\left[\frac{T_x(n)}{\ln n} < u\right] = 1 - e^{-\pi u}$$

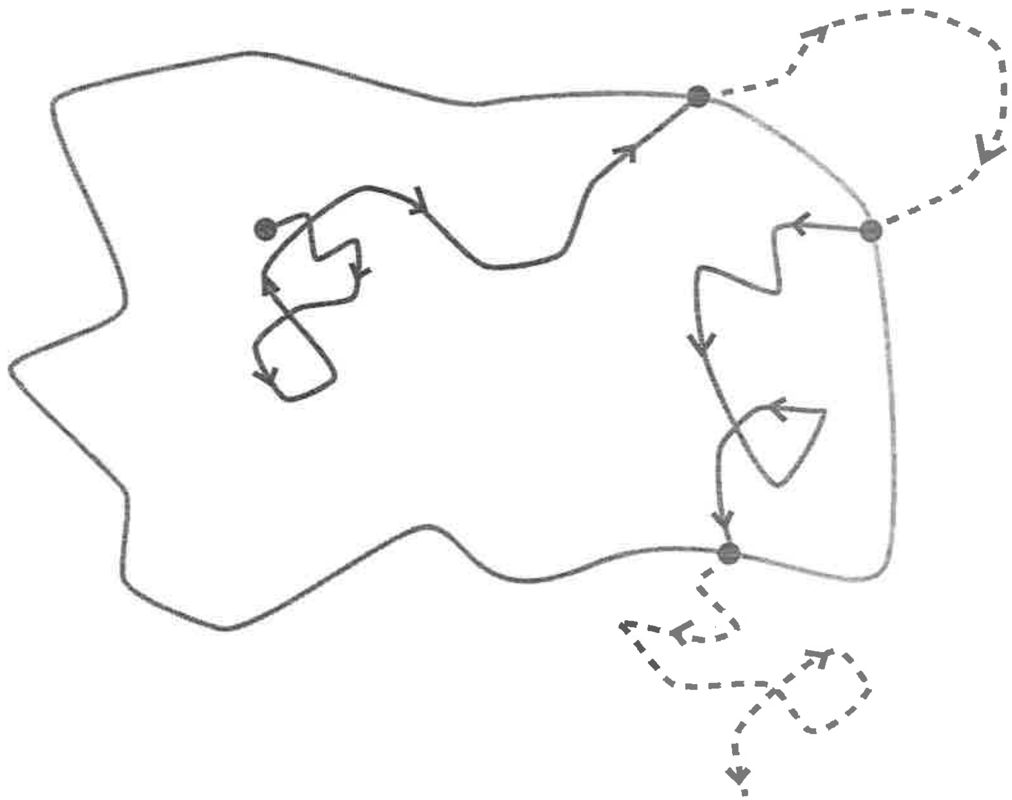
faisant apparaître des variables et des fonctions d'échelles qu'on aimerait pouvoir calculer par des méthodes élémentaires et qu'on aimerait pouvoir généraliser à des fonctionnelles plus générales $\int_0^t V[\vec{x}(\tau)]\, d\tau$

Autres applications

– diffusion brownienne sur un graphe arbitraire



Occupation time



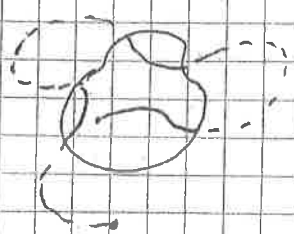
1 Temps d'occupation

Considérons un brownien $\vec{x}(\tau)$ tel que $\vec{x}(0) = \vec{x}$

Nous nous proposons de calculer le temps total passé par la particule dans un domaine Ω entre 0 et t.

On doit étudier

$$T_\Omega = \int_0^t \Theta_\Omega[\vec{x}(\tau)]\, d\tau$$



Commençons par étudier la valeur moyenne

$$E_x(T_\Omega) = \int_0^t d\tau \; E_x[\Theta(\vec{x}(\tau))] = \int_0^t d\tau \int_{y \in \Omega} dy \; p_\tau(x,y)$$

en effet $\operatorname{Prob}_x[\vec{x}(\tau) \in \Omega] = \int_\Omega p_\tau(x,y)\, dy$

Si Ω = boule de rayon R et $\vec{x} = 0$ on trouve

$$E(T_\Omega) = \int_0^t \left(\frac{1}{2\pi\tau}\right)^{d/2} \int_\Omega \exp -\frac{\vec{y}^2}{2\tau}\, d^n\vec{y}$$

1) pour $d = 1$ en prenant $\Omega = \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$ on trouve

$$E(T_\Omega) = \int_0^t d\tau \; \Phi\left(\frac{L}{2\sqrt{2\tau}}\right)$$

où $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$

Pour $L \to 0$ en utilisant $\Phi(x) \sim \frac{2x}{\sqrt{\pi}}$ on trouve

$$E(T_L) = \frac{L}{\sqrt{\pi}} \sqrt{2t}$$

Par conséquent la variable aléatoire $\lim_{L \to 0} \frac{T_L}{L}$ a un premier moment fini, ce qui suggère qu'il existe une variable aléatoire $\mathcal{T}_0(t) = \lim\limits_{L \to 0} \frac{T_L}{L}$ appelée temps local en 0

On l'écrira de façon plus compacte le temps local en a

$$\mathcal{T}_a(t) = \int_0^t \delta\left[a - x(\tau)\right] d\tau$$

Introduit par Levy sous le nom de <u>mesure du voisinage</u>

cet objet n'est pas un temps mais a les dimensions

$\frac{T}{L} = \frac{1}{v}$.

2) $d=2$. Pour un disque Ω de rayon R le calcul donne

$$E(T_\Omega(t)) = \frac{R^2}{2}\int_{\frac{R^2}{2t}}^{\infty} \frac{du}{u^2}(1-e^{-u}) = \frac{R^2}{2}\left[\frac{1}{x}(1-e^{-x}) - Ei(-x)\right]$$

où $x = \frac{R^2}{2t}$ et $Ei(-x) = -\int_x^\infty e^{-t}\frac{dt}{t}$

On ne peut pas définir de temps local car le brownien 2d a une probabilité nulle de visiter un point

$P[\vec{x}(t) = \vec{x} \text{ pour } t>0] = 0$

En revanche on peut extraire une loi limite pour $t\to\infty$.

Pour $t\to\infty$, R fixé on a

$$E(T_\Omega(t)) \approx \frac{R^2}{2}\ln\frac{2t}{R^2}$$

Ce qui suggère d'introduire la variable d'échelle

$$X = \lim_{t\to\infty} \frac{2T_\Omega(t)}{R^2\ln t}$$

Kaliampur et Robbins montrent la convergence en loi

$$\lim_{t\to\infty} \frac{2T_\Omega(t)}{R^2\ln t} \to X \text{ de densité } e^{-x}.$$

Remarquons qu'en dimension 2 il existe toute une classe de lois asymptotiques avec échelle logarithmique, le prototype étant la loi de Spitzer

$$X = \frac{2\theta(t)}{\log t} \longrightarrow \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+X^2}$$

pour SAW Duplantier Saleur montrent que

$\theta(t) / \_\_\_\_ \quad 1 \quad e^{-x^2}$

3) En dimension $d \geq 3$ le brownien est transcient, c'est à dire $P_{\vec{x}}\,[\vec{x}(\tau) \to \infty,\ \tau \to \infty] = 1$
le brownien partant à l'infini, on s'attend à ce que le temps total d'occupation soit fini. C'est ce que confirme le calcul du 1er moment.

Pour une boule de rayon R on trouve pour un brownien isotrope

$$E(T_\Omega(\infty)) = \int_0^\infty \frac{dt}{(2\pi t)^{3/2}} \int_0^R 4\pi \rho^2 \exp - \frac{\rho^2}{2t}\, d\rho$$

$$= R^2$$

On peut en fait calculer tous les moments et montrer que

$$E_0\left(e^{-\lambda T_\Omega}\right) = \frac{1}{\operatorname{ch} R\sqrt{2\lambda}}$$

Temps total d'occupation dans le cas transcient $d \geq 3$

Théorème (Peres Mörters) th. 7.44

Si V est une fonction positive bornée, pour $d \geq 3$

$$h(\vec{x}) = E_{\vec{x}} \exp - \int_0^\infty V[\vec{x}(\tau)]\, d\tau$$

satisfait l'équation intégrale

$$h(\vec{x}) = 1 - \cancel{\frac{1}{2\pi}} \int G(\vec{x}, \vec{y})\, V(\vec{y})\, h(\vec{y})\, d\vec{y}$$

en particulier pour $d = 3$

$$h(\vec{x}) = 1 - \frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|}\, V(\vec{y})\, h(\vec{y})\, d\vec{y}$$

On reconnait l'équation intégrale de la diffusion à énergie nulle.

Par conséquent en utilisant $\Delta \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} = -4\pi\, \delta^3$

$$-\frac{1}{2} \Delta h = V(\vec{x})\, h(\vec{x})$$

$h(\vec{x})$ est donc solution de l'éq. de Schrödinger à énergie nulle.

$$\left(-\frac{1}{2} \Delta + V\right) h(\vec{x}) = 0$$

qui vérifie certaines conditions à l'infini (données par l'éq. intégrale.

Application si $V(\vec{x}) = \lambda\, \theta_I(\vec{x})$ où θ_I est la fonction indicatrice de la boule de rayon 1 on trouve que

$$h(0) = \frac{1}{\operatorname{ch}\sqrt{2\lambda}} = E\left(e^{-\lambda T_R}\right)$$

Démonstration élémentaire

Supposons que

$$h(\vec{x}) = E_{\vec{x}} \exp - \int_0^\infty V[\vec{x}(\tau)]\, d\tau \quad \text{existe}$$

1) FK en temps exponentiel implique que

$$Q_s(\vec{x}) = \int_0^\infty e^{-st}\, E_x\left[\exp - \int_0^t V[x(\tau)]\, d\tau\right] dt$$

est solution de

$$(H+s)\, Q_s(\vec{x}) = 1$$

Ecrivons

$$Q_s(\vec{x}) = \int dy \, \langle y | \frac{1}{H+s} | \vec{x} \rangle$$

et utilisons l'éq. intégrale satisfaite par la résolvante

$$\frac{1}{H+s} = \frac{1}{H_0+s} - \frac{1}{H_0+s}\, V \frac{1}{H+s}$$

ainsi que l'expression de la résolvante libre en $d=3$

$$\langle y | \frac{1}{H_0+s} | x \rangle = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-\sqrt{2s}\,|\vec{y}-\vec{x}|}}{|\vec{y}-\vec{x}|}$$

Il vient, après intégration sur $\vec{y}$

$$Q_s(\vec{x}) = \frac{1}{s} - \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{-\sqrt{2s}\,|\vec{y}-\vec{x}|}}{|\vec{y}-\vec{x}|}\, V(\vec{y})\, Q_s(\vec{y})\, d\vec{y}$$

2) Dans la limite $s \to 0$ les choses se simplifient

Posons $G_s(\vec{x}) = s\, Q_s(\vec{x})$.

$$G_s(\vec{x}) = 1 - \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{-\sqrt{2s}\,|\vec{y}-\vec{x}|}}{|\vec{y}-\vec{x}|}\, V(\vec{y})\, G_s(\vec{y})\, d\vec{y}$$

• Dans la limite $s \to 0$

$$G_s(\vec{x}) = s\, Q_s(\vec{x}) = s \int_0^\infty dt\, e^{-st}\, E_{\vec{x}} \exp - \int_0^t V[x(\tau)]\, d\tau$$

$$\longrightarrow h(\vec{x}) = E_{\vec{x}} \exp - \int_0^\infty V[\vec{x}(\tau)]\, d\tau$$

Donc $h(\vec{x}')$ est solution de

$$\boxed{h(\vec{x}) = 1 - \frac{1}{2\pi} \int \frac{d\vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|} V(y)\, \theta\, h(\vec{y})\, d\vec{y}}$$

Ciesielski-Taylor

On observe que le temps d'occupation de la boule unité de R^{d+2} a même loi que le temps d'atteinte de la sphère ~~boule~~ $\mathcal{S}^d$ (par le brownien de R^d)

$$\int_0^\infty \theta\,[1 - |\vec{x}_d(\tau)|]\, d\tau \overset{loi}{=} \inf\,[t,\ |\vec{x}_{d-2}(t)| = 1]$$

Vérifions le explicitement en $d = 1 \longrightarrow d+2 = 3$

~~la boule~~ $S^1 = [-1, 1]$

le temps d'atteinte du bord est solution du pblème de Dirichlet

$$\frac{1}{2} \frac{d^2\varphi}{dx^2} - \lambda \varphi = 0 \qquad \text{avec} \quad \varphi(1) = \varphi(-1) = 1$$

et $\varphi(\vec{x}) = E_x \exp - \cancel{\oint} \lambda \tau$

τ est le temps d'atteinte du bord

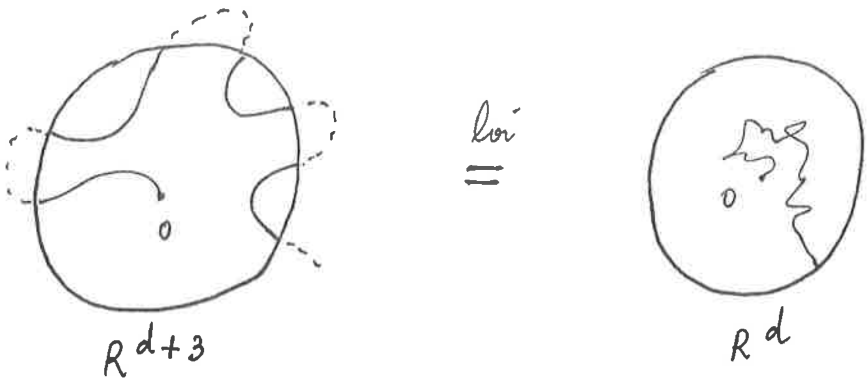
$\tau = \inf\,(t > 0,\ x(t) = \{1, -1\})$

On trouve $\varphi(x) = \dfrac{\operatorname{ch} x\sqrt{2\lambda}}{\operatorname{ch}\sqrt{2\lambda}}$

Par conséquent $\varphi(0) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}\sqrt{2\lambda}}$

On en déduit que

$\tau \overset{\ell}{=} T$



. First passage time and sojourn times for BM
Ciesielski – Taylor.

. Démonstration voir Yor $\begin{cases}\text{Annales IHP 91 (27 p 201)} \\ \text{some aspects of BM (Birkhäuser)}\end{cases}$

utilisation des temps locaux et de Ray – Knight.

pour Bes δ et Bes $\delta+2$

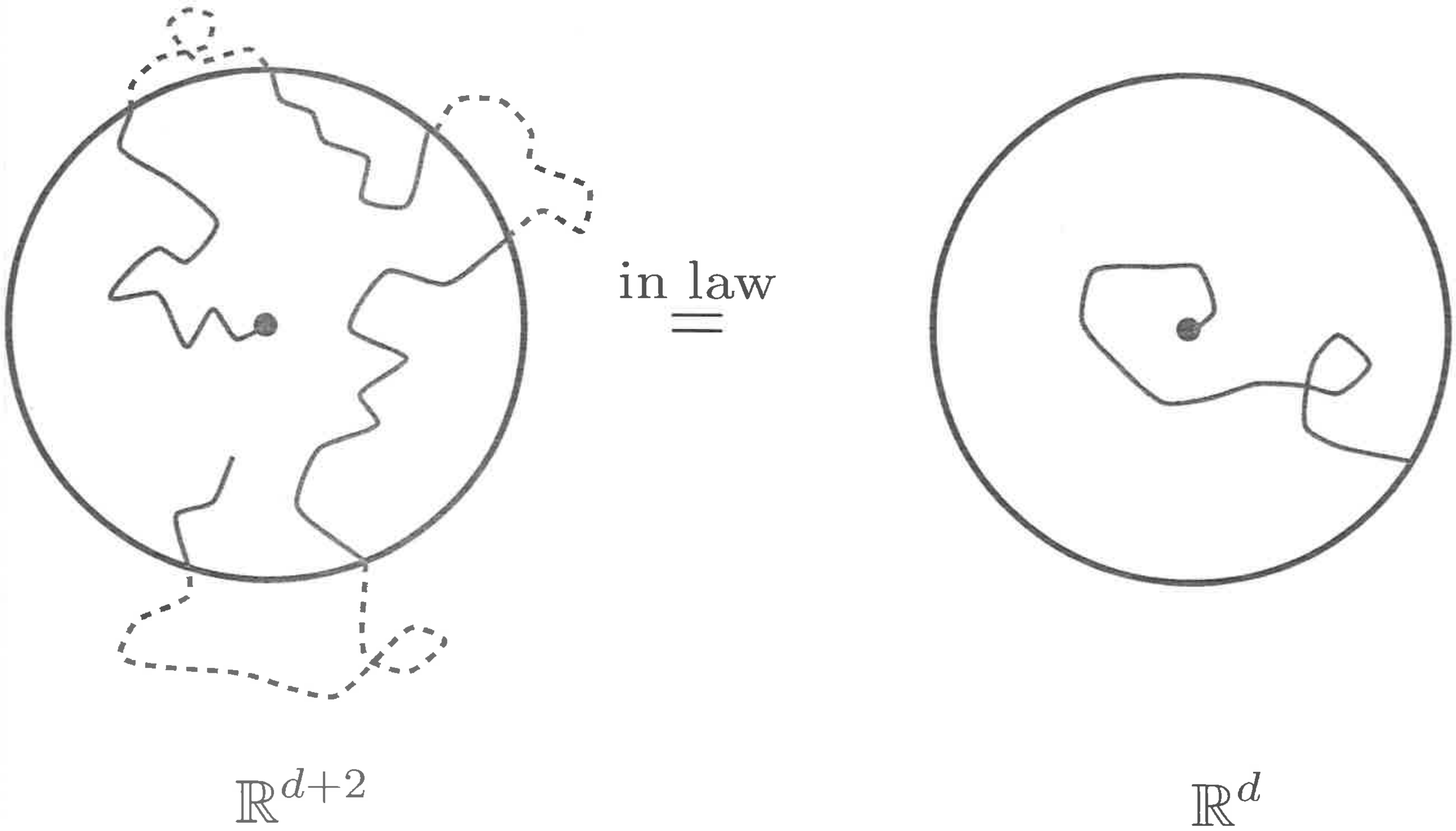
. Voir + loin diffusions conjuguées.

. le membre de droite et celui de gauche sont des intégrales spatiales de temps d'occupation

$$\mathcal{T}_x(t) = \int_0^t \delta\left[x(\tau) - x\right] d\tau$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \mathcal{T}_x(t)\, dx = \int_0^t \theta\left[1 - |x(\tau)|\right] d\tau$$

Ciesielski-Taylor



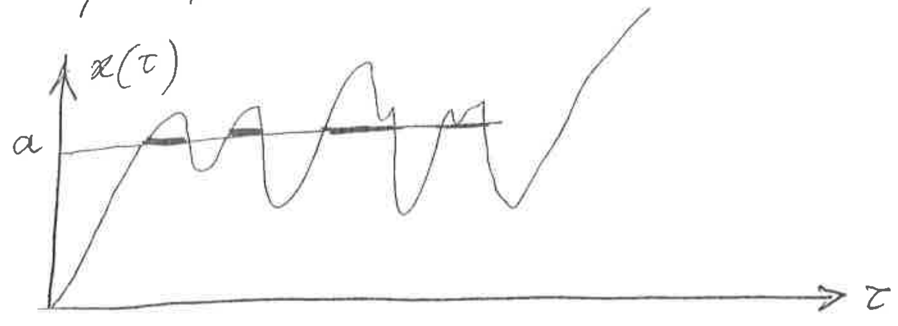
Temps local

1) Définition

Considérons la diffusion unidimensionnelle

$$\dot{x}(t) = F(x) + \eta(t) = -\frac{\partial U}{\partial x}(x) + \eta(t)$$

$$\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = \delta(t-t') \quad \text{donc} \quad D = 1/2$$



La fonction aléatoire $\tau \longrightarrow x(\tau)$ étant continue ~~la~~ l'ensemble $\{\tau, x(\tau) > a\}$ est un ouvert de R^* décomposable en une union d'intervalles ouverts appelés intervalles d'excursion. La mesure de lebesgue de ~~cet~~ l'ensemble pour $s \in [0,t]$ est appelé temps d'occupation. On notera

$$T_a = \int_0^t \theta[x(\tau) - a]\, d\tau$$

On montre que ce temps d'occupation est l'intégrale spatiale d'une <u>densité</u> de temps d'occupation

$$T_a = \int_a^\infty dx\, \mathcal{T}_x(t)$$

où $\mathcal{T}_x(t) = \int_0^t \delta[x - x(\tau)]$ s'appelle le temps local.

On peut le définir rigoureusement comme

$$\mathcal{T}_x(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}\int_0^t \mathbb{1}_{[x, x+\epsilon]}\, d\tau \quad \text{dimension } \frac{T}{L}$$

<u>Objectif</u> : étude de la distribution de proba du temps local

$$P_{a,x}(T,t) = \mathbb{P}(T < \mathcal{T}_a(t) < T + dT \mid x(0) = x)$$

Remarques diverses

1) formule des temps d'occupation

la définition du temps local

$$\mathcal{T}_x(t) = \int_0^t \delta[x - x(\tau)]\, d\tau$$

implique ~~que~~ la formule des temps d'occupation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f[x(t)]\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, \mathcal{T}_y(t)\, dy$$

par conséquent une fonctionnelle arbitraire du brownien peut s'écrire comme une fonctionnelle du temps local

$$E.\, e^{-\int_0^t f[x(\tau)]\, d\tau} = E\, e^{-\int f(y)\, \mathcal{T}_y(t)\, dy}$$

Cette formule permet dans certains cas de faire une ~~fonctionnelle~~ moyenne d'ensemble avant de faire la moyenne trajectorielle

Supposons que $V(x)$ est un potentiel aléatoire gaussien

$$\langle V(x)\, V(y) \rangle = \sigma\, \delta(x - y)$$

alors

$$\langle e^{-\int V(x)\, \mathcal{T}_y(t)\, dy} \rangle = e^{\frac{\sigma}{2}\int \mathcal{T}_y^2(t)\, dy}$$

Par conséquent la moyenne de la fonction de partition

$$\int \mathcal{D}x(\tau)\, e^{-\frac{1}{2}\int \dot{x}^2 - \int V[x(\tau)]\, d\tau}$$ donne

$$\int \mathcal{D}x(\tau)\, e^{-\frac{1}{2}\int \dot{x}^2 + \frac{\sigma}{2}\int \mathcal{T}_y^2(t)\, dy} = E\, e^{\frac{\sigma}{2}\int \mathcal{T}_y^2(t)\, dy}$$

On est donc conduit à l'étude d'une fonctionnelle particulière du temps local qui n'est pas évidente. Il faut étudier le processus $\mathcal{T}_y(t)$ en y. Il se trouve que c'est un processus de Markov en y grâce à Ray - Knight.

Dans la littérature physique, cette remarque permet de relier 2 problèmes bien distincts

- localisation quantique
- polymères autointersectants

2) <u>le temps local en physique statistique.</u>

En physique des polymères il est essentiel de prendre en compte les contraintes d'autoévitement. Edwards pénalise les trajectoires browniennes par un facteur qui compte les autointersections.

En $d = 1$ on introduit le poids statistique

$$\frac{1}{Z} \exp - \beta \int_0^t ds \int_0^t d\tau \; \delta[x(s) - x(\tau)]$$

Réécrivons le en terme du temps local

$$\mathcal{T}_x(t) = \int_0^t \delta[x(\tau) - x] \, d\tau$$

on vérifie que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \; \mathcal{T}_x^2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_0^t d\tau \, \delta[x(\tau) - x] \int_0^t ds \, \delta[x(s) - x]$$

$$= \int_0^t d\tau \int_0^t ds \; \delta[x(\tau) - x(s)]$$

Modèle jouet de polymère

$$\frac{1}{Z} \exp - \beta \int_R \mathcal{T}_x^2(t) \, dx$$

fait intervenir le temps local d'autointersection $\int \mathcal{T}_x^2(t)\,dx$ mesurant le temps que le brownien passe dans des configurations intersectées entre 0 et t. Son étude requiert de comprendre les propriétés de $\mathcal{T}_x(t)$ comme <u>fonction de x</u>

3) Le temps local en mécanique quantique

• Particule libre sur la demi-droite $x > 0$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$$

1) Dirichlet $\psi(0) = 0$

Fonctions propres $\begin{cases} \psi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx \\ E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \end{cases}$

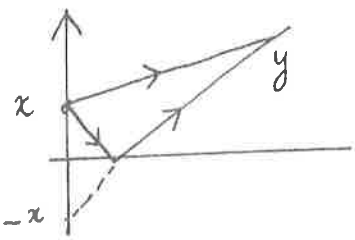
2) Conditions mixtes $\psi(0) = \beta\,\psi'(0)$

$$\psi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(kx + \delta(k)\right)$$

$$\operatorname{tg} \delta(k) = -\frac{1}{k\beta}$$

Problème : comment prendre en compte ces conditions aux limites générales dans la formulation intégrale de chemin ?

• approche semi-classique pour $\beta = 0$ (Dirichlet)



$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left[\exp -\frac{(x-y)^2}{2t} - \exp -\frac{(x+y)^2}{2t}\right]$$

• formulation fonctionnelle

$$\int \mathcal{D}x(\tau) \exp \frac{i}{\hbar}\int_0^t \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{\hbar^2}{m\beta}\,\delta\left[x(\tau)\right]\right] d\tau$$

voir Clark - Menikoff, Sharp (Phys Rev D 22, n° 12, 1980)

Interprétation heuristique

pénalisation des trajectoires qui touchent le bord

$$\int_0^T \delta[x(\tau)]\,d\tau = \sum_{t_i<T} \frac{1}{\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t_i}} = \sum_{t_i<T} \frac{1}{v} = \frac{n}{v}$$

où n est le nombre de fois où la trajectoire est réfléchie entre 0 et t

poids statistique

$$p_n = \exp - \frac{n}{\beta v} = \exp - \frac{n\,\Delta t}{\beta\,\Delta X}$$

or $\Delta t = \Delta X^2$

$$p_n = \exp - \frac{n\,\Delta X}{\beta} \sim \left(1 - \frac{\Delta X}{\beta}\right)^n$$

chaque trajectoire réfléchier en $X = 0$ a une proba $1 - \frac{\Delta X}{\beta}$ d'être réfléchie.

Problème $\beta < 0$?

$\exists$ état lié supplémentaire

Voir . C. Monthus et C. Texier

Random walk on the Bethe lattice.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \mu P\right) = 0$$

$$J(0) = 0 \qquad \frac{\partial P}{\partial x} = \mu P$$

Calcul de la distribution du temps local du brownien

Nous voulons calculer la fonction caractéristique

$$E_x\left(e^{-p\,\mathcal{T}_a(t)}\right)$$

les trajectoires étant browniennes, nous pouvons utiliser l'intégrale de chemin standart et écrire cette quantité sous la forme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{x(0)=x}^{x(t)=y} \mathcal{D}x(\tau)\, e^{-S}$$

où $S = \frac{1}{2}\int_0^t \dot{x}^2(t)\, d\tau + p\int_0^t \delta[x(\tau)-a]\, d\tau$

ou encore sous forme opératorielle

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy \ \langle y|\, e^{-tH}\, |x\rangle$$

avec $H = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + p\,\delta[x-a]$

Transformée de laplace en t

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha t}\, E_x\left(e^{-p\,\mathcal{T}_a(t)}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, \langle y|\frac{1}{H+\alpha}|x\rangle$$

Fonction de Green avec une impureté en $x=a$

Solution $\quad G = G_0 - G_0 V G$

$$G(y,x) = G_0(y,x) - \frac{p\, G_0(y,a) G_0(a,x)}{1+p\, G_0(a,a)}$$

Pour faire laplace inverse, on décompose en éléments simples

$$G(y,x) = G_0(y,x) - \frac{G_0(y,a)G_0(a,x)}{G_0(a,a)} + \frac{G_0(y,a)\,G_0(a,x)}{G_0(a,a)}\,\frac{1}{1+p\,G_0(a,a)}$$

Il vient

$$\int_0^\infty P_{a,x}(T,t)\, e^{-\alpha t}\, dt = \delta(T) \int \left[G_0(y,x) - \frac{G_0(y,a)\, G_0(a,x)}{G_0(a,a)} \right] dy$$

$$+ \int \frac{G_0(y,a)\, G_0(a,x)}{G_0^2(a,a)}\, e^{-\frac{T}{G_0(a,a)}}\, dy$$

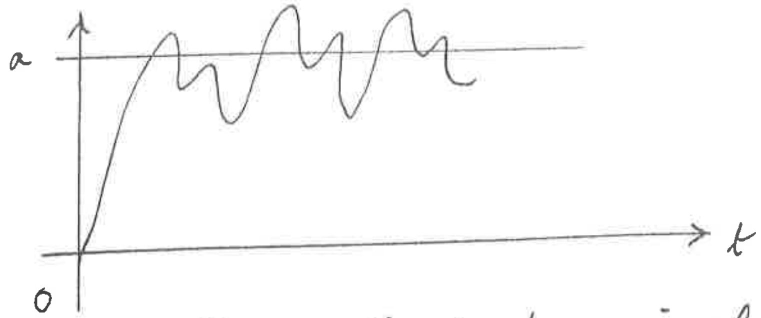
Cette formule se simplifie et donne finalement pour un brownien issu de 0

$$P_{a,0}(T,t) = \delta(T) \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_0^a e^{-\frac{x^2}{2t}}\, dx + \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\, e^{-\frac{(a+T)^2}{2t}}$$

Le premier terme s'écrit encore en faisant apparaître le maximum

$$\text{Prob}\{M(t) < a\} = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_0^a e^{-\frac{x^2}{2t}}\, dx$$

Si cet événement est réalisé, il contribue avec un poids nul au temps local, d'où le $\delta(T)$



Par conséquent il est plus simple de faire partir de processus du niveau a, par exemple $a = 0$

On écrira donc

$$\boxed{P_{0,0}(T,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\, e^{-\frac{T^2}{2t}}} \qquad t, T > 0$$

Distribution gaussienne de moyenne

$\langle T \rangle = \sqrt{\frac{2t}{\pi}}$

en accord avec le nombre moyen de visites d'un site par une marche aléatoire de n pas $= \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$

Exercice : En utilisant la distribution du temps local, calculer l'état fondamental dans le potentiel attractif

$V(x) = -p\,\delta(x)$

Feynman Kac

$$E_0\, e^{-\int_0^t V[x(\tau)]\,d\tau} = \sum_n \psi_n(0) \int \psi_n(y)\, dy\, e^{-E_n t}$$

donne

$$E_0\, e^{p\,\mathcal{T}_0} = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{T^2}{2t} + pT}\, dT$$

dans la limite $t \to \infty$ on trouve

$$E_0\, e^{p\,\mathcal{T}_0} = 2\, e^{\frac{p^2 t}{2}}$$

en comparant avec le membre de droite on en déduit que $E_0 = -\frac{p^2}{2}$

On vérifie que le terme $\underline{2}$ vient de l'intégrale suivante sur le fondamental

$$\psi_0(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0(y)\, dy$$