

Commençons par quelques rappels. Montrons comment construire le brownien comme une limite de marche aléatoire (1)

Considérons la marche aléatoire sur \mathbb{Z} .

C'est une suite $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_n = S_{n-1} + \eta_n \quad n \geq 1 \end{cases}$$

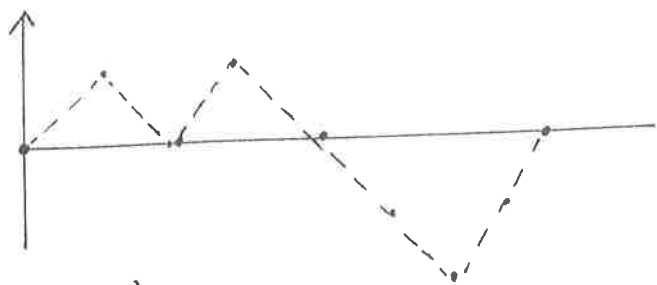
où les η_n sont des variables iid. Par exemple

$$P(\eta_n = 1) = P(\eta_n = -1) = \frac{1}{2}$$

$S_n = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n$ peut être interprété comme la fortune à "l'instant" n d'un joueur dans un jeu équitable de pile ou face.

Dessignons une trajectoire d'une marche de longueur n

C'est la suite $\{S_0, S_1, \dots, S_n\}$



$$E(S_n) = 0$$

$E(S_n^2) = n \rightarrow$ on regarde cette même marche sur une échelle différente

1) Extrémité de la marche

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \rightarrow X \text{ de densité } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

2) Description globale de la mesure

(en $d > 1$, conformation d'un polymère)

(2)

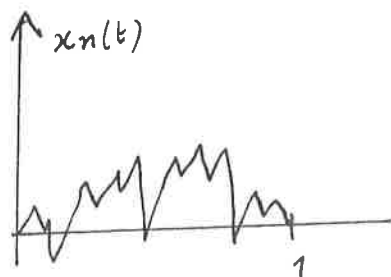
A n fixé, on effectue un chgt d'échelle en temps et en espace en posant

$$X_n(t) = \frac{S_{nt}}{\sqrt{n}} \quad \text{où} \quad t = \frac{k}{n} \quad 0 \leq k \leq n$$

Pour avoir une fonction continue de sur $[0, 1]$

on prolonge $X_n(t)$ par interpolation linéaire

Pour n fixé on obtient ainsi une courbe continue sur $[0, 1]$ qui a l'allure suivante



voir tangentex.com

Nils Berglund

[Brownian motion as scaling limit of a random walk]

On montre que $X_n(t)$ converge pour $n \rightarrow \infty$ vers un processus $X(t)$. C'est une famille infinie de va indexée par $t \in [0, 1]$.

$X(t)$ est un mvt brownien. Pour justifier cette assertion, commençons par regarder la loi marginale à t fixé

$X_n(t) \rightarrow X(t)$ de loi

$$p_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp -\frac{x^2}{2t}$$

$$\left\{ P[X(t) \in dx] = p_t(x) dx \right\}$$

Preuve : pour $n = \frac{1}{n}$

$$X_{nt} = \frac{S_{nt}}{\sqrt{n}} = \frac{\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_k}{\sqrt{n}} = \frac{\eta_1 + \dots + \eta_k}{\sqrt{k}} \sqrt{t} \rightarrow N(0,1) \sqrt{t} = N(0,t) \quad (3)$$

le processus limite hérite des propriétés classiques de la marche aléatoire.

• Indépendance des accroissements

$\forall k > q \geq 0$ $S_k - S_q$ est indépendant de S_1, \dots, S_q

$\Rightarrow X(t) - X(s)$ indépendant de $\{X(\tau) \mid \tau \leq s\}$

• Stationnarité des accroissements $\forall k > q > 0$

$$P[S_k = n \mid S_q = m] = P[S_{k-q} = n-m]$$

$$\Rightarrow t > s > 0 \quad h = X(t) - X(s) \sim X(t-s)$$

de densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp - \frac{h^2}{2(t-s)}$

Muni de ces propriétés on en déduit la loi du vecteur

$\{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)\}$ pour

$$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \frac{1}{\sqrt{t_1(t_2-t_1) \dots (t_k-t_{k-1})}} \exp - \sum_{i=1}^k \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})}$$

avec $t_0 = 0$ et $x_0 = 0$

On remarque la représentation opératorielle de la loi

$$-(t_k - t_{k-1}) H_0 \mid \dots \mid \langle x_1 \mid e^{-t_1 H_0} \mid x_0 \rangle$$

Muni de ces propriétés on vérifie que

$$E[X(t)X(s)] = \min(t,s) = \frac{1}{2} [t+s - |t-s|]$$

en particulier $E[X^2(t)] = t$

exercice 1) le vérifier en utilisant les propriétés générales

$$X(t)X(s) = [X(t) - X(s)]X(s) + X^2(s)$$

pour $t > s$ $E[X(t)X(s)] = 0 \cdot 0 + E[X^2(s)] = s$

2) le vérifier par le calcul pour $t > s$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp - \frac{x^2}{2s} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp - \frac{(x-y)^2}{2(t-s)} x y dx dy$$

Calcul de valeurs moyennes d'observables

Soit $f(x)$ une fonction arbitraire. On peut calculer la valeur moyenne de $f[X(t)]$

$$E f [X(t)] = \int f(x) P[X(t) \in dx] = \int f(x) P_t(x) dx$$

Pour être plus précis il faut écrire

$$E [f [X(t)] | X(0)=0] \text{ puisqu'on est parti de l'origine}$$

Si l'on fait un mouvement brownien
en un point arbitraire x on aura

$$E[f(x(t)) | x(0) = x] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp - \frac{(y-x)^2}{2t} dy \quad (5)$$

Nous noterons cette espérance

$$E_x f[x(t)]$$

On vérifie que la fonction $Q(x, t) = E_x f[x(t)]$
est solution de l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \\ Q(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

Ce résultat intéressant montre que l'évolution des V ^{certaines}
observables attachées au brownien obéissent à une
équation déterministe

→ résolution d'une edp parabolique avec une
condition initiale (problème de Cauchy)

Cette propriété s'étend à toutes les diffusions. En
particulier, les trajectoires de $\dot{x} = F(x) + \gamma(t)$
vérifient

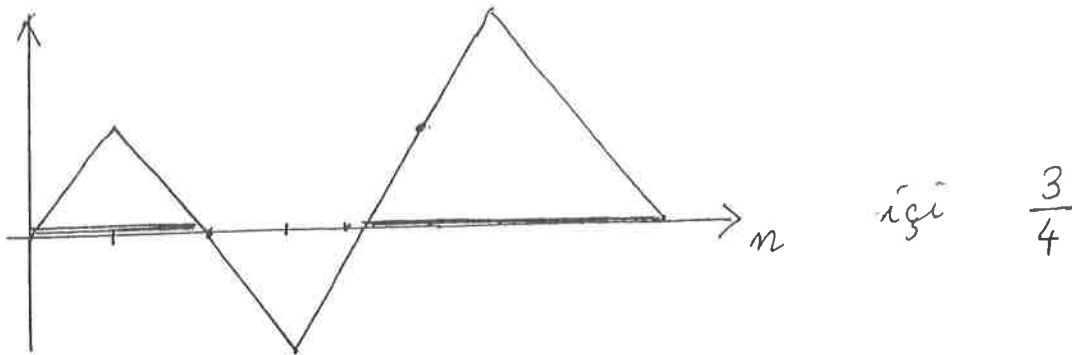
$$Q(x, t) = E_x [f(x(t))]$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + F(x) \frac{\partial}{\partial x} \right] Q(x, t) \quad \text{avec } Q(x, 0) = f(x)$$

L'opérateur $\mathcal{G} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + F(x) \frac{\partial}{\partial x}$ s'appelle le
générateur de la diffusion

On conçoit cependant qu'il existe des observables ⑥
attachés à la marche aléatoire qui dépendent non
pas d'un point mais de toute la trajectoire.

Exemple: quelle est la fraction du temps pendant
laquelle la fortune du joueur est positive ?



$$V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \theta(S_i)$$

pour $n \rightarrow \infty$ V_n converge vers une va. $V(t)$

$$V(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \theta[x(\tau)] d\tau$$

C'est une fonctionnelle de la trajectoire

C'est une va positive dont on étudiera la
loi en considérant la transformée de
Laplace de la densité

$$E(e^{-pV}) = \int_0^{\infty} e^{-pv} f(v) dv$$

On est donc amené à étudier

$$E_x e^{-\frac{p}{t} \int_0^t \theta[x(\tau)] d\tau} = Q(x, t)$$

Plus généralement on étudiera les fonctionnelles

$$E_x e^{-p \int_0^t V[x(\tau)] d\tau}$$

Tant qu'on se restreint à des fonctionnelles usuelles
telles que

$$E_x e^{-\sum_{k=1}^n V[X(t_k)]}$$

(7)

on a tous les outils à notre disposition.

La loi du vecteur $X(t_1), \dots, X(t_n)$ permet
d'exprimer cette espérance comme une intégrale
ordinaire sur n variables.

Le calcul général de ces fonctionnelles repose sur la
formule de Feynman-Kac.

Avant d'en donner une dérivation, montrons
comment calculer des fonctionnelles quadratiques
telles que

$$E_x e^{-\int_0^t X^2(s) ds}$$

Calcul utilisant la représentation de
Karhunen-Loève.

Idee centrale: $X(t)$ est un processus gaussien
On peut donc développer $X(t)$ pour $t \in [0, 1]$
sur une base de $L^2[0, 1]$ avec des coefficients
 c_n qui sont des variables gaussiennes
indépendantes.

Développement de Karhunen-Loève (intérêt en théorie du signal)

On se donne une base de fonctions orthogonales ~~sur~~ $\in L^2(0,1)$

~~Et~~ On pose

$$X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} c_n \phi_n(t)$$

où les c_n sont des v.a. gaussiennes indépendantes

$$E(c_n) = 0$$

$$E(c_n c_m) = \delta_{nm}$$

Exprimons que

$$E[X(t)X(s)] = K(s,t)$$

dans le cas du brownien

$$K(s,t) = \min(s,t) = \frac{1}{2} [s+t - |s-t|]$$

Il vient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \phi_n(t) \phi_n(s) = K(s,t)$$

Par orthogonalité on obtient

$$\int_0^1 K(s,t) \phi_n(t) dt = \lambda_n \phi_n(s)$$

[Espace de Hilbert à noyau reproduisant.]

Par conséquent les fonctions ϕ_n sont des fonctions propres de K et les λ_n les valeurs propres du noyau. On montre que K est un opérateur auto-adjoint positif.

Exercice : dans le cas brownien on vérifie que

$$\phi_n(t) = \frac{\sqrt{2}}{(n-\frac{1}{2})} \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi t \quad \lambda_n = \frac{1}{\pi^2\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} \quad n \geq 1$$

Par conséquent

$$X(t) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\left(n-\frac{1}{2}\right)} \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi t$$

$t \in [0,1]$

Application : calcul de fonctionnelles quadratiques (9)

1) En utilisant K.L on a vu que

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2} C_k \sin\left(k - \frac{1}{2}\right) \pi t}{\left(k - \frac{1}{2}\right) \pi}$$

Par conséquent

$$\int_0^1 X^2(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4 C_k^2}{(2k-1)^2 \pi^2}$$

Transformée Ainsi

$$\mathbb{E} e^{-\frac{\gamma^2}{2} \int_0^1 X^2(t) dt} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\gamma^2}{(2k-1)^2 \pi^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\text{ch } \gamma}}$$

En remettant la variable temporelle

$$\mathbb{E} e^{-\frac{\gamma^2}{2} \int_0^t X^2(\tau) d\tau} = \frac{1}{\sqrt{\text{ch } \gamma t}}$$

2) Décomposition K.L du pont brownien

$b(t) = X(t) - tX(1)$ est un pont

On vérifie que

$$\mathbb{E} [b(t) b(s)] = \min(t, s) - st$$

Le développement K.L donne

$$b(t) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{k \pi} \sin k \pi t$$

Exercice : montrer que

$$\mathbb{E} e^{-\frac{\omega^2}{2} \int_0^t b^2(\tau) d\tau} = \sqrt{\frac{\omega t}{\text{sh } \omega t}}$$

Processus bidimensionnel: arc de Levy

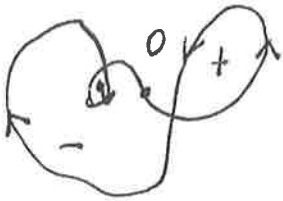
$A_t = \frac{1}{2} \int_0^t (x dy - y dx)$ où $x(t)$ et $y(t)$ sont 2 browniens indépendants

Levy étudié

l'aire entre la courbe et l'arc



et aussi le cas de courbes planes fermées conditionnées à revenir en 0.



$E(\exp i\lambda A_t | \vec{x}(t) = 0) = \frac{t\lambda}{2\sinh t\lambda/2}$

• calcul ~~par~~ "à la" Karhunen ~~par~~ $t \in [2\pi]$

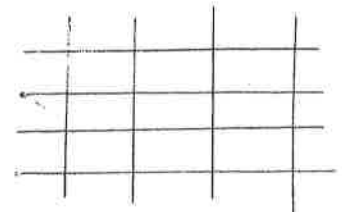
$$\begin{cases} X(t) = \frac{\xi' t}{\sqrt{2\pi}} + \sum \frac{1}{n\sqrt{\pi}} [\xi_n (\cos nt - 1) + \xi'_n \sin nt] \\ Y(t) = \frac{\eta' t}{\sqrt{2\pi}} + \sum \frac{1}{n\sqrt{\pi}} [\eta_n (\cos nt - 1) + \eta'_n \sin nt] \end{cases}$$

Voir aussi

• Duplantier: area of planar brownian curves

J. Phys A 22 (1989) 3033.

• Marches aléatoires sur réseau delphé au voisinage de la limite continue



• J. Deobois: corrections en $1/N$

Stochastic processes 57 (1995) 225.

• Werner Formule de Green, lacet brownien plan et aire de Levy

Identité remarquable / diamagnétisme de Landau

(12)

$$\mathbb{E}(e^{iBAt}) = \frac{Z(B)}{Z(0)} = \frac{1}{2} \frac{Bt}{\operatorname{sh} \frac{Bt}{2}} \quad \text{canonique}$$

où $Z(B)$ est la fonction de partition d'un gaz

d'électrons à température $\frac{1}{kT}$ à $\beta = \frac{1}{kT} = t$ ($E_n = (n + \frac{1}{2})B$)

Par conséquent la susceptibilité magnétique

$$\chi = kT \left. \frac{\partial^2}{\partial B^2} \ln Z \right|_{B=0} \text{ est liée à l'aire des}$$

bandes browniennes

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial B^2} \ln Z \right|_{B=0} = - \mathbb{E}(A^2 t) = - \frac{t^2}{12}$$

$$\text{donc } \chi = - \frac{t}{6}$$

↑
diamagnétique

dans les unités normales.

$$\chi_d = - \frac{N}{V} \frac{\mu_B^2}{3kT}$$

$$\text{avec } \mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = \frac{1}{2}$$

1) Bruit blanc

On vérifie que

$$\eta(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{X(t+h) - X(t)}{h}$$

n'existe pas comme variable aléatoire. En effet la fonction caractéristique de

$$\eta_h(t) = \frac{X(t+h) - X(t)}{h}$$

est $E[e^{iu\eta_h(t)}] = e^{-\frac{u^2}{2h}}$

par conséquent pour $h \rightarrow 0$ $\lim_{h \rightarrow 0} E[e^{iu\eta_h(t)}] = 0$ si $u \neq 0$
 $= 1$ si $u = 0$

La fonction caractéristique

converge vers une fonction qui n'est pas continue en $u=0$
Donc $E(\eta_h(t))$ ne converge pas en loi et donc ne converge pas au sens d'aucune des convergences

On peut cependant définir $\eta(t)$ de façon distributionnelle en posant

$$\int_0^\infty f(s) \eta(s) ds = - \int_0^\infty f'(s) X(s) ds$$

où $f(s)$ est une fonction déterministe telle que $f(0) = f(\infty) = 0$

On vérifie que

$$E(\eta(s) \eta(\tau)) = \delta(s-\tau)$$

On écrit désormais

$$X(t) = \int_0^t \eta(\tau) d\tau.$$

2) le brownien physique $d=1$

(voir revue B. Duplantier)

14

Approche Langevin

$$\dot{x} = v$$

$$m\dot{v} = -\gamma v + \eta(t)$$

Pour $t \gg \frac{m}{\gamma}$ on peut négliger le terme de masse

$$v = \frac{1}{\gamma} \eta(t)$$

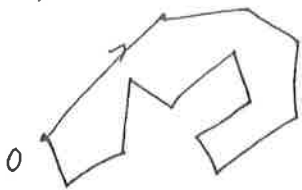
Donc $x = \frac{1}{\gamma} \int_0^t \eta(\tau) d\tau$ est un brownien

Pour $t \ll \frac{m}{\gamma}$ $x(t)$ est un processus gaussien mais non markovien.

3) dimension 3 : le brownien est le processus vectoriel $\vec{X}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ où x, y, z sont 3 browniens indépendants.

$$\text{donc } E(\vec{X}^2(t)) = 3t$$

Physiquement il faut comprendre cette formule comme donnant la distance quadratique moyenne pour une marche aléatoire de N pas, chaque pas étant de longueur a avec distribution isotrope.



$$\vec{x} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \dots + \vec{r}_N$$

$$E(\vec{x}^2) = 3Na^2$$

donc $t = Na^2$ a bien les bonnes dimensions physiques

Formule de Feynman - Kac.

(15)

1) Heuristique : la formule de Karhunen - Loève nous permet de réécrire la mesure gaussienne

$$\prod_{n=0}^{\infty} \frac{dc_n}{\sqrt{2\pi}} \exp - \frac{c_n^2}{2} = \exp - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \prod \frac{dc_n}{\sqrt{2\pi}}$$

comme une mesure sur les trajectoires

$$\exp - \frac{1}{2} \int_0^t \dot{x}^2(s) ds \mathcal{D}x(\tau)$$

et nous invite à considérer $x(s)$ comme la trajectoire d'un point matériel. Le poids de chaque trajectoire est proportionnel à l'action classique le long de la trajectoire. Par conséquent, dans la version Feynman

$$\begin{aligned} Q(x, t) &= E_x e^{-\int_0^t V[x(\tau)]} \stackrel{+ \infty \quad x(t) = y}{=} \int_{-\infty \quad x(0) = x} dy \int \mathcal{D}x(\tau) \exp - \frac{1}{2} \int_0^t \dot{x}^2(s) - \int_0^t V[x(s)] \\ &= \int dy \langle y | e^{-tH} | x \rangle \end{aligned}$$

$Q(x, t)$ est donc solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - V(x) Q \\ Q(x, 0) = 1 \end{array} \right.$$

voir "enigmas of chance" → fourmille d'anecdotes

Mark Kac

rencontre à Cornell avec Feynman

2) Dérivation plus convaincante

(16)

- utilise le fait que $X(t)$ est un processus de Markov
- $\exp - \int_0^t V[x(\tau)] d\tau$ est une fonctionnelle d'une chaîne de Markov en temps et en espace continu.

Considérons

$$Q(x, y, t) = E_x \left[\exp - \int_0^t V[x(\tau)] d\tau, x(t) = y \right]$$

Pour simplifier l'écriture supprimons que nous avons une chaîne de Markov en temps continu mais avec un nombre fini d'états notés i_k

$$i_0 = x \quad i = y$$

$$Q(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int \dots \int d\tau_1 \dots d\tau_k \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k = 1}^m$$

$$0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k < t$$

$$V(i_1) \dots V(i_k) P(i_0 | i_1, \tau_1) P(i_1 | i_2, \tau_2 - \tau_1)$$

$$\dots P(i_k | i, t - \tau_k)$$

les P sont les probabilités de transition qui dans le cas continu s'écrivent

$$P(x | y, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \exp - \frac{(x-y)^2}{2\tau} = \langle x | e^{-\tau H_0} | y \rangle$$

Une transformée de Laplace en temps donne

(17)

$$\int_0^{\infty} e^{-st} Q(x, y, t) dt =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n V(i_1) \dots V(i_k) \langle i_0 | \frac{1}{H_0 + s} | i_1 \rangle \dots \langle i_k | \frac{1}{H_0 + s} | i \rangle$$

On peut faire explicitement la somme sur i_1, \dots, i_k

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \langle i_0 | \left[\frac{1}{H_0 + s} V \right]^k | i_k \rangle \langle i_k | \frac{1}{H_0 + s} | i \rangle$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \langle i_0 | \frac{1}{1 + \frac{V}{H_0 + s}} | i_k \rangle \langle i_k | \frac{1}{H_0 + s} | i \rangle$$

$$= \langle i_0 | \frac{1}{H_0 + s + V} | i \rangle$$

Par conséquent

$$\int_0^{\infty} e^{-st} Q(x, y, t) = \langle x | \frac{1}{H_0 + s + V} | y \rangle$$

Si on intègre sur le point final on obtient

$$\int_0^{\infty} e^{-st} E_x e^{-\int_0^t V[x(\tau)] d\tau} = \int dy \langle x | \frac{1}{H_0 + s + V} | y \rangle$$

Cette formule se déduit de la formule standard par transformée de Laplace.

3^e démonstration plus intrinsèque (cf. Simon)

1) lemme $\hat{\Phi}_\alpha(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} E_x [f(x(t))] dt$

est solution de

$$\left(-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \alpha\right) \hat{\Phi}_\alpha(x) = f(x)$$

Se vérifie par le calcul.

2) Identité pour chaque trajectoire on a

$$1 - e^{-\int_0^t V[x(s)] ds} = \int_0^t dt V[x(t)] e^{-\int_t^t V[x(s)] ds}$$

Se vérifie par intégration par parties

Réécrivons le second membre

$$D = \int_0^t dt V[x(t)] e^{-\int_0^{t-t} V[x(\tau+s)] ds}$$

Multiplions par $f[x(t)] e^{-\alpha t}$ et intégrons sur t

le membre de gauche s'écrit

$$G = \int_0^\infty dt f[x(t)] e^{-\alpha t} - \int_0^\infty dt e^{-\alpha t} f[x(t)] e^{-\int_0^t V[x(s)] ds}$$

Celui de droite s'écrit

$$D = \int_0^\infty dt e^{-\alpha t} f[x(t)] \int_0^t dt V[x(\tau)] e^{-\int_0^{t-\tau} V[x(\tau+s)] ds}$$

Echangeons les intégrations sur t et τ

Il vient.

$$D = \int_0^{\infty} d\tau V[x(\tau)] \int_{\tau}^{\infty} dt e^{-\alpha t} f[x(t)] e^{-\int_0^t V[x(\tau+s)] ds} \quad (19)$$

Changement de variable $t = \tau + u$

$$D = \int_0^{\infty} d\tau V[x(\tau)] \int_0^{\infty} du e^{-\alpha(\tau+u)} f[x(\tau+u)] e^{-\int_0^u V[x(\tau+s)] ds}$$

La deuxième intégrale sur u fait int apparaître un brownien issu de $x(\tau)$ au temps 0.

Prenons l'espérance $E_x(G) = E_x(D)$

On obtient

$$E_x(G) = \hat{Q}_\alpha(x) - E_x \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} f[x(t)] e^{-\int_0^t V[x(s)] ds}$$

$$E_x(D) = E_x \int_0^{\infty} d\tau e^{-\alpha\tau} V[x(\tau)] E_{x(\tau)} \int_0^{\infty} du e^{-\alpha u} f[x(u)] e^{-\int_0^u V[x(\tau+s)] ds}$$

Posons

$$\varphi[x(\tau)] = E_{x(\tau)} \int_0^{\infty} du e^{-\alpha u} f[x(u)] e^{-\int_0^u V[x(\tau+s)] ds}$$

le membre de droite peut encore s'écrire

$$E_x(D) = E_x \int_0^{\infty} d\tau e^{-\alpha\tau} V[x(\tau)] \varphi[x(\tau)]$$

On peut donc appliquer le lemme en faisant

$$\text{agir } \left(-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \alpha \right) E_x(D) = V(x) \varphi(x)$$

De même, en faisant agir sur le membre de gauche

$$\left(-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \alpha\right) E_x(G) = f(x) - \left(-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \alpha\right) \varphi(x)$$

(20)

Par conséquent

$$\varphi(x) = E_x \int_0^\infty du e^{-\alpha u} f[x(u)] e^{-\int_0^u V[x(s)] ds}$$

est solution de

$$\left[-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \alpha + V(x)\right] \varphi(x) = f(x)$$

De façon équivalente, par Laplace inverse on écrit que

$$Q(x, t) = E_x \left[f[x(t)] e^{-\int_0^t V[x(\tau)] d\tau} \right]$$

est solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - V(x) Q(x) \\ Q(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

Exemple : $V(x) = \frac{\gamma^2}{2} x^2$

Il faut résoudre

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\gamma^2}{2} x^2 Q \\ Q(x, 0) = 1 \end{cases}$$

On trouve

$$Q(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\text{ch} \gamma t}} \exp - \frac{\gamma x^2 \text{sh} \gamma t}{2 \text{ch} \gamma t}$$

on retrouve le résultat précédent

$$Q(0, t) = \frac{1}{\sqrt{\text{ch} \gamma t}}$$

Exercice : retrouver ce résultat en utilisant le propagateur de l'oscillateur harmonique $V(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$

$$K(y, t | x, 0) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar \text{sh}\omega t}} \exp - \frac{S}{\hbar}$$

$$S = \frac{m\omega}{2 \text{sh}\omega t} [\text{ch}\omega t (x^2 + y^2) - 2xy]$$

on calcule $\int_{-\infty}^{+\infty} K(y, t | x, 0) dy = \frac{1}{\sqrt{\text{ch}\omega t}} \exp - \frac{\omega x^2 \text{sh}\omega t}{2 \text{ch}\omega t}$

Nous venons de voir comment les fonctionnelles "ordinaires"

$$Q(x, t) = E_x e^{-\int_0^t V[x(\tau)] d\tau}$$

sont liées à des équations différentielles paraboliques

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - V(x) Q \\ Q(x, 0) = 1 \end{cases}$$

Dans certaines situations le temps final est lui-même une variable aléatoire

- Exemple :
- diffusion d'une particule instable (radioactive) ^{d'un traceur radioactif}
 - diffusion dans un domaine dont la longueur est aléatoire : exemple milieu poreux avec des canaux de longueur exponentiellement distribués
 - phénomènes de transport dans un milieu poreux

Si t est distribué exponentiellement le problème est très simple, il suffit en effet de faire une transformée de Laplace de (1) et de poser

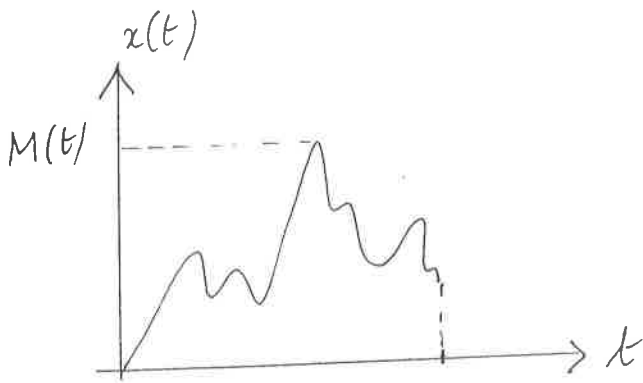
$$Q_s(x) = \int_0^\infty e^{-st} Q(x, t) dt$$

$Q_s(x)$ est la solution bornée de

$(H + s) Q_s(x) = 1$, équation qu'on sait résoudre en dimension 1

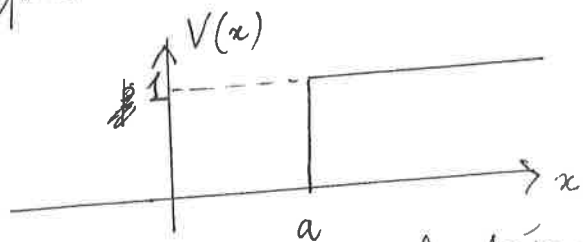
$$\text{en effet } Q_s(x) = \int dy \langle y | \frac{1}{H+s} | x \rangle = \int dy G(x, y) \quad \left[\begin{array}{l} Q_s(0) = \int dy f(y) \\ [-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dy^2} + V + s] f = 0 \\ f \text{ bornée et} \\ f'(0^+) - f'(0^-) = -2 \end{array} \right.$$

Exemple : calculons la distribution de probabilité du maximum du brownien sur $[0, t]$



posons $M(t) = \max_{0 < \tau < t} x(\tau)$

Pour faire ce calcul nous installons une barrière de potentiel en $x = a$ de hauteur 1.



et considérons la fonctionnelle

$$E_0 e^{-\rho \int_0^t V[x(\tau)] d\tau}$$

Si la barrière est de hauteur infinie, elle va tuer toutes les trajectoires qui dépassent $x = a$

On a donc la formule (plausible !)

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} E_0 \exp -\rho \int_0^t V[x(\tau)] d\tau = \text{Prob} [M(t) < a]$$

Le calcul de la transformée de Laplace donne

$$I(s, \rho) = \int_0^\infty dt e^{-st} E_0 e^{-\rho \int_0^t V[x(\tau)] d\tau} = \frac{1}{s} \left[1 - e^{-a\sqrt{2s}} \left(1 - \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{s+\rho}} \right) \right]$$

Par conséquent

$$\lim_{p \rightarrow \infty} I(s, p) = \frac{1}{s} [1 - e^{-a\sqrt{2s}}]$$

Laplace inverse donne

$$\text{Prob} [M(t) < a] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\frac{a}{\sqrt{t}}} e^{-u^2/2} du$$

Bonus : à p fixé et en faisant $a = 0$ on trouve

$$\begin{aligned} I(s, p) &= \frac{1}{\sqrt{s}} \frac{1}{\sqrt{s+p}} \\ &= \int_0^{\infty} dt e^{-st} E_0 [e^{-pT(t)}] \end{aligned}$$

où $T(t)$ est le temps d'occupation de la demi-droite $x > 0$

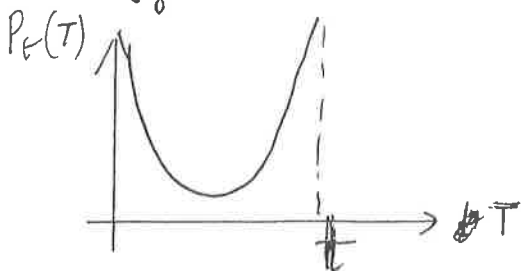
$$T(t) = \int_0^t \theta[x(\tau)] d\tau$$

On en déduit la loi densité de T

$$P_t(T) = \frac{1}{\pi \sqrt{T(t-T)}} \quad 0 \leq T < t$$

sous forme intégrée

$$\int_0^T P_t(u) du = \frac{2}{\pi} \text{Arcsin} \sqrt{\frac{T}{t}}$$



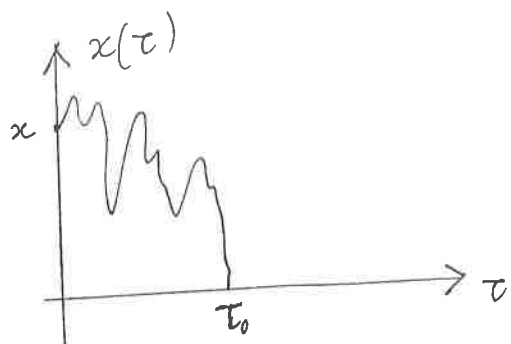
temps moyen = $t/2$ mais la densité est concentrée aux valeurs extrêmes de l'intervalle. Bien que le jeu soit équitable la plupart des ^{réalisations sont} trajectoires font de longues excursions

Fonctionnelles arrêtées au temps de premier passage

(25)

Supposons que l'espace des trajectoires admissibles soit restreint à celles qui sont arrêtées au temps de premier passage en 0.

$$\tau_0 = \inf \left[\tau \geq 0, x(\tau) = 0 \right]$$



La fonctionnelle

$$\varphi(x) = E_x e^{-\int_0^{\tau_0} V[x(\tau)] d\tau}$$

est solution d'un problème de Dirichlet.

Voir Chung "Green Brown and probability"

$\varphi(x)$ est la solution positive de l'équation intégrale

$$\varphi(x) = 1 - \int G(x, y) \varphi(y) V(y) dy$$

où $G(x, y)$ est la fonction de Green

$$+ \frac{1}{2} \frac{d^2 G}{dx^2} = \delta(x-y) \quad \text{avec condition de Dirichlet en } x=y=0$$

$$G(x, y) = -|x-y| + (x+y) = + \int_0^{\infty} P_t^D(x, y) dt.$$

ou encore

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - V(x) \varphi(x) = 0 \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$$

Exemple : calcul de la loi de T_0

prenons $V(x) = p \theta(x)$
solution bornée de

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - p \varphi(x) = 0 \quad \text{avec} \quad \varphi(0) = 1$$

$$\varphi(x) = e^{-x\sqrt{2p}}$$

On a donc $E_x(e^{-pT_0}) = e^{-x\sqrt{2p}}$

La densité de T_0 vérifie donc.

$$e^{-x\sqrt{2p}} = \int_0^{\infty} e^{-p\tau} f_x(\tau) d\tau$$

$$f_x(\tau) = \frac{|x|}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\tau^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\tau}\right)$$

Idee de la demonstration : calcul des moments

(2.7)

$$\varphi(x) = E_x e^{-\rho \int_0^{T_0} V[x(\tau)] d\tau}$$

$$\varphi(x) = 1 - \rho E_x \int_0^{T_0} V[x(\tau)] d\tau + \frac{\rho^2}{2} + \dots$$

en reportant dans l'eq integrale on trouve l'identite'

$$E_x \int_0^{T_0} V[x(\tau)] d\tau = + \int G(x, y) V(y) dy$$

Pour la prouver ~~on~~ exprimons que dans le calcul du membre de gauche on doit integrer sur toutes les trajectoires qui ne sont pas sorties du domaine ∞

$$E_x \int_0^{T_0} V[x(t)] dt = E_x \int_0^{\infty} [V[x(t)], t < T_0] dt$$

$$= \int dy V(y) \int_0^{\infty} p_t^D(y, x) dt$$

$$= \int dy V(y) \int \langle y | e^{-t H_D^0} | x \rangle dt$$

$$= \int dy V(y) \langle y | \frac{1}{H_D^0} | x \rangle$$

$$= \int dy V(y) G_D(x, y) dy$$

ou $-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} G_D(x, y) = \delta(x-y)$

fonction de green avec condition de Dirichlet en $x=y=0$

Remarque

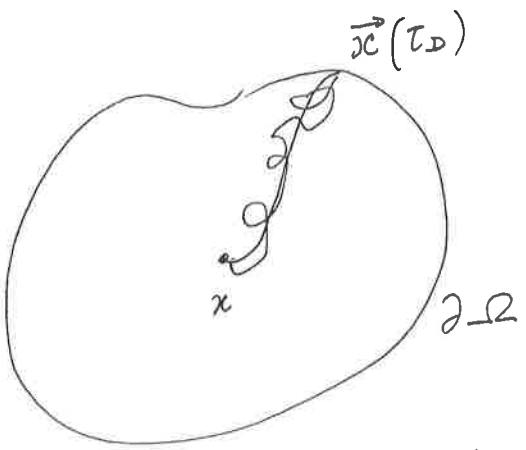
2) Extension dans \mathbb{R}^d

$$\varphi(\vec{x}) = E_{\vec{x}} \left\{ \exp - \int_0^{\tau_D} V[\vec{x}(\tau)] d\tau \right\} f[\vec{x}(\tau_D)]$$

est solution du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \left[\frac{1}{2} \Delta - V(\vec{x}) \right] \varphi(\vec{x}) = 0 \\ \varphi(\vec{x})|_{\vec{x} \in \partial\Omega} = f(\vec{x}) \end{cases}$$

$$\tau_D = \inf (t > 0, \vec{x}(t) \notin \Omega)$$



→ extension de la formule de Kakutani pour les fonctions harmoniques

Diffusion de Kolmogorov

Considérons la diffusion de Langevin

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(t) \\ m \dot{v}(t) = -\gamma v(t) + \eta(t) \end{cases}$$

• limite visqueuse $t \gg \frac{m}{\gamma}$ on peut négliger le terme de masse

$$v(t) = \frac{1}{\gamma} \eta(t) \Rightarrow x(t) = \frac{1}{\gamma} \int_0^t \eta(\tau) d\tau = \frac{1}{\gamma} B(t)$$

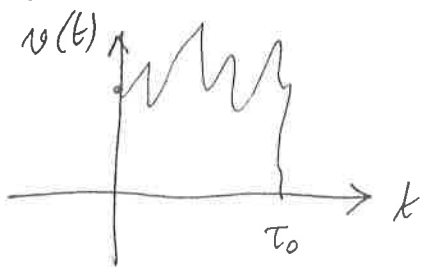
• Diffusion de Kolmogorov $\gamma=0$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(t) \\ m \dot{v}(t) = \eta(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau \\ v(t) = \frac{1}{m} \int_0^t \eta(\tau) d\tau = B(t) \end{cases}$$

ces conditions initiales

$$\begin{cases} x = 0 \\ v = v_0 \end{cases} \Rightarrow B(0) = v_0 > 0$$

regardons le processus $v(t)$



à l'instant τ_0 $x(\tau_0) = \int_0^{\tau_0} B(\tau) d\tau$

la distribution de $x(t)$ est donnée en étudiant

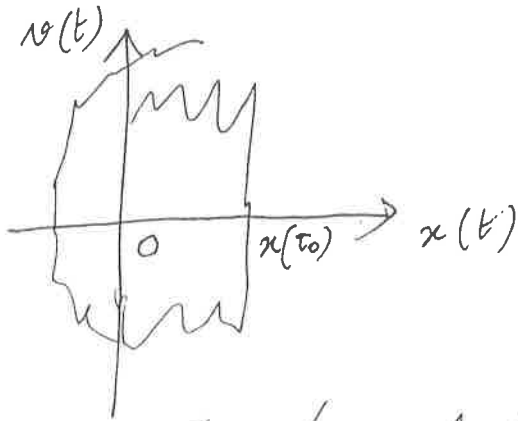
$$\varphi(v_0) = E_{v_0} e^{-p \int_0^{\tau_0} B(\tau) d\tau} = E e^{-p \cdot x}$$

solution de $\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{d^2 \varphi}{dv^2} - p v \varphi = 0 \end{cases}$

$\varphi(0) = 1 \Rightarrow$ fonction de Airy.

Trajectoires dans l'espace x, y

(20)



Les trajectoires s'enroulent autour de 0 avec une vitesse angulaire

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\theta(t)}{\ln t} \underset{ps}{=} -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{Mc Kean}$$

voir article récent de Thomas Simon (brownien \rightarrow Levy)

Résultat très différent du Brownien 2d

$$x = \frac{2\theta(t)}{\ln t}$$

$$P(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} \quad \text{Spitzer}$$

Ils n'y a pas de direction privilégiée.

Remarques

① En utilisant la densité du premier temps d'atteinte des niveaux l'origine nous pouvons calculer la probabilité pour un brownien issu de x de ne pas avoir atteint le niveau 0 au temps t .

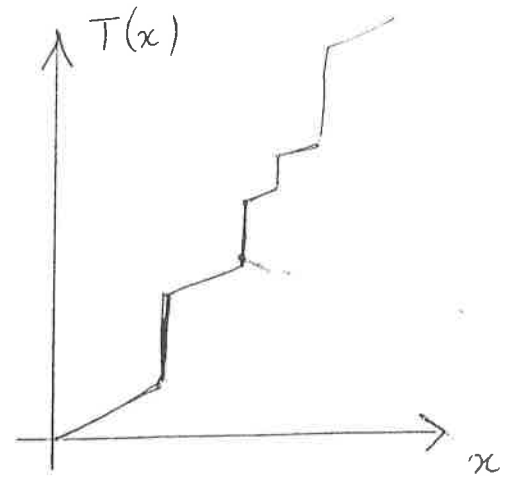
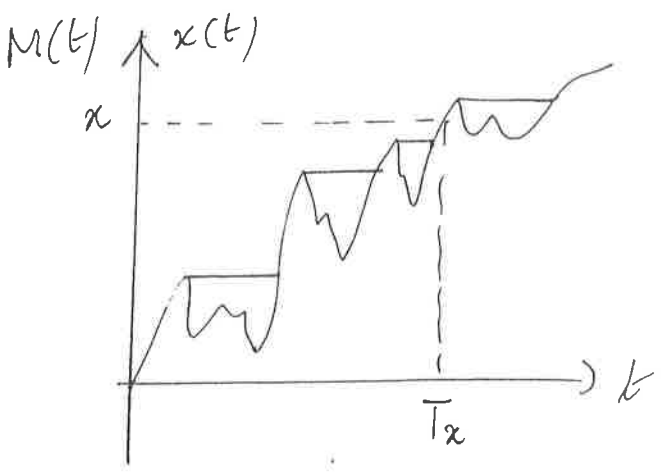
$$P_x(\tau_0 > t) = \int_t^\infty d\tau f_x(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{t}}} dy \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$$

C'est aussi par renversement des trajectoires la probabilité pour un brownien issu de 0 de ne pas avoir atteint le niveau x au temps t qui est la distribution du maximum

$$P_x(\tau_0 > t) = P_0 \left[\max_{\tau \in [0, t]} x(\tau) < x \right] = P_0 [M(t) < x]$$

qui est la fonction que nous avons déjà calculé par Feynman-Kac.

On peut comprendre ce résultat de façon plus intrinsèque en dessinant le ~~tra~~ processus des maximum et celui de sa fonction inverse.



C'est un processus croissant qui admet une fonction inverse définie par

$$T_x = \inf (t > 0, M(t) \geq x)$$

Nous verrons plus loin que T_x que T_x est en fait un processus de Levy croissant appelé subordonneur

(2) la probabilité $Q(x, t)$ de ne pas avoir atteint l'origine au temps t

$$Q(x, t) = P_x(\tau_0 > t)$$

se comporte pour $t \rightarrow \infty$ comme

$$Q(x, t) = \int_t^\infty \frac{d\tau}{\tau^{3/2}} \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$$

De façon générale lorsque $Q(x, t)$ a une décroissance algébrique en $t^{-\theta}$

θ s'appelle l'exposant de persistance.

On peut vérifier que la proba de "survie" est

$$Q(x, t) = \int_0^\infty P[y, t | x, 0] dy$$

où $P[y, t | x, 0]$ est le propagateur sur $[0, \infty[$ avec condition de Dirichlet en $x = 0$

$$\begin{aligned} P[y, t | x, 0] &= G(y, t | x, 0) - G[y, t | -x, 0] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left[\exp - \frac{(y-x)^2}{2t} - \exp - \frac{(y+x)^2}{2t} \right] \end{aligned}$$