Probabilité et processus stochastiques

pour les physiciens et les curieux.

Cours n° 6

10 avril 2009

Michel Bauer

IPhT et LPTEns

Cours de l'IPhT L'orme des Merisiers

Aujourd'hui

* Martingales et martingales locales

* Théorème de Girsanov, conditionnement
  (et chemin réationnels)

* Quelque notions sur le temps local

* Un processus de Levy associé au brownien

Martingales versus martingales locales.

Sur un exemple.

A) Rappels

- Soit $0 < x < L$. Quelle est la probabilité qu'un brownien partant de x sorte de $[0,L]$ en L ?

On peut reproduire mot pour mot les arguments donnés dans le cadre de la marche aléatoire simple et trouver

$$p_L = \frac{x}{L}$$

- Soit $0 < y < x < L$. Pour le brownien conditionné, partant de x, à sortir de $[0,L]$ en L, quelle est la probabilité de passer en y avant de sortir de $[0,L]$?

On applique les règles de base des probabilités conditionnelles. La probabilité recherchée, $p_{L,y}$, vaut

$$p_{L,y} = \frac{p(\text{passer en } y \text{ puis sortir en } L)}{p(\text{sortir en } L)} = \frac{\frac{L-x}{L-y}\,\frac{y}{L}}{\frac{x}{L}}$$

$$\underline{p_{L,y} = \frac{L-x}{L-y}\,\frac{y}{x}}$$

B) Mouvement brownien conditionné à sortir de $[0,L]$ en L

Par définition, si U est une variable aléatoire,

$$\tilde{\mathbb{E}}(U) = \mathbb{E}(U\,\mathbb{1}_{\text{sortir de } [0,L] \text{ en } L}) \,/\, \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\text{sortir de } [0,L] \text{ en } L})$$

Soit $A \equiv \{\text{sortir de } [0,L] \text{ en } L\}$. On suppose que le processus démarre en $x \in]0,L[$. On définit la martingale fermée

$$M_t = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mid \mathcal{F}_t) / \mathbb{E}(\mathbb{1}_A)$$

Supposons que U soit $\mathcal{F}_t$-mesurable. Alors

$$\tilde{\mathbb{E}}(U) = \frac{\mathbb{E}(U \mathbb{1}_A)}{\mathbb{E}(\mathbb{1}_A)} = \frac{\mathbb{E}(\mathbb{E}(U \mathbb{1}_A \mid \mathcal{F}_t))}{\mathbb{E}(\mathbb{1}_A)} = \frac{\mathbb{E}(U\, \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mid \mathcal{F}_t))}{\mathbb{E}(\mathbb{1}_A)} = \mathbb{E}(U M_t)$$

$$\underline{\tilde{\mathbb{E}}(U) = \mathbb{E}(U M_t)}$$

Calculons M_t plus précisément

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \frac{x}{L} = \frac{B_0}{L}$$

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{1}_{\text{sortie de } [0,L] \text{ en } L \text{ avant } t} + \mathbb{1}_{\text{reste dans }]0,L[\text{ jusqu'à } t} \frac{B_t}{L}$$

écriture 1

$$= \frac{B_{t \wedge T_{0,L}}}{L}$$

écriture 2, où $T_{0,L}$ = temps où le brownien sort de $(0,L]$

$$\underline{M_t = \frac{B_{t \wedge T_{0,L}}}{B_0}}$$

D'après le théorème de Girsanov, comme

τ_L : sur $\hat{E}$, pas de sortie en 0

$$\frac{dM_t}{M_t} = \frac{dB_t}{B_t} \mathbb{1}_{t \leq \tau_{0,L}} \quad , \text{ sous } \tilde{\mathbb{E}}$$

$$B_t - \int_0^{t \wedge \tau_L} \frac{ds}{B_s} \text{ est un mouvement brownien}$$

Si, pour éviter les confusions on note R_t le brownien conditionné à sortir de $[0,L]$ en L on a donc, sous $\tilde{\mathbb{E}}$

$$R_t - \int_0^{t \wedge \tau_L} \frac{ds}{R_s} = W_t, \text{ brownien standard.}$$

C) La limite $L \to \infty$

* Coté probabilités élémentaires $p_{L,y} = \frac{L-x}{L-y} \frac{y}{x}$ $\quad 0 < y < x < L$ a un limite quand $L \to \infty$

$$p_{\infty,y} = \frac{y}{x}$$

* Côté Girsanov, il y a un processus limite R_t tel que

$$R_t - \int_0^t \frac{ds}{R_s} = W_t \text{ soit un brownien. } (\text{car } T_L \to \infty)$$

* Côté fonction de transition, la martingale qui change de probabilité est $\frac{B_{t\wedge T_0}}{B_0} = \frac{B_t}{B_0} \mathbb{1}_{t \leq T_0}$ donc $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t$.
$x = x_0, x_1, \dots, x_n \geq 0$

$$\tilde{p}\left(B_{t_1} \in [x_1, x_1 + dx_1], \dots, B_{t_n} \in [x_n, x_n + dx_n] \right)$$

$$= p\left(B_t \geq 0 \ t \in [t_0, t_1], B_{t_1} \in [x_1, x_1 + dx_1], B_t \geq 0 \ t \in [t_1, t_2], \dots, B_{t_n} \in [x_n, x_n + dx_n] \right) \frac{B_{t_n}}{B_{t_0}}$$

On utilise le principe de reflexion pour calculer p: pour aller de $y > 0$ à $z > 0$ dans le temps t sans passer par 0, le brownien a densité

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left(e^{-\frac{(y-z)^2}{2t}} - e^{-\frac{(y+z)^2}{2t}} \right) \equiv g_A(t, y, z)$$

Finalement :

$$\tilde{p}\left(R_{t_1} \in [x_1, x_1 + dx_1], \dots, R_{t_n} \in [x_n, x_n + dx_n] \right)$$

$$= \frac{x_1}{x_0} g(t_1 - t_0, x_0, x_1) \cdot \frac{x_2}{x_1} g(t_2 - t_1, x_1, x_2) \cdots \frac{x_n}{x_{n-1}} g(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$$

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n \qquad x = x_0, x_1, \dots, x_n > 0$$

→ Remarques :

- Le processus est bien markovien comme prévu
- En comparant avec le processus de Bessel 3d (cf notes précédentes)

il apparaît que Bessel 3d $\underset{\text{loi}}{\sim}$ Brownien conditionné à ne pas repasser en 0

Fonctions de transition, EDS

- $\frac{z}{y} q_A(t, y, z)$ a une limite quand $y \to 0$, donc rien n'empêche de démarrer le processus en 0, comme on s'y attend pour Bessel 3d :

$$\lim_{y \to 0} \frac{z}{y} q_A(t, y, z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{t^{3/2}} z^2 e^{-z^2/2t}$$

D] Des temps d'arrêt et une martingale ... locale.

Pour R_t tel que $R_0 = x > 0$ $R_t - \int_0^t \frac{ds}{R_s} = W_t$ brownien

$P_{\infty,y} = \frac{y}{x}$ $y < x$ nous dit que R_t passe en y avec

probabilité $\frac{y}{x}$. Soit T_y le temps d'arrêt

$$\underline{T_y = \sup\{t,\ R_t > y\}}$$

Alors $p(T_y = +\infty) = 1 - \frac{y}{x} \xrightarrow[y \to 0^+]{} 1$

Pour $n = 1, 2, \ldots$, si n est assez grand $\frac{1}{n} < x$ et on peut

parler de $T_{1/n}$. On a $T_{1/n} < T_{1/n+1}$ et

Comme $p(T_{1/n} = \infty) = 1 - \frac{1}{nx}$ on a $\lim_{n \to \infty} p(T_{1/n} = \infty) = 1$ donc

à fortiori. $p(\lim_{n \to \infty} T_{1/n} = +\infty) = 1$

Calculons $d\frac{1}{R_t}$ avec la formule d'Itô.

$$dR_t = dW_t + \frac{dt}{R_t} \qquad (dR_t)^2 = (dW_t)^2 = dt$$

$$d\,f(R_t) = f'(R_t)\,dR_t + \frac{1}{2} f''(R_t)\,(dR_t)^2 \quad \text{donne}$$

$$d\frac{1}{R_t} = -\frac{dW_t}{R_t^2} + 0 \cdot dt.$$

d'où
$$\frac{1}{R_t} - \frac{1}{x} = -\int_0^t \frac{dW_s}{R_s^2}$$

L'intégrale a un sens si $p\left(\int_0^t \frac{ds}{R_s^4} < +\infty\right) = 1$ et c'est une martingale si $\mathbb{E}\left(\int_0^t \frac{ds}{R_s^4}\right) < +\infty$. Sinon, c'est seulement une martingale locale.

Nous allons vérifier indirectement que $p\left(\int_0^t \frac{ds}{R_s^4} < +\infty\right) = 1$ mais

$\mathbb{E}\left(\int_0^t \frac{ds}{R_s^4}\right) = +\infty$ en montrant que $\frac{1}{R_t}$ est une martingale locale, mais pas une martingale.

Soit $U_{n,s} \equiv \frac{1}{R_s^2} \mathbb{1}_{\tau_{1/n} > s}$, bien défini pour n assez grand.

Pour n fixe $U_{n,s}(\omega) \in [0, n^2]$ pour tout (t, ω) donc

$\mathbb{E}\left(\int_0^t U_{n,s}^2 \, ds\right) < +\infty$ et $-\int_0^t U_{n,s} \, dW_s$ est une martingale.

Mais $-\int_0^t U_{n,s} \, dW_s = -\int_0^{t \wedge \tau_{1/n}} \frac{dW_s}{R_s^2} = \frac{1}{R_{t \wedge \tau_{1/n}}} - \frac{1}{x}$, donc $\frac{1}{R_{t \wedge \tau_{1/n}}}$ est une martingale.

<u>Concl:</u> $\frac{1}{R_t}$ est une martingale locale, si $\tau_y = \sup\{t, R_t > y\}$

alors $p(\lim_{n \to \infty} \tau_{1/n} = +\infty) = 1$ et $\frac{1}{R_{t \wedge \tau_n}}$ est une martingale.

E] $\frac{1}{R_t}$ n'est pas une martingale

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{R_t}\right) = \int_0^\infty dy \, \frac{y}{x} \, \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} \, \frac{1}{y}$$

Calcul direct.

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{R_t}\right) = \frac{1}{x}\left[\int_{-x}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}} - \int_{+x}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}}\right]$$

$$= \frac{1}{x} \int_{-x}^{x} \frac{dy}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}} \Rightarrow$$

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{R_t}\right) - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x} \int_{\frac{x^2}{2t}}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{\pi}} u^{-1/2} e^{-u} < 0$$

$\mathbb{E}\left(\frac{1}{R_t}\right)$ est une fonction décroissante de t

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{R_t}\right) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \quad t \to \infty$$

F] Remarques générales

Il y a plusieurs paradygmes pour expliquer que $\frac{1}{R_t}$ n'est pas une martingale.

- Dans la vision tridimensionnelle :

$\vec{B}_t$ est un brownien 3d, avec ses trois composantes indépendantes et $R_t = \|\vec{B}_t\| = \sqrt{B_t^{(1)\,2} + B_t^{(2)\,2} + B_t^{(3)\,2}}$

La formule d'Itô dit

$$d f(\vec{B}_t) = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{B}_t + \frac{1}{2} \Delta f \, dt$$

et $\Delta \frac{1}{\|\vec{r}\|} = 0$ (presque)

En fait $\Delta \frac{1}{\|\vec{r}\|} = 4\pi \, \delta^{(3)}(\vec{r})$ donc au sens des distributions

$$d \frac{1}{\|\vec{B}_t\|} = - \frac{\vec{B}_t \cdot d\vec{B}_t}{\|\vec{B}_t\|^3} + 2\pi \, \delta^3(\vec{B}_t) \, dt$$

et $\frac{1}{\|\vec{B}_t\|}$ n'est pas une martingale au sens des distributions.

C'est un peu troublant car on a vu que R_t ne s'annulle jamais, et effectivement $\vec{B}_t$ ne repasse jamais en 0. Néanmoins

$$\mathbb{E}(\delta^3(\vec{B}_t)) = \int d^3r \; \delta^3(\vec{r}) \frac{1}{(2\pi t)^{3/2}} e^{-\frac{\|\vec{r}-\vec{r}_0\|^2}{2t}} = \frac{1}{(2\pi t)^{3/2}} e^{-\frac{\|\vec{r}_0\|^2}{2t}}$$

d'où l'on déduit naïvement

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}\left(\frac{1}{\|\vec{B}_t\|}\right) = 0 + \frac{2\pi}{(2\pi t)^{3/2}} e^{-\frac{\|\vec{r}_0\|^2}{2t}}$$ à comparer à

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}\left(\frac{1}{\|R_t\|}\right) = \frac{x}{2t^2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{x^2}{2t}\right)^{-1/2} e^{-\frac{x^2}{2t}}$$ idem si $\|\vec{r}_0\| = x$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{x^2}{2t}}.$$

- Dans la vision "fonction de transition"

$$\mathbb{E}(f(R_t)) \equiv \int_0^\infty dy\, H(t,x,y)\, f(y)$$

où $\quad H(t,x,y) \equiv \frac{y}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{2t}} \right)$ est la

fonction de transition

On vérifie que $\quad \frac{\partial H}{\partial t} = D_y H \quad$ où $\quad D_y \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{y}$

On en déduit que

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}(f(R_t)) = \int_0^\infty dy\, (D_y H)\, f(y)$$

On vérifie explicitement que si f est C^2 sur $]0,+\infty[$ et

$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon^2 f'(\varepsilon) = 0$ alors

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}(f(R_t)) = \int_0^\infty dy\, H\, (D_y^* f) = \mathbb{E}(D_y^* f)$$

où $\quad D_y^* = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \quad$ (le laplacien 3d agissant sur les fonctions radiales)

La formule d'Itô dit que

$$d\, f(R_t) = (D_y^* f)(R_t) + \frac{\partial f}{\partial y}(R_t)\, dW_t$$

donc si $\varepsilon^2 f'(\varepsilon) \to 0$ $(\varepsilon \to 0^+)$ alors la formule d'Itô donne une idée correcte de $\frac{d}{dt}\mathbb{E}(f(R_t))$ en disant que

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(R_t)\, dW_t\right) = 0$$

Dans notre cas, $f(R_t) = \frac{1}{R_t}$ $\quad \varepsilon^2 f'(\varepsilon) \to -1$ $(\varepsilon \to 0^+)$ et il reste un terme de bord dans l'intégration par partie, et

$$\underline{\mathbb{E}\left(\int_0^t \frac{dW_t}{R_t^2}\right) \neq 0\ !}$$

Un resultat général dit qu'une martingale locale bornée inférieurement est une super martingale. Donc $\mathbb{E}\left(\frac{1}{R_t} \,|\, \mathcal{F}_s\right) \leq \frac{1}{R_s}$, ce qui est confirmé par notre calcul pour $s=0$ $\mathbb{E}\left(\frac{1}{R_t}\right) \leq \frac{1}{x}$!

Digression

<u>Lemme:</u> une martingale locale bornée inférieurement est une supermartingale, une martingale locale bornée est une martingale

La seconde propriété s'obtient trivialement à partir de la première en considerant M_t et $-M_t$.

Pour la premier, si $m = \inf_{t,\omega} M_t(\omega) > -\infty$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(M_t \mathbb{1}_{t \le \tau_n} \mid \mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(M_t \mathbb{1}_{t > \tau_n} \mid \mathcal{F}_s) \\
&= \mathbb{E}(M_{t\wedge\tau_n} \mathbb{1}_{t \le \tau_n} \mid \mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(M_t \mathbb{1}_{t > \tau_n} \mid \mathcal{F}_s) \\
&= \mathbb{E}(M_{t\wedge\tau_n} (1 - \mathbb{1}_{t > \tau_n}) \mid \mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(M_t \mathbb{1}_{t > \tau_n} \mid \mathcal{F}_s) \\
&= \mathbb{E}(M_{t\wedge\tau_n} \mid \mathcal{F}_s) + \mathbb{E}((M_t - M_{t\wedge\tau_n}) \mathbb{1}_{t > \tau_n} \mid \mathcal{F}_s) \\
&= M_s + \mathbb{E}((M_t - M_{\tau_n}) \mathbb{1}_{t > \tau_n} \mid \mathcal{F}_s) \\
&\le M_s + \mathbb{E}(\underbrace{(M_t - m) \mathbb{1}_{t > \tau_n}}_{0 \le \quad \le M_t - m} \mid \mathcal{F}_s)
\end{aligned}$$

et $\to 0$ ps qd $n \to \infty$ donc

par convergence dominée $\mathbb{E}((M_t - m) \mathbb{1}_{t > \tau_n} \mid \mathcal{F}_s) \to 0$ $n \to \infty$ donc

$\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) \le M_s$ CQFD

Processus de Bessel :

Soit $\vec{B}_t = (B_t^{(1)}, \dots, B_t^{(d)})$ le brownien en d dimensions, partant de $\vec{r}_0$. On définit $R_t \equiv \|\vec{B}_t\|$, la norme euclidienne : R_t s'appelle le processus de Bessel en d dimensions.

- Le processus de Bessel est un processus de Markov : pour la filtration $\mathcal{F}_t^{\vec{B}}$: pour $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+}$ et $t \geq s$

$$p(R_t \in A \mid \mathcal{F}_s^{\vec{B}}) = \int_{|\vec{r}| \in A} d^d\vec{r} \, \frac{1}{(2\pi(t-s))^{d/2}} \, e^{-\frac{\|\vec{r} - \vec{B}_s\|^2}{2(t-s)}}$$

L'intégrale angulaire fait que le résultat ne dépend que de $R_s = \|\vec{B}_s\|$ et de la différence $t-s$, donc R_t est un processus de Markov homogène en temps.

Le calcul explicite de l'intégrale fait intervenir des fonctions de Bessel (d'où le nom). Pour d impair, tout est élémentaire. Nous aurons besoin du cas $d=3$. En coordonnées sphériques, il vient

$$p(R_t \in A \mid \mathcal{F}_s^{\vec{B}}) = \int_{\substack{r \in A \\ \theta \in [0,\pi] \\ \varphi \in [0,2\pi]}} r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi \, \frac{1}{(2\pi(t-s))^{3/2}} \, e^{-\frac{r^2 \sin^2\theta + (r\cos\theta - R_s)^2}{2(t-s)}}$$

$$= \int_{\substack{r \in A \\ u \,(=\cos\theta) \in [-1,1]}} 2\pi \, r^2 dr \, du \, \frac{1}{(2\pi(t-s))^{3/2}} \, e^{-\frac{r^2+R_s^2}{2(t-s)}} \, e^{\frac{r R_s u}{t-s}}$$

$$= \int_{r \in A} 2 r \, dr \, \frac{1}{(2\pi(t-s))^{1/2}} \, e^{-\frac{r^2+R_s^2}{2(t-s)}} \, \frac{1}{R_s} \, \mathrm{sh} \frac{R_s r}{t-s}$$

$$p(R_t \in A \mid \mathcal{F}_s^{\vec{B}}) = \int_A \frac{2 r \, dr}{(2\pi(t-s))^{1/2}} \, \frac{1}{R_s} \, \mathrm{sh} \frac{R_s r}{t-s} \, e^{-\frac{r^2+R_s^2}{2(t-s)}} \xrightarrow[R_s \to 0]{} \int_A \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{r^2 dr}{(t-s)^{3/2}} \, e^{-\frac{r^2}{2(t-s)}}$$

Calcul de dR_t avec la formule d'Ito :

$$d\,R_t^2 = d\left(B_t^{1\,2} + \dots + B_t^{d\,2}\right)$$

dimension.

$$= \sum_{i=1}^{d} 2\,B_t^i\,dB_t^i + d(dt)$$

$$d\,R_t = d\left(\sqrt{R_t^2}\right) = \frac{d(R_t^2)}{2\,R_t} - \frac{1}{8R_t^3}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{d} 2B_t^i\,dB_t^i\right)^2}_{4R_t^2\,dt}$$

$$dR_t = \frac{d-1}{2}\,\frac{dt}{R_t} + \sum_{i=1}^{d}\frac{B_t^i}{R_t}\,dB_t^i$$

Posons $M_t = \int_0^t \sum_{i=1}^{d} \frac{B_s^i\,dB_s^i}{R_s}$, alors M_t est une martingale locale et $d\langle M\rangle_t = dt$. Donc M_t est un mouvement brownien !

Conclusion : Si R_t est le processus de Bessel en dimension d

$$R_t - R_0 - \frac{d-1}{2}\int_0^t \frac{ds}{R_s} = M_t \text{ est un brownien 1d standard}$$

Théorème de Girsanov, conditionnement (et chemins réactionnels)

A] Motivations :

Supposons qu'on étudie un processus de diffusion, et qu'on soit interessé par l'afflux de trajectoires ayant certaines propriétés (qui impliquent en particulier qu'elles sont rares). Comment les étudier ?

Le théorème de Girsanov peut donner une réponse.

Exemple : $d\vec{X}_t = -\vec{\nabla} V(X_t)dt + \sqrt{K}\, dB_t$ et l'on s'intéresse a des evenements où la trajectoire "remonte" le gradient, ce qui force B_t à être inhabituellement correlé. Ceci est d'autant plus vrai que K est petit.

Rappel : si l'on considère qu'à l'instant initial les particules sont distribuées dans l'espace suivant une mesure μ_0 alors la mesure des particules à l'instant t satisfait

$$\left(\frac{\kappa}{2}\Delta + \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}V)\right)\mu_t = \frac{\partial \mu_t}{\partial t}$$ donc il y a un

courant $\vec{j}_t \equiv \frac{\kappa}{2}\left(\vec{\nabla}\mu_t + \mu_t \vec{\nabla}V\right)$ conservé

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_t = \frac{\partial \mu_t}{\partial t}.$$

Si μ est stationnaire, le courant j associé vérifie $\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$. Une solution particulier est $\vec{j} = 0$

ie $\mu \propto e^{-\frac{2}{\kappa}V}$ une mesure de Gibbs pour $2k_BT = \kappa$. C'est ok si $\int e^{-\frac{2}{\kappa}V} < +\infty$. Sinon il y a un courant non trivial dans l'état stationnaire!

On s'intéresse uniquement aux trajectoires $X_t(\omega)$ pour $\omega \in A$ (disons pour des raisons dictées par la physique). On a donc une mesure

$$\tilde{\mathbb{E}}(U) \equiv \frac{\mathbb{E}(U \mathbb{1}_A)}{\mathbb{E}(\mathbb{1}_A)} \quad \text{avec l'hypothèse } \mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = p(A) > 0.$$

Comme dans le cas discret, on considère $M_t = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mid \mathcal{F}_t) / \mathbb{E}(\mathbb{1}_A)$

Par construction c'est une martingale continue (si A n'est pas trop bizarre) et, si U est $\mathcal{F}_t$ mesurable

$$\tilde{\mathbb{E}}(U) = \frac{\mathbb{E}(U \mathbb{1}_A)}{\mathbb{E}(\mathbb{1}_A)} = \frac{\mathbb{E}(\mathbb{E}(U \mathbb{1}_A \mid \mathcal{F}_t))}{\mathbb{E}(\mathbb{1}_A)} = \frac{\mathbb{E}(U\, \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mid \mathcal{F}_t))}{\mathbb{E}(\mathbb{1}_A)} = \mathbb{E}(U M_t)$$

Le théorème de représentation des martingales, associé au théorème de Girsanov, nous dit que sous $\tilde{p}$, X est une diffusion avec un nouveau drift. (cf : cours 5) Ceci est utile en pratique surtout si M_t est calculable explicitement,

ce qui n'est pas le cas générique. Pour des raisons de simplicité, nous nous concentrons sur le cas sans intérêt (physique) de la dimension 1.

B] Généralités sur les diffusions en dimension 1.

Soit $-\infty < \ell < r < +\infty$ et X_t une diffusion sur $[\ell, r]$ c'est à dire un processus de Markov continu et homogène en temps.

Si $\ell \leq a \leq x \leq b \leq r$ $p_x(a,b) \equiv$ probabilité, partant de x, de toucher b avant a

On prend $a \leq b \leq c \leq d$ en on écrit des propriétés de p qui découlent de la continuité et de la propriété de Markov:

* partant de b, pour aller en d on passe par c donc

(1) $p_b(a,d) = p_b(a,c)\, p_c(a,d)$ (d'où $p_\bullet(a,d) \nearrow$ avec $\bullet$)

** partant de c pour aller en d on passe par b -- au pas

(2) $p_c(a,d) = (1 - p_c(b,d))\, p_b(a,d) + p_c(b,d)$

On veut resoudre (1) et (2), qui ressemblent à des relations de cocycle, avec un aspect additif et multiplicatif. Ce n'est peut être pas une surprise alors que, sous l'hypothèse $p_x(\ell, r) \neq 0,1 \quad \forall x \in]\ell, r[$ il existe une fonction $s(x)$ $x \in [\ell, r]$ croissante telle que

cocycle pour + et x

$$p_x(a,b) = \frac{s(x) - s(a)}{s(b) - s(a)} \qquad \ell \leq a \leq x \leq b \leq r$$

"s" est la fonction d'échelle de la diffusion :

on peut supposer $s(\ell) = 0$ $s(r) = 1$, et le processus $\underbrace{Y_t = s(X_t)}_{\text{une nouvelle diffusion.}}$ sur $[0,1]$ a une fonction d'echelle qui vaut $\tilde{s}(y) = y$ ...

Remarque : on peut aussi associer à $X_\bullet$ une "mesure de vitesse" intrinsèque, version abstraite des changement de temps.

C] Diffusions d'Itô en dimension 1

La diffusion générale est $dX_t = -V'(X_t)\,dt + U(X_t)\,dB_t$ et on peut montrer que c'est aussi général que B].

Ici nous nous restreignons au cas $U \equiv$ cste

$$dX_t = -V'(X_t)\,dt + \sqrt{K}\,dB_t \quad (\text{sur } [\ell, r] \text{ par exemple}).$$

On veut calculer la fonction d'échelle, et pour cela on calcule $p_x(a,b)$ $\quad \ell \leq a \leq x \leq b \leq r$.

On fixe a et b, T_a = temps de premier passage en a, $T_b = \dots$

$$T = T_a \wedge T_b = \min(T_a, T_b) \quad (\text{depend de } x)$$

$$p_x(a,b) = P_x(T_b < T_a)$$

Soit E l'évenement (portant de x) $\{T_b < T_a\}$.

$M_t = \mathbb{E}(\mathbb{1}_E \mid \mathcal{F}_t)$ est une martingale.

Par continuité et propriété de Markov

$$M_t = \mathbb{1}_{X_s \text{ sort de } [a,b] \text{ par } b \text{ avant } t}$$

$$+ \mathbb{1}_{X_s \text{ reste dans }]a,b[\text{ jusqu'à } t} \, P_{X_t}(a,b)$$

$$= \mathbb{1}_{T>t} \, P_{X_t}(a,b) + \mathbb{1}_{T_b < t \wedge T_a}$$

$$= \int_0^{t \wedge T} dP_{X_s}(a,b)$$ (car $P_a(a,b)=0$ $P_b(a,b)=1$ et regarder les différents cas)

Comme M_t est une martingale continue (si V n'est pas trop sauvage), $P_{X_t}(a,b)$ est aussi une martingale. (pour t proche de 0, $t<T$ devient de probabilité 1 !).

Donc $\left(\frac{\kappa}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - V'(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) p_x(a,b) = 0$ par la formule d'Itô (absence de terme en dt).

Avec les conditions aux limites, on obtient

$$p_x(a,b) = \frac{s(x)-s(a)}{s(b)-s(a)} \quad \text{où} \quad s(x) = \int^x du\, e^{\frac{2}{K}V(u)}$$

sous réserve de convergence de l'intégrale pour $x \to b^-$ et $x \to a^+$

Si V est C^1 sur $]\ell, r[$ et $\ell < a < b < r$ c'est ok.

Il peut se passer des choses si V est assez singulier en ℓ ou r

$$\left.\begin{array}{ll} \text{si} \quad \int^r du\, e^{\frac{2}{K}V(u)} = +\infty & \text{pas de sortie en } r \\ \text{si} \quad \int_\ell du\, e^{\frac{2}{K}V(u)} = +\infty & \text{pas de sortie en } \ell \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{si les deux,} \\ \text{alors} \\ \text{confiné sur }]\ell, r[.\end{array}$$

Remarque : ceci se généralise au temps moyen de sortie

Si $T(x) = T_a^{(x)} \wedge T_b^{(x)}$ on vérifie que si $\tau(x) \equiv \mathbb{E}(T(x))$

$\mathbb{E}(T(x) \mid \mathcal{F}_t) = \text{"}\underbrace{\tau(X_t) + t}_{\text{sous } t < T(x)}\text{"}$ est une martingale d'où

$$\frac{K}{2}\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} - V'\frac{\partial \tau}{\partial x} = -1 \quad \text{par Itô}$$

En intégrant soigneusement cette equation, il vient

$$\mathbb{E}^x(T) = \tau(x) = \frac{2}{K}\,\frac{1}{\int_a^b dy\, e^{\frac{2}{K}V(y)}} \int_a^x dw\, e^{\frac{2}{K}V(w)} \int_x^b dv\, e^{\frac{2}{K}V(v)} \int_w^v du\, e^{-\frac{2}{K}V(u)}$$

sous réserve de convergence (ou de prendre les limites appropriées le cas échéant :

exemple : si $s(a) = \int_a du\, e^{\frac{2}{K}V(u)} = +\infty$ mais $\int_a du\, e^{-\frac{2}{K}V(u)} < +\infty$

$$T(x) = T_b^{(x)} \text{ et } \mathbb{E}^x(T) = \frac{2}{K}\int_x^b dv\, e^{\frac{2}{K}V(v)} \int_a^v du\, e^{-\frac{2}{K}V(u)}$$

D) Conditionnement

A sortie en b, sous l'hypothèse $\int_a^b du\, e^{\frac{2}{K}V(u)} < +\infty$

Nous avons vu que $M_t = \int_0^{t\wedge T} dP_{X_s}(a,b)$ est la

martingale de conditionnement. Le théorème de Girsanov dit que sous $\tilde{\mathbb{E}}$ on a

$$dX_t = -V'(X_t)\,dt + K\left(\log p_x(a,b)\right)'(x=X_t)\,dt + \sqrt{K}\,d\tilde{B}_t$$

où $\tilde{B}_t$ est un brownien sous $(\tilde{\mathbb{E}}, \tilde{p})$

Le nouveau potentiel pour les trajectoires conditionnées est donc

$$\tilde{V}(x) = V(x) - K \log \int_a^x e^{\frac{2}{K}V(u)}\,du$$

Pour $x \to a^+$ $\tilde{V}(x) \sim -K\log(x-a)$ et $e^{\frac{2}{K}\tilde{V}(x)} \sim \frac{1}{(x-a)^2}$

n'est effectivement pas intégrable : si l'on conditionne à sortir en b il y a une barrière en a !

Le temps de sortie après conditionnement

$$\tilde{\tau}(x) = \frac{2}{K}\int_x^b dv\, e^{\frac{2}{K}\tilde{V}(v)} \int_a^v du\, e^{-\frac{2}{K}\tilde{V}(u)}$$

E] Exemple : le potentiel linéaire :

$V(x) = Ux$ entre $a=0$ et $b>0$

$$p_x(0,b) = \frac{e^{\frac{2}{K}Ux} - 1}{e^{\frac{2}{K}Ub} - 1} \qquad T(x) = \frac{1}{U}\left(x - b\,\frac{e^{\frac{2}{K}Ux} - 1}{e^{\frac{2}{K}Ub} - 1}\right)$$

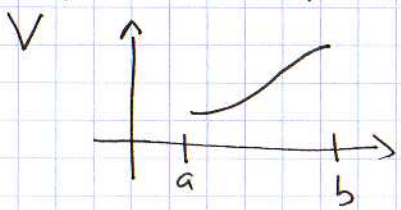
$$\tilde{V}(x) = Ub - K \log\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{Ux}{K}}{\operatorname{sh}\frac{Ub}{K}}\right) \qquad \tilde{T}(x) = \frac{1}{U}\left(\frac{b}{\operatorname{th}\frac{Ub}{K}} - \frac{x}{\operatorname{th}\frac{Ux}{K}}\right)$$

Tout ça s'obtient par des calculs explicites un peu longuets !

Le lecteur est invité à vérifier la limite $U \to 0$

F] La limite de basse température ($K \to 0$)

Supposons que sur $[a,b]$ on a $V'(x) > 0$ (ie V croît de a à b)



Dans ce cas, pour K petit la particule roule vers a et $p_x(a,b) \to 0$ $K \to 0$, Vérification :

Comme $\displaystyle\int_w^v du\, e^{-\frac{2}{K}V(u)} \sim e^{-\frac{2}{K}V(w)} \frac{K}{2V'(w)}$

on a $\displaystyle\tau(x) \longrightarrow \int_a^x \frac{dw}{V'(w)}$ (ok : c'est bien le résultat à $K=0$)

(2') compensé par (1)

car $$\tau(x) = \frac{2}{K} \frac{1}{\int_a^b dy\, e^{\frac{2}{K}V(y)}} \int_a^x dw\, e^{\frac{2}{K}V(w)} \underbrace{\int_x^b dv\, e^{\frac{2}{K}V(v)}}_{(2)\ e^{2/K\, V(b)} \frac{K}{2V'(b)}} \underbrace{\int_w^v du\, e^{-\frac{2}{K}V(u)}}_{(1)\ \sim e^{-\frac{2}{K}V(w)} \frac{K}{2V'(w)}}$$

(0) $\sim e^{2/K\, V(b)} \frac{K}{2V'(b)}$

$(0) = (2)$

ne dépend pas de v

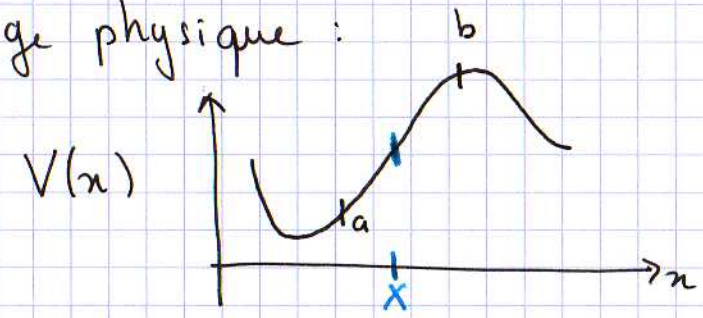
$$\tau(x) \longrightarrow \int_a^x \frac{dw}{V'(w)}$$

On regarde maintenant $\tilde{V}$

$$\tilde{V}(x) = V(x) - k \log \underbrace{\int_a^x e^{2/k\, V(u)}\, du}_{\sim\, e^{2/k\, V(x)} \frac{k}{2V'(x)} \quad k \to 0^+}$$

d'où $\underline{\tilde{V}(x) \to -V(x)}$ Le potentiel est retourné.

Image physique :



k petit : très longtemps la particule oscille au fond du puit (à $k=0$ elle tends vers le fond exponentiellement).

Mais au bout d'un temps très long, il y a une grande déviation dans B, et la particule va jusqu'en b.

Cet evenement rare à l'aspect d'une trajectoire à $k=0$ dans le potentiel $-V$!

Exercice : (facile) : faire le cas au $V'(b)=0$ (passage de la barrière) avec la méthode du col !

Quelques notions sur le temps local

A) Le temps local

Soit B_t un brownien à une dimension et A une partie mesurable de $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Le temps passé par $B_\bullet$ dans A entre 0 et t peut s'écrire

$$\int_0^t \mathbb{1}_{B_s \in A} \, ds = L_t(A, \omega)$$

(dépend de $\omega \in \Omega$ où vit $B_\bullet$)

Pour tout t et ω, ceci définit une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$: si

$A = \bigcup_n A_n$ union disjointe avec $A_n \in \mathcal{B}$ $n = 1, 2, \dots$

alors $\mathbb{1}_{B_s \in A} = \sum_n \mathbb{1}_{B_s \in A_n}$ et Fubini.

On démontre (mais c'est non trivial) le résultat suivant :

ω-ps $L_t(A, \omega)$ a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue et cette densité peut être choisie continue en x et t

$$L_t(A, \omega) = \int_A \ell_t(x, \omega) \, dx$$

Le processus $\ell_t(x,\omega)$ est progressivement mesurable. et

$$\ell_t(x,\omega) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \mathbb{1}_{B_s(\omega) \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]} \, ds \qquad \omega\text{-ps}$$

Une fois le travail mathématique fait, le physicien peut travailler avec la définition $\ell_t(x,\omega) = \int_0^t ds \; \delta(B_s - x)$

B) Propriétés intuitives :

- $\ell_t(x,\omega)$ est une fonction croissante (au sens large) de t, plate sur les intervalles de temps où $B_\cdot$ ne visite pas x :

- comme le brownien est continu, $\{t, B_t = x\}$ est un fermé. et comme le brownien oscille (cf cours 4) $\{t, B_t = x\}$ n'a pas de points isolés. Donc $\{t, B_t = x\}$ est un ensemble parfait de type Cantor.

- on argumentera tout à l'heure que $F_x = \{t, B_t = x\}$ a dimension $1/2$ (au sens Hausdorff-Besicovitch). En conclusion $\ell_t(x)$ pour x fixé est un escalier du diable : continu, presque partout dérivable et de dérivée nulle, mais quand même croissante :

$$p\left(\lim_{t \to \infty} \ell_t(x,\omega) = +\infty \right) = 1.$$ car le brownien 1-d est récurrent

c) Temps local et formule d'Itô

Nous avons vu que dans le cas discret, une sous martingale X_n se décompose de manière unique : $X_n = M_n + I_n$

($\mathbb{E}(|X_n|) < +\infty \ \forall n$ et $\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_m) \geq X_m \quad m \leq n$

$M_0 = 0$, M_n martingale, $I_n \nearrow$ et $\mathcal{F}_{n-1}$ mesurable $n \geq 1$)

Nous avons alors mentionné les questions conceptuelles posées par la généralisation au cas du temps continu :

Regardons quand même le cas particulier du processus $|B_t - x|$.

- C'est une sous martingale

  → abstraitement $B_t - x$ est une martingale et $|\ |$ est une fonction convexe

  → par le calcul direct (copie du cas discret)

$$|\tilde{B}_t| = \tilde{B}_t \left(\mathbb{1}_{\tilde{B}_s \geq 0} - \mathbb{1}_{\tilde{B}_s < 0} \right) \qquad \tilde{B}_\cdot = B_\cdot - x$$

$$+ 2|\tilde{B}_t| \left(\mathbb{1}_{\tilde{B}_t \geq 0} \mathbb{1}_{\tilde{B}_s < 0} + \mathbb{1}_{\tilde{B}_t < 0} \mathbb{1}_{\tilde{B}_s \geq 0} \right)$$

Exercice : en déduire $\mathbb{E}\left(|\tilde{B}_t| \mid \mathcal{F}_s \right) \geq |\tilde{B}_s| \qquad s \leq t$

- Y a t-il une décomposition

$$|B_t - x| = M_t + I_t \quad \text{naturelle ?}$$

Ecrivons naïvement la formule d'Itô pour $f(y) = |y-x|$ (qui n'est pas C^2 en y) au sens des distributions

* $f'(y) = \text{sign}\,(y-x)$ (convention $\text{sign}\, u = \begin{cases} 1 & u \geq 0 \\ -1 & u < 0 \end{cases}$)

  $f''(y) = 2\,\delta(y-x)$

* d'où $d\,|B_t - x| = \text{sign}\,(B_t - x)\,dB_t + \delta(B_t - x)\,dt.$

Il n'est pas trop difficile de montrer que $\text{sign}\,(B_t - x)$, qui est de carré intégrable car borné par 1, se laisse bien approcher par des processus simples au sens de $\int_0^t \mathbb{E}(\ )^2\,ds$.

Pour $n = 1, 2, \ldots$ on considère $U_s^{(n)} \equiv \text{sign}\,(B_{\frac{1}{n}\lfloor ns \rfloor} - x)$, et on peut supposer $t = \frac{m}{n}$

On veut donc contrôler

$$\int_0^t \mathbb{E}\left(\left(\operatorname{sign}(B_s - x) - U_s^{(n)}\right)^2\right) ds = \sum_{\ell=0}^{n-1} \int_{\frac{\ell}{n}}^{\frac{\ell+1}{n}} ds\, \mathbb{E}\left(\left(\operatorname{sign}(B_s - x) - \operatorname{sign}\left(B_{\frac{\ell}{n}} - x\right)\right)^2\right)$$

le terme $\ell = 0$ donne

$$\int_0^{\frac{1}{n}} ds\, 4 \int_{|x|}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{2\pi s}}\, e^{-\frac{z^2}{2s}} \leq \frac{2}{n} \quad \text{ok !}$$

les termes $\ell \neq 0$ donnent

$$\int_{\frac{\ell}{n}}^{\frac{\ell+1}{n}} ds\, 4 \int_{(y-z)(z-x) \leq 0} dy\, dz\, \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\ell}{n}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi \left(s - \frac{\ell}{n}\right)}}\, e^{-\frac{y^2}{2\ell/n}}\, e^{-\frac{(y-z)^2}{2\left(s - \frac{\ell}{n}\right)}}$$

On translate y et z de x et on pose $s - \frac{\ell}{n} = \frac{\alpha}{n}$ $\alpha \in [0,1[$

d'où une contribution

$$\int_0^1 \frac{d\alpha}{n}\, 4 \int_{yz \leq 0} dy\, dz\, \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\ell}{n}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\alpha}{n}}}\, e^{-\frac{(y+x)^2}{2\ell/n}}\, e^{-\frac{(y-z)^2}{2\frac{\alpha}{n}}}$$

Le cas $x \neq 0$ est un peu plus facile (car B_t ne passe pas de suite en x) Dans le cas $x \neq 0$ on pose $y = u\sqrt{\frac{\alpha}{n}}$ $z = v\sqrt{\frac{\alpha}{n}}$ et

la contribution $\ell \neq 0$ devient

$$\frac{1}{n^{3/2}} \frac{2}{\pi} \int_0^1 d\alpha \sqrt{\alpha} \int_{uv \leq 0} du\,dv \frac{1}{\sqrt{\ell/n}} e^{-\frac{\left(u\sqrt{\frac{\alpha}{n}}+x\right)^2}{2\ell/n}} e^{-\frac{(u-v)^2}{2}}$$

On veut sommer par $\ell = 0$ à $m-1$ $\left(t = \frac{m}{n}\right)$. Si l'on néglige pour n grand le terme $u\sqrt{\frac{\alpha}{n}}$ dans la première exponentielle, on a exactement une somme de Riemann et l'on en déduit naivement

$$\int_0^t \mathbb{E}\left(\left(\operatorname{sign}(B_s - x) - L_s^{(n)}\right)^2\right) ds \sim \frac{1}{n^{1/2}} \frac{2}{\pi} \underbrace{\int_0^1 d\alpha \sqrt{\alpha}}_{2/3} \int_0^t d\beta \underbrace{\int_{uv \leq 0} du\,dv\, e^{-\frac{(u-v)^2}{2}}}_{1} \frac{e^{-\frac{x^2}{2\beta}}}{\sqrt{\beta}}$$

$$\sim \frac{1}{n^{1/2}} \frac{4}{3\pi} \int_0^t \frac{d\beta}{\sqrt{\beta}} e^{-\frac{x^2}{2\beta}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \qquad \text{ok.}$$

On laisse le cas $x=0$ au lecteur. (je crois qu'on peut faire $x=0$ dans la formule précédente !).

Donc on a montré que $\int_0^t \text{sign}(B_s - x)\, dB_s$ a un sens, et le calcul précédent montre même que la convention sur le signe ne joue pas de rôle, car la même suite $\sqcup_s^{(n)}$ approche aussi $\text{sign}(B_s - x)$ avec l'autre convention.

Comme $\text{sign}(B_s - x)$ est borné, et de carré 1, on conclut que : $W_t = \int_0^t \text{sign}(B_s - x)\, dB_s$ est une martingale, et même un brownien :

Si l'on utilise la définition naïve du temps local on obtient

$$|B_t| = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{brownien}}}{W_t} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{processus croissant}}}{\ell_t(x)}$$

On a donc une décomposition de Doob (-Meyer)

Tout cela peut se justifier rigoureusement et amène à une généralisation de la formule d'Itô.

Une fonction f convexe générale peut être vu comme une fonction dont la dérivée seconde est une mesure (positive) dont les parties de saut (delta) donnent dans un changement de variable des contributions qui font intervenir les temps locaux quand B passe par les points de saut de f''

Dans le cas $x = 0$, nous avons vu au cours 4 que

$Y_t = \sup_{s \leq t} B_s - B_t$ était le même processus (pour les lois marginales finies) que $|B_t|$ (égalité en loi seulement, bien sûr)

Mais $-B_t$ est une martingale et $\sup_{s\leq t} B_s$ est un processus croissant. Comme il y a unicité de la décomposition de Doob (-Meyer) on conclut que $\ell_t(0) = \text{temps local en } 0 \underset{\text{la}}{\sim} \sup_{s\leq t} B_s$

Ceci a été utilisé par Lévy pour étudier le temps local.

D) De Tanaka

Cherchons à resoudre l'équation différentielle stochastique

$$* \quad dX_s = \text{sign}(X_s)\, dB_s \quad \text{où } B_\cdot \text{ est un brownien}$$

On peut inverser, et ceci donne $dB_s = \text{sign}(X_s)\, dX_s$

D'autre part, $dX_s^2 = dB_s^2 = ds$, donc si l'on a une solution, X_s est un brownien. On obtient alors

$$B_t = |X_t| - \underbrace{\ell_t^X(0)}_{\text{temps local du brownien } X_t \text{ en } 0}$$

Donc si W_t est un brownien sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$,

$$X_t = W_t \qquad B_t = \int_0^t \operatorname{sign}(X_s)\, dX_s \quad \text{est une}$$

solution de $*$. Cependant X_t n'est pas $\mathcal{F}_t^B$-mesurable.

En effet, X_t a des zéros tout près de $t=0$. Il a par exemple un dernier 0 t_1^* avant $t=1$. Alors $\tilde{X}_t = \begin{cases} X_t & t \le t_1^* \\ -X_t & t \ge t_1^* \end{cases}$

est aussi un brownien.

On a $|X_t| = |\tilde{X}_t|$ et $\ell_t^{\tilde{X}}(0) = \ell_t^X(0)$ donc

$\tilde{B}_t$ (associé à $\tilde{X}_t$) et B_t (associé à X_t) coïncident.

En gros (on peut donner une signification précise à cette affirmation) il manque à $\mathcal{F}_t^B$ le choix d'un signe à chaque 0 de X_s, $s \le t$ pour obtenir $\mathcal{F}_t^X$. On dit que (X, B) est une solution faible de $dX_s = \operatorname{sign}(X_s)\, dB_s$. Cette équation n'a que des solutions faibles (turbulence ?)

Un processus de Lévy associé au brownien.

Nous avons vu que deux processus d'apparence très différente $\ell_t(0)$, le temps local en 0 et m_t, le sup d'un brownien entre 0 et t, ont en fait même loi.

Nous avons vu aussi que $\ell_t(0,\omega)$ est, pour presque tout omega un escalier du diable en fonction du temps.

En conclusion, si l'on regarde la fonction inverse, soit t en fonction de $\ell_t(0)$ (ou de m_t) on s'attend à voir un processus de saut. Essayons de le comprendre plus en détail

A] Rappels (ou presque)

Nous avons vu dans le cas discret comment utiliser la "martingale exponentielle" pour calculer la transformée de Laplace

de la loi du temps de sortie d'un intervalle $[a,b]$ $\quad a<0<b$.

Dans le cas continu, c'est presque plus simple.

Un argument analogue à celui donné dans le cas discret montre que, si T est le temps de sortie du brownien de $[a,b]$ et si $M_t = e^{\alpha B_t - \alpha^2/2\, t}$ (la martingale exponentielle)

alors $\mathbb{E}(M_T) = M_0 = 1$.

On mélange α et $-\alpha$ en on considère la martingale

$$N_t = \operatorname{ch} \alpha \left(B_t - \frac{a+b}{2}\right) e^{-\frac{\alpha^2}{2} t}.$$

Alors $\quad N_T = \operatorname{ch} \alpha\left(\frac{b-a}{2}\right) e^{-\frac{\alpha^2}{2} T} \quad$ d'où

$$\mathbb{E}\left(e^{-\frac{\alpha^2}{2} T}\right) = \frac{\operatorname{ch} \alpha \frac{b+a}{2}}{\operatorname{ch} \alpha \frac{b-a}{2}}$$

On fait maintenant $a \to -\infty$ et l'on obtient, pour la loi du temps de premier passage en b

$$\mathbb{E}\left(e^{-\frac{\alpha^2}{2}T_b}\right) = e^{-|\alpha b|}.$$ (valable aussi pour $b \leq 0$ mais on ne l'utilisera pas)

Concl : pour $\lambda \geq 0$ $\quad \underline{\mathbb{E}\left(e^{-\lambda T_b}\right) = e^{-b\sqrt{2\lambda}}}$ $\quad (b \geq 0)$

On peut intervertir cette transformée de Laplace, et on obtient (calcul classique par changement de variable puis déformation de contour)

$$\underline{p(T_b \in [t, t+dt])} = dt \, \frac{b}{\sqrt{2\pi t^3}} \, \underline{e^{-\frac{b^2}{2t}}} \, \mathbb{1}_{t \geq 0}$$

C'est une loi sans premier moment à cause du t grand.

Comme prévu, T_b scale comme b^2 !

$$T_b \underset{\text{loi}}{\sim} b^2 T_1.$$

Remarque : $\underline{T_b \text{ est le temps où } m_t \text{ atteint } b}$

B] Le processus $(T_b)_{b \geq 0}$

D'après la propriété de Markov forte, le temps d'atteinte de $a+b$ $(a, b \geq 0)$ est T_{a+b} et il se décompose en deux étapes

. le temps T_a pour attendre a, puis un temps $\tilde{T}_{a,a+b}$ distribué comme un T_b et indépendant de T_a.

Ceci est bien sûr confirmé par la multiplicativité de la transformée de Laplace : $\mathbb{E}(e^{-dT_{a+b}}) = \mathbb{E}(e^{-dT_a})\,\mathbb{E}(e^{-dT_b})$

<u>Concl</u> : T_b <u>en fonction de b est un processus à accroissement indépendants et stationnaires</u>

C] Décomposition en sauts

Fixons b et considérons les n variables aléatoires indépendantes de même loi $T_{\frac{b}{n}}$, $T_{\frac{2}{n}b} - T_{\frac{1}{n}b}$, ... $T_{\frac{n}{n}b} - T_{\frac{n-1}{n}b}$.

Question : quelle est la probabilité que n_1 de ces variables soient dans $I_1 = [t_1, t_1+\Delta_1]$, n_2 dans $I_2 = [t_2, t_2+\Delta_2]$, ... n_k soient dans $I_k = [t_k, t_k+\Delta_k]$?

On suppose $0 < t_1 < t_1+\Delta_1 \leq t_2 < t_2+\Delta_2 \leq \dots < t_{k-1}+\Delta_{k-1} \leq t_k < t_k+\Delta_k$

Il faut bien sur que $n_1 + \dots + n_k \leq n$. L'objectif est pour l'instant de fixer $k, n_1, \dots, n_k$ et de faire $n \to \infty$.

Du fait que les variables sont independantes et de même loi, la réponse est

$$\frac{n!}{n_1! \cdots n_k! (n-n_1-\dots-n_k)!} \left(\int_{I_1} dp\left(T_{\frac{b}{n}}\right)\right)^{n_1} \cdots \left(\int_{I_k} dp\left(T_{\frac{b}{n}}\right)\right)^{n_k} \left(\int_{\mathbb{R}-(I_1\cup\dots\cup I_k)} dp\left(T_{\frac{b}{n}}\right)\right)^{n-n_1-\dots-n_k}$$

dont on veut l'asymptotique à $n \to \infty$, pour $k, n_1, \dots, n_k$ fixés.

$$\int_I dp\left(T_{\frac{b}{n}}\right) = \int_t^{t+\Delta} ds \, \frac{b}{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-\frac{b^2}{2n^2 s}} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{b}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{t+\Delta}}\right) \quad n \to \infty$$

d'où l'asymptotique

probabilité que parmi les n variables $T_{\frac{b}{n}}$, $T_{\frac{2b}{n}} - T_{\frac{b}{n}}, \dots T_{\frac{nb}{n}} - T_{\frac{(n-1)b}{n}}$

n_1 soient dans $[t_1, t_1+\Delta t_1]$, ... n_k soient dans $[t_k, t_k+\Delta t_k]$ $\underset{n\to\infty}{\sim}$

$$\frac{1}{n_1!}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, b\left(\frac{1}{\sqrt{t_1}} - \frac{1}{\sqrt{t_1+\Delta_1}}\right)\right]^{n_1} e^{-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, b\left(\frac{1}{\sqrt{t_1}} - \frac{1}{\sqrt{t_1+\Delta_1}}\right)} \dots \frac{1}{n_k!}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, b\left(\frac{1}{\sqrt{t_k}} - \frac{1}{\sqrt{t_k+\Delta_k}}\right)\right)^{n_k} e^{-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, b\left(\frac{1}{\sqrt{t_k}} - \frac{1}{\sqrt{t_k+\Delta_k}}\right)}$$

On a donc asymptotiquement des variables aléatoires poissoniennes indépendantes

Interprétation naïve : pour que le processus T_x, $x \in [0,b]$ ait n_1 sauts d'amplitude $\in [t_1, t_1+\Delta t_1]$, ... n_k sauts d'amplitude $\in [t_k, t_k+\Delta_k]$, la probabilité suit une loi de variables de Poisson indépendantes de paramètres $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, b\left(\frac{1}{\sqrt{t_i}} - \frac{1}{\sqrt{t_i+\Delta_i}}\right)$ $i = 1, \dots, k$.

Allons un rien plus loin : soient $X_1, \dots X_k$ des variables de

qui suivent des lois de Poisson indépendantes de paramètres

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, b\left(\frac{1}{\sqrt{t_1}} - \frac{1}{\sqrt{t_1+\Delta_1}}\right) \cdots \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, b\left(\frac{1}{\sqrt{t_k}} - \frac{1}{\sqrt{t_k+\Delta_k}}\right)$$

soit $\tau_i \in [t_i, t_i+\Delta_i)$ $\quad i=1,\dots,k$

$$\underline{\mathbb{E}\left(e^{-d\sum_{i=1}^{k} X_i \tau_i}\right) = e^{\sum_i \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, b\left(\frac{1}{\sqrt{t_i}} - \frac{1}{\sqrt{t_i+\Delta_i}}\right)\left(e^{d\tau_i}-1\right)}}$$

Si l'on fait $t_{i+1} = t_i + \Delta_i$ $\quad k \to \infty$ $\quad \sup_i \Delta_i \to 0$ $\quad t_k \to \infty$

le second membre devient une somme de Riemann-Stieltjes qui converge (argument dans l'exponentielle) vers

$$b\int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, b\; d\left(-\frac{1}{\sqrt{\tau}}\right)\left(e^{-d\tau}-1\right) = b\int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1}{\sqrt{\tau}}\, d\left(e^{-d\tau}-1\right)$$

$$+ \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, -\frac{1}{\sqrt{\tau}}\left(e^{-d\tau}-1\right)\right]_0^\infty = 0$$

$$= \underline{-b\sqrt{2d}}$$

Donc en prenant naïvement en compte tous les sauts, on retrouve la loi de T_b. On va aller encore un petit peu plus loin.

Soit $X_t(b)$ le nombre de sauts de T_x de taille $\geq t$

$(x \in [0,b])$

Alors en passant à la limite comme ci dessus, on voit que

$X_t(b)$ suit une loi de Poisson de paramètre

$$\lim \sqrt{\frac{2}{\pi}}b\left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{t+\Delta_1}}\right) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}b\left(\frac{1}{\sqrt{t+\Delta_1}} - \frac{1}{\sqrt{t+\Delta_1+\Delta_2}}\right) + \cdots \sqrt{\frac{2}{\pi}}b\left(\frac{1}{\sqrt{t+\Delta_1+\cdots+\Delta_{k-1}}} - \frac{1}{\sqrt{t+\Delta_1+\cdots+\Delta_k}}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\, b$$

<u>Conclusion:</u> on peut écrire

$$T_b = -\int_0^\infty t \, dN_t(b)$$ (une baby integrale stochastique)

où $N_t(b)$ est, en t, un processus à accroissements

independants, décroissant, à valeur ds $\mathbb{N}$, suivant une loi de Poisson de paramètre $\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\, b$, et en b un processus de Poisson ponctuel pour la mesure $\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\, dl$.

En core mieux ! Dans le quart de plan $(x,t) \in \mathbb{R}^{+2}$ on laisse tomber des points au hasard de sorte que si D_1 et D_2 sont disjoints le nombre de points dans D_1 et D_2 sont des variables aléatoires independantes, et pour D, la probabilité que D ne contienne aucun point est $e^{-\int_D \frac{dx\,dt}{\sqrt{2\pi t^3}}}$

Soit $N_\tau(b)$ le nombre de points dans le domaine $x \in [0,b]$, $t \geq \tau$. Alors $\int_0^\infty N_\tau(b)\, d\tau$ a même loi que T_b

(en tant que processus indexé par b)

D] Remarques diverses

* T_b est un processus de Levy :

  infiniment divisible, à accroissement indépendants et stationnaires, d'exposant $1/2$

* Les processus de Levy plus généraux ont aussi une représentation en terme de processus de Poisson (plus du brownien s'il y a une composante continue) Théorème de Khinchine.

* Si W_t est un brownien indépendant du B_t qui construit T_b, $C_b \equiv W_{T_b}$, (un cas particulier de subordination) est aussi un processus à accroissement indépendants et stationnaires, infiniment divisible. Comme

  $W_t \sim \sqrt{t}$ et $T_b \sim b^2$ on s'attend à ce que l'exposant

de Lévy de C_b soit 1 ($C_b \sim b$).

Exercice: montrer que C_b est le processus de Cauchy standard (la loi de C_1 est $\frac{dx}{\pi(1+x^2)}$)

E] La formule de Feynman Kac, et le temps local:

Soit $U(x)$ une fonction (≥ 0 et pas trop méchante)

On veut dire des choses sur $\int_0^t U(B_s)ds$ où $B_\cdot$ est un brownien.

On considère la transformée de Laplace

$\mathbb{E}^x\left(e^{-p\int_0^t U(B_s)ds} \right) \equiv G(t,x)$ où $\mathbb{E}^x$: le brownien part de x. On veut une équation pour G. (Rq: $G(t,x) \leq 1 \ \forall t,x$)

On évalue $G(t+t',x)$ en conditionnant:

$$G(t+t',x) = \mathbb{E}^x\left(e^{-p\left(\int_0^{t'} U(B_s)ds + \int_{t'}^{t+t'} U(B_s)ds\right)}\right)$$

$$= \mathbb{E}^x\left(\mathbb{E}\left(\underbrace{e^{-p\int_0^{t'} U(B_s)ds}}_{\mathcal{F}_{t'}\text{-mesurable}} + \underbrace{\int_{t'}^{t+t'} U(B_s)ds}_{\text{par Markov, c'est comme demarrer en } B_{t'}} \,\middle|\, \mathcal{F}_{t'}\right)\right)$$

$$= \mathbb{E}^x\left(e^{-p\int_0^{t'} U(B_s)ds}\, \underbrace{\mathbb{E}\left(e^{-p\int_{t'}^{t+t'} U(B_s)ds} \,\middle|\, \mathcal{F}_{t'}\right)}_{G(t,\,B_{t'})}\right)$$

$$G(t+t',x) = \mathbb{E}^x\left(e^{-p\int_0^{t'} U(B_s)ds}\, G(t,B_{t'})\right)$$

On regarde à $t' \to 0$, en étant "naïf" pour $e^{-p\int_0^{t'} U(B_s)ds}$ et en appliquant Itô pour $G(t,B_{t'})$. On obtient

$$\underline{\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - pU(x)\,G}$$

Avec un peu plus d'effort on montre que

L'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - p\,U(x)\,G$ (*) $U \geq 0$

a une unique solution bornée qui vaut 1 à $t=0$. C'est

$$\mathbb{E}^x\left(e^{-p\int_0^t U(B_s)\,ds}\right)$$

Comme quand on fait le développement de Born de la mécanique quantique, on peut transformer (*) en

$$G(t,x) = 1 - p\int_{\mathbb{R}} dy \int_0^t \frac{ds}{\sqrt{2\pi s}}\, e^{-\frac{y^2}{2s}}\, G(t-s, x-y)\, U(x-y)$$

→ Application au temps local en z : $U(x) \equiv \delta(x-z)$

$$G(t,x) = 1 - p\int_0^t \frac{ds}{\sqrt{2\pi s}}\, e^{-\frac{(x-z)^2}{2s}}\, G(t-s, z)$$

Ça donne une équation fermée pour $x = z$. Si l'on sait la résoudre, on réinjecte pour obtenir $G(t,0)$ qui est $\mathbb{E}(e^{-p\,\ell_t(z)})$.

On veut donc résoudre $\underline{H(t) = 1 - p\int_0^t \frac{ds}{\sqrt{2\pi s}}\, H(t-s)}$ (*')

$$H(t) = \mathbb{E}(e^{-p\,\ell_t(0)})$$

La solution de (*') est

$$\mathbb{E}(e^{-p\,\ell_t(0)}) = e^{\frac{p^2 t}{2}} \int_{p\sqrt{\frac{t}{2}}}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, du\, e^{-u^2}$$

Exercice : - vérifier ce résultat directement

- montrer qu'il est compatible avec $\ell_t(0) \underset{\text{loi}}{\sim} m_t = \sup_{s \le t} B_t$ et le résultat du cours 4 : $p(m_t \in [m, m+dm]) = \mathbb{1}_{m \ge 0}\, dm \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\, e^{-\frac{m^2}{2t}}$