Cosmologie et fluctuations primordiales

SPhT, 9 novembre - 14 décembre 2007

- **Univers homogène, univers inhomogène**
  La métrique de Friedmann-Robertson-Walker. Introduction à la notion de distances et d'horizons. Inhomogénéités de l'espace temps. Relations entre métrique et quantités observables. Outils statistiques : fonctions de corrélations et spectres de puissance.

- **Le développement des instabilités gravitationnelles**
  Identification des modes propres d'instabilité. Décomposition Scalaire-Vecteur-Tenseur et identification des modes de jauge. Evolutions sub- et super-Hubble. Modes adiabatiques et modes isocourbes.

- **L'inflation, paradigme et prédictions I**
  La nécessité d'une phase inflationnaire. Quelle quantité d'inflation ? Forme de Mukhanov de l'action et quantification des champs. Transition quantique-classique. Spectres de puissance induits.

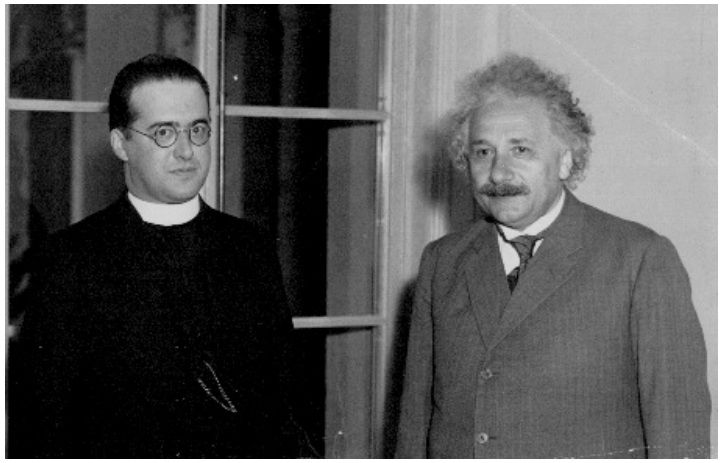
- **L'inflation, paradigme et prédictions II**
  Ondes gravitationnelles. Relations entre indices spectraux. Conséquences sur le fond diffus cosmologique.

- **Modèles inflationnaires**
  Inflation à un champ, chaotique, en loi de puissance. Modèles hybrides, modèles construits à partir des théories supersymétriques. Inflation multi-champ. Action de Dirac-Born-Infeld.

- **Au delà du régime linéaire, l'univers primordial, l'univers local**
  Couplages de modes dans l'univers local. Couplages de modes pendant la phase inflationnaire. Prédictions de l'inflation standard.

Plan du cours I

- Eléments de Relativité Générale
  - le principe d'équivalence
  - métrique et courbure
  - équations d'Einstein
- La métrique de FRW
  - Le Principe Cosmologique
  - l'expansion de l'univers
  - Les paramètres cosmologiques
- Observer les grandes structures de l'Univers
  - compter des galaxies
  - "voir" des photons
- Eléments de statistique



Bibliographie

- S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology, 1972*
- J.-Ph. Uzan et P. Peter, *Cosmologie Primordiale, 2006*

- P.J.E. Peebles, *The Large Scale Structure of the Universe, 1980*
- A. Linde, *Inflation and Quantum Cosmology, 1990*

- S. Dodelson, *Modern Cosmology, 2003*
- F. Bernardeau, *Cosmologie, des fondements théoriques aux observations, 2007*

Eléments de relativité générale

Le principe d'équivalence

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2} = 0,$$

où $\mathrm{d}\tau$ est le temps propre de la particule[4],

$$\mathrm{d}\tau^2 = \left(\xi^0\right)^2 - \sum_i \left(\xi^i\right)^2 \equiv -\eta_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta$$

Changement de variable

$$\mathrm{d}\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\mathrm{d}x^\mu\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}\mathrm{d}x^\nu \equiv -g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu \qquad g_{\mu\nu} = \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}\eta_{\alpha\beta}$$

$$0 = \frac{\mathrm{d}^2x^\lambda}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau} \qquad \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\nu} \qquad \Gamma^\sigma_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}g^{\sigma\nu}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu}\right)$$

A.3 Dérivées covariantes

Le paramètre de connexion affine est l'objet qui permet de construire un objet tensoriel à partir de dérivées de tenseur en ajoutant les contre-termes nécessaires. La *dérivée covariante* d'un tenseur va ainsi s'écrire en général,

$$\begin{aligned} T^{\nu_1\ldots\nu_n}{}_{\mu_1\ldots\mu_m;\lambda} &= \frac{\partial}{\partial x^\lambda}T^{\nu_1\ldots\nu_n}{}_{\mu_1\ldots\mu_m} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n}\Gamma^{\nu_i}_{\lambda\sigma}T^{\nu_1\ldots\sigma\ldots\nu_n}{}_{\mu_1\ldots\mu_m} - \sum_{i=1}^{m}\Gamma^\sigma_{\mu_i\lambda}T^{\nu_1\ldots\nu_n}{}_{\mu_1\ldots\sigma\ldots\mu_m} \end{aligned} \tag{A.19}$$

et on peut vérifier qu'on a bien là un tenseur !

Dérivée covariante le long d'une courbe

$$\frac{DS_\mu}{D\tau} \equiv \frac{\mathrm{d}S_\mu}{\mathrm{d}\tau} - \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}\tau}S_\sigma$$

Transport parallèle (pour quantités conservées)

$$\frac{DS^\mu}{D\tau} = 0$$

Le résultat dépend de la trajectoire

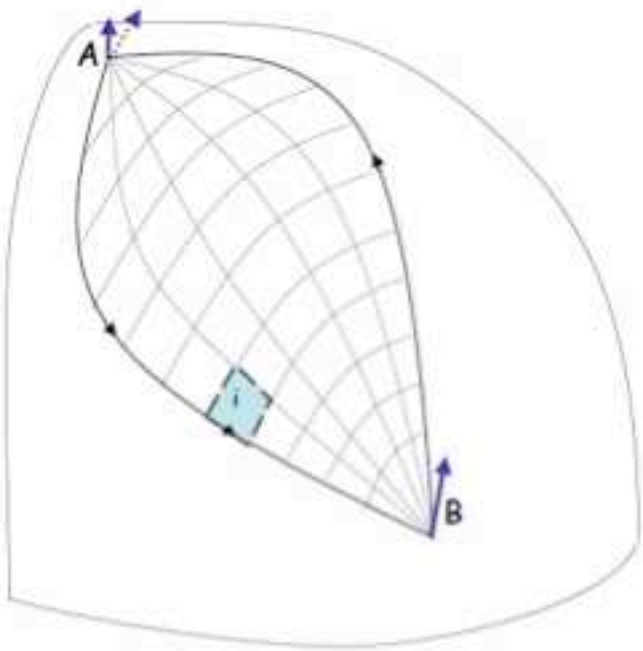


FIG. A.1 – Transport parallèle le long d'une courbe fermée d'un vecteur partant de A (vecteur en pointillés), allant en B et revenant en A (vecteur en trait plein). Sur un espace courbe on s'attend à voir une différence entre la valeur du vecteur à l'arrivée et celle au départ (on peut s'en facilement convaincre en faisant cet exercice sur une sphère). Le calcul se fait en décomposant la surface inscrite dans la courbe fermée par des contours infinitésimaux.

– Le tenseur de courbure apparaît aussi naturellement quand on considère le comportement de deux géodésiques proches. Considérons donc deux particules se déplaçant sur les trajectoires $x^\mu(\tau)$ et $x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$. Les équations du mouvement sont chacune données par,

$$0 = \frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x)\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}\tau} \tag{A.34}$$

$$0 = \frac{\mathrm{d}^2 x'^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x')\frac{\mathrm{d}x'^\nu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x'^\lambda}{\mathrm{d}\tau}, \tag{A.35}$$

ce qui donne en prenant leur différence au premier ordre en δx,

$$0 = \frac{\mathrm{d}^2 \delta x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu\lambda}}{\partial x^\rho}\partial x^\rho \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}\tau} + 2\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\delta x^\lambda}{\mathrm{d}\tau}. \tag{A.36}$$

On peut réécrire plus simplement cette équation,

$$\frac{D^2}{D\tau^2}\delta x^\lambda = R^\lambda{}_{\mu\nu\rho}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}\tau}\,\delta x^\nu, \tag{A.37}$$

où D est la dérivée covariante le long de la géodésique. Cette relation est l'équation de la déviation géodésique. Elle montre que le mouvement relatif de deux particules proches en chute libre révèle des propriétés de la métrique dans laquelle ces particules évoluent. Ce sera le cas en particulier pour des photons. Un faisceau lumineux se propageant en espace courbe subira donc une déformation. C'est le phénomène de lentille gravitationnelle.

Eléments de relativité générale : équations d'Einstein

La construction des équations de la gravitation d'Einstein repose alors sur l'hypothèse que ces équations doivent prendre la forme,

$$G_{\mu\nu} = -8\pi\, G\, T_{\mu\nu}, \tag{A.50}$$

généralisant les équations de Newton de champ faible[7], $\Delta g_{00} = -8\pi G T_{00}$, voir paragraphe suivant.

Le tenseur $G_{\mu\nu}$ est complètement déterminé si on s'impose qu'il ne contienne que des termes avec deux et exactement deux dérivées par rapport à la métrique. Cela découle des propriétés du tenseur de courbure et on a nécessairement $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - 1/2 g_{\mu\nu} R$. L'élégance demanderait d'en rester là. Malheureusement les observations s'obstinent à nous dire qu'il existe une constante cosmologique, alors suivons Einstein qui, pour d'autres raisons, autorise $G_{\mu\nu}$ à avoir des dérivées d'ordre moindre par rapport à la métrique. Dans ce cas un seul autre terme est possible, la métrique elle-même, et les équations d'Einstein prennent alors la forme générale,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi\, G\, T_{\mu\nu}, \tag{A.54}$$

où Λ est une nouvelle constante de la nature[8].

Quelle métrique pour l'univers ?

A1689

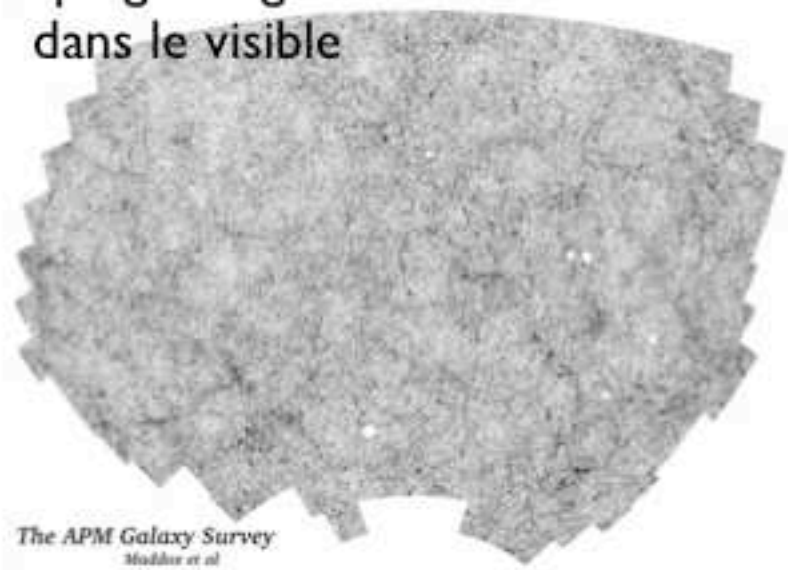
L'univers est localement plat ?

Plan

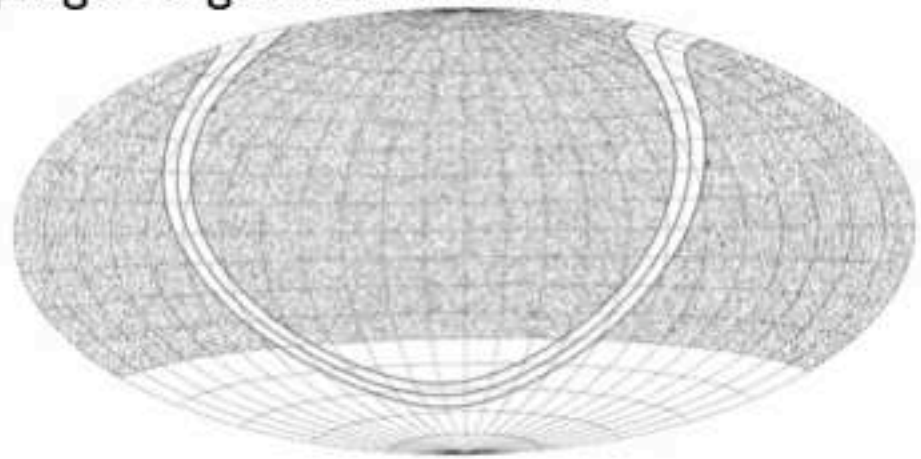
Principe Cosmologique

- *L'univers est homogène et isotrope à grande échelle*

Comptage de galaxies dans le visible

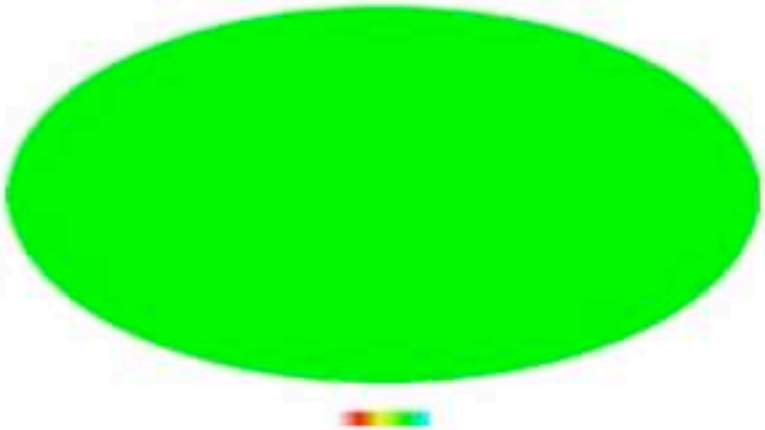


Comptage de galaxies en radio



COBE DMR Microwave Sky at 53 GHz

Comptage de photons en radio (millimètre)



Plan

La métrique de FRW

2.2.2 Eléments de relativité générale et métrique de Friedmann-Robertson-Walker

Dans le cadre de la relativité générale le *principe cosmologique* détermine une forme générale de la métrique. La dérivation de cette forme est faite en détail dans le livre de S. Weinberg [267] et n'est pas reprise dans cet ouvrage[4]. La forme générale de la métrique qui répond à ces conditions est donnée par la métrique dite de Friedmann-Robertson-Walker (FRW),

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\left[\frac{\mathrm{d}x^2}{1-K\,x^2} + x^2\mathrm{d}\theta^2 + x^2\,\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right] \tag{2.11}$$

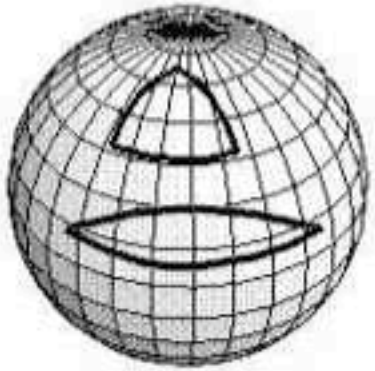
où K est une constante. Si K est nul la partie spatiale de la métrique est plate. Sinon la courbure spatiale est non nulle. Il existe bien sûr d'autres représentations de cette métrique. Par exemple on la rencontre souvent sous la forme,

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\left[\mathrm{d}\chi^2 + \mathrm{Si}_\mathrm{K}(\chi)\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right)\right] \tag{2.12}$$

avec $\mathrm{Si}_\mathrm{K}(\chi) = K^{-1/2}\sin(K^{1/2}\chi)$, χ, $|K|^{-1/2}\sinh(|K|^{1/2}\chi)$ selon que K est respectivement plus grand, égal ou plus petit que 0. On verra dans la suite une interprétation

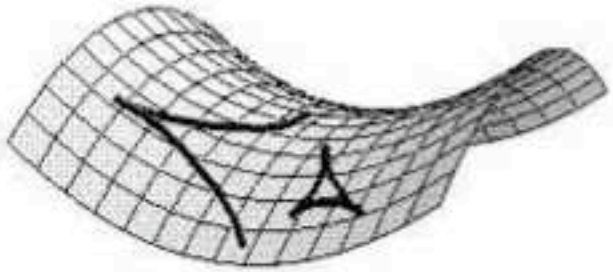
Métrique de FRW-Lemaître

K>0



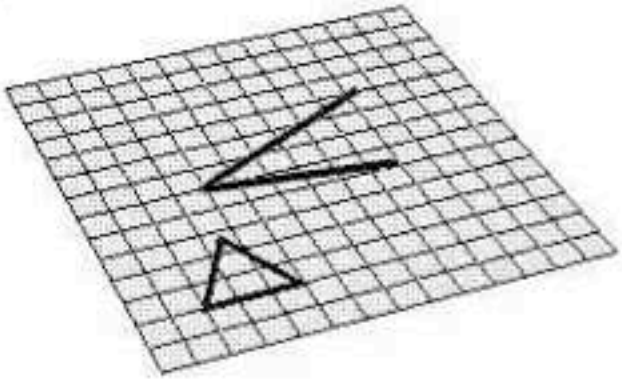
Universe with *positive* curvature. Diverging line converge at great distances. Triangle angles add to more than 180°.

K<0

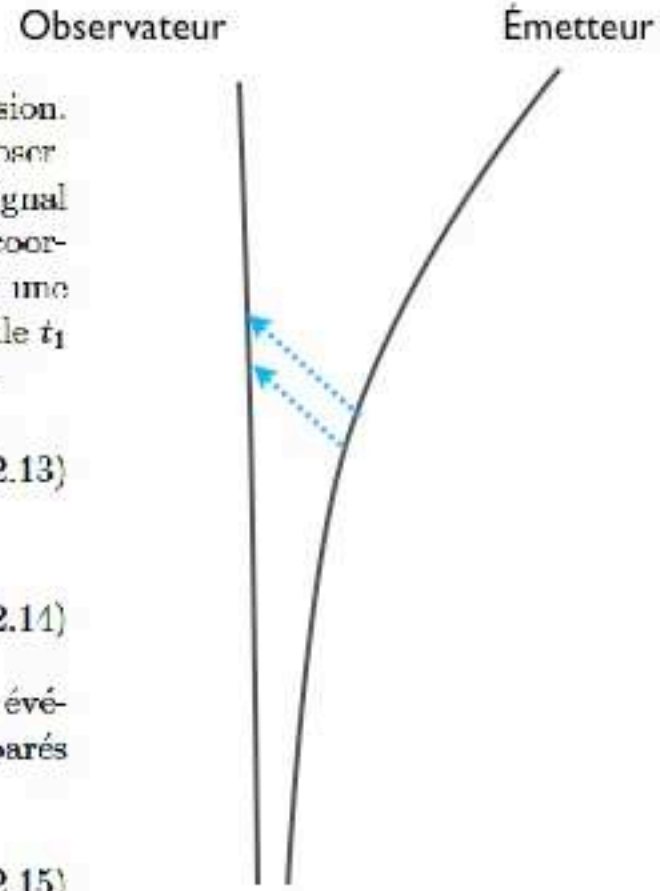


Universe with *negative* curvature. Lines diverge at ever increasing angles. Triangle angles add to less than 180°.

K=0



Universe with no curvature. Lines diverge at constant angle. Triangle angles add to 180°.



Le facteur $a(t)$ est le facteur d'expansion. L'existence d'un facteur d'expansion va avoir des conséquences directes sur l'observation d'objets lointains. Imaginons ainsi qu'on détecte à un instant t_0 un signal lumineux émis (disons d'une galaxie distante) à un instant t_1. Appelons x_1 la coordonnée radiale x de la galaxie émettrice au moment de l'émission. En suivant une géodésique le long d'une trajectoire $\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\varphi = 0$ on relie de manière fonctionnelle t_1 à x_1. En effet la géodésique suivi par un photon vérifie $\mathrm{d}s = 0$ ce qui conduit à

$$c^2\,\mathrm{d}t^2 - a^2(t)\frac{\mathrm{d}x^2}{1-K\,x^2} = 0. \tag{2.13}$$

Il en résulte que,

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{\mathrm{d}t}{a(t)} = \int_0^{x_1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-K\,x^2}}. \tag{2.14}$$

Si la galaxie émettrice est immobile[6], x_1 est indépendant du temps, alors deux événements séparés par un intervalle de temps δt_1 au moment de l'émission sont séparés d'un intervalle de temps δt_0 à la réception avec,

$$\frac{\delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\delta t_1}{a(t_1)}, \tag{2.15}$$

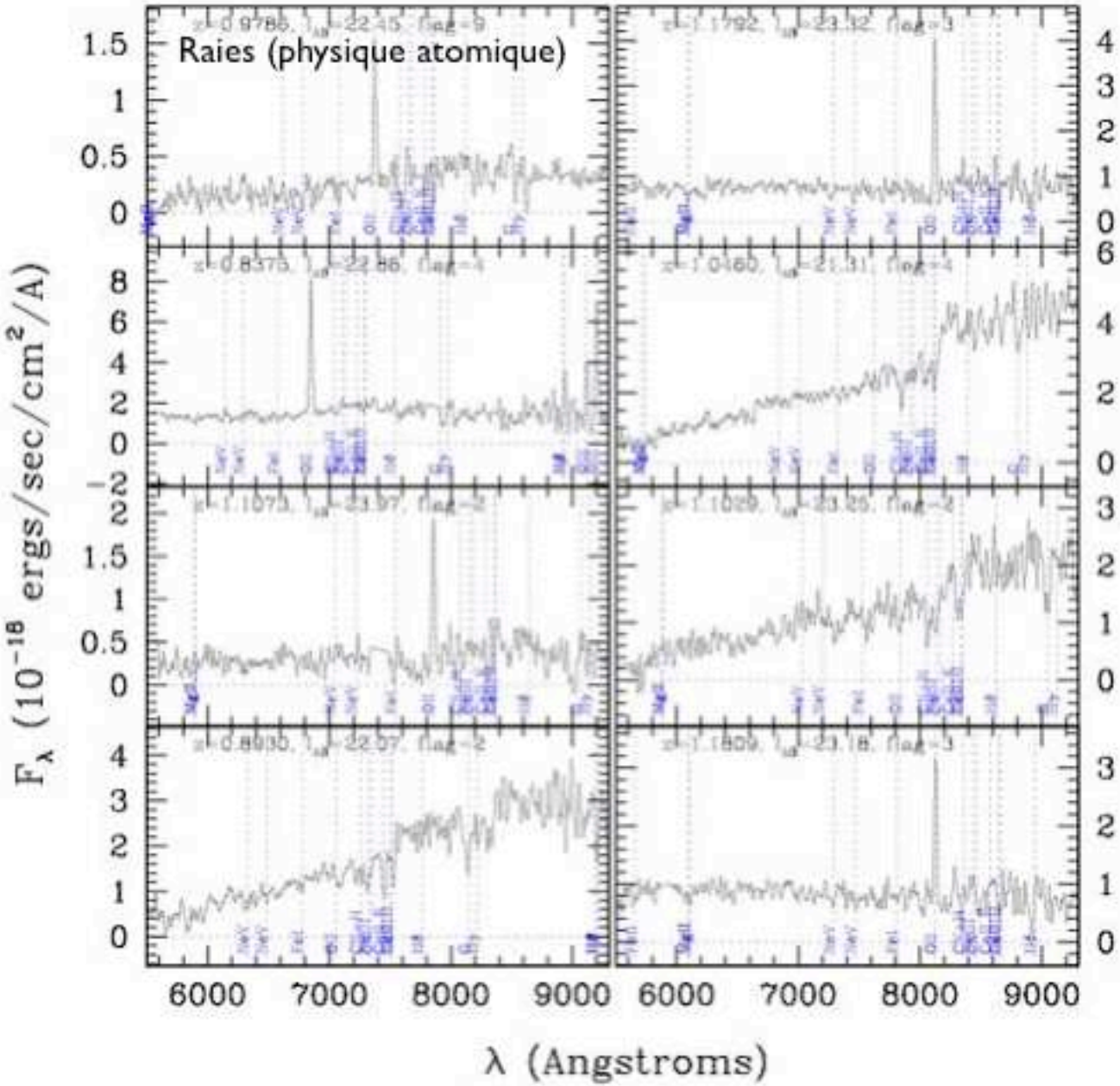
ce qui implique que les longueurs d'onde électromagnétiques λ_1 et λ_0 sont reliées par,

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)}. \tag{2.16}$$

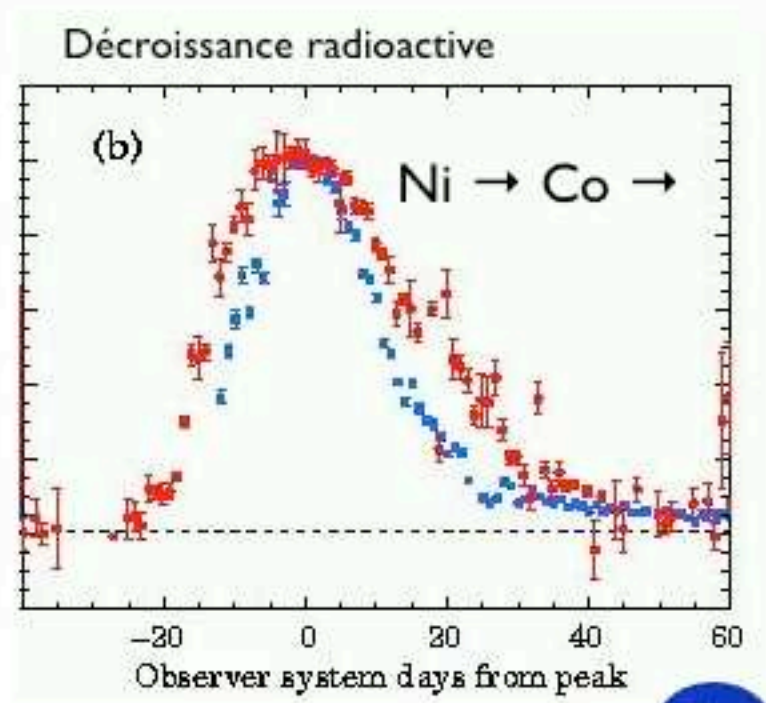
Ce rapport est précisément le redshift des objets. Il s'interprète donc simplement comme le rapport du facteur d'expansion entre le moment de l'émission et le moment de la réception. Cette identification est d'ailleurs indépendante de la forme fonctionnelle de $a(t)$, donc indépendante des paramètres cosmologiques,

$$1 + z(t) = \frac{a(t_0)}{a(t)}. \tag{2.17}$$

L'expansion de l'univers



Tout est "ralenti"...



Plan

2.2.3 Les équations de Friedmann

Les équations de Friedmann s'obtiennent par l'écriture des équations d'Einstein pour la métrique de Friedmann-Robertson-Walker. Je renvoie à l'appendice A pour une présentation des éléments de base de relativité générale. Le tenseur de Ricci pour la métrique FRW se calcule sans difficulté particulière. Ses composantes non nulles sont,

$$R_{00} = \frac{3\ddot{a}}{a}, \quad R_{ij} = -\left(2\frac{K}{a^2} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a}\right) g_{ij}, \quad R = -6\left(\frac{K}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a}\right).$$

Les équations d'Einstein relient le tenseur de Ricci au tenseur énergie-impulsion du fluide cosmologique. Pour un univers homogène et isotrope le fluide cosmologique est caractérisé uniquement par une densité d'énergie, ρ, et par une pression isotrope, P. Les composantes non-nulles du tenseur énergie-impulsion sont alors,

$$T_{00} = -\rho\, g_{00}, \quad T_{ij} = P\, g_{ij}. \tag{2.20}$$

L'écriture des équations d'Einstein donne alors respectivement, pour les composantes $(0,0)$ et les composantes spatiales,

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}, \tag{2.21}$$

$$\frac{K}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{\ddot{a}}{a} = -8\pi G P + \Lambda. \tag{2.22}$$

En combinant ces deux équations on retrouve bien sûr la première équation de Friedmann,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) + \frac{\Lambda}{3}. \tag{2.23}$$

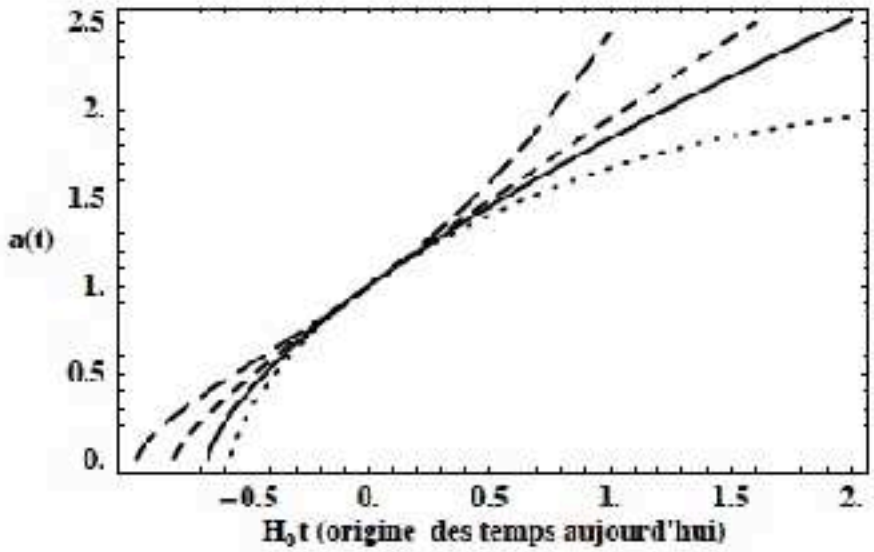


FIG. 2.2 – Évolution du facteur d'expansion pour différentes cosmologies. Les valeurs du facteur d'expansion et des origines des temps ont été choisies pour faire coïncider la valeur de la constante de Hubble à l'époque présente. La ligne continue correspond à un univers Einstein-de Sitter, les tirets longs correspondent au cas d'un univers plat avec $\Omega_m^{(0)} = 0.3$ et $\Omega_\Lambda^{(0)} = 0.7$, les tirets courts à un univers ouvert $\Omega_m^{(0)} = 0.3$ sans constante cosmologique et les pointillés à un univers fermé $\Omega_m^{(0)} = 2$.

$$1 = \sum_i \Omega_i + \Omega_K \tag{2.24}$$

avec

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c}, \quad \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad \text{et} \quad \Omega_K = \frac{K}{H^2}. \tag{2.25}$$

Pour la partie correspond à une constante cosmologique on a

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}. \tag{2.26}$$

Les solutions explicites décrivant le comportement du facteur d'expansion en l'absence de constante cosmologique sont bien connues. Elles sont rappelées ici.

- si $\rho_{\text{matière}} = \rho_c$ donc $K = 0$, $a(t) \sim t^{2/3}$.
- si $\rho_{\text{matière}} > \rho_c$ donc $K > 0$ on peut facilement montrer que la solution prend la forme[7]

$$a(t) = \frac{a_0 \Omega_0}{2\,(\Omega_0 - 1)}\,[1 - \cos(\theta)]; \tag{2.28}$$

$$H_0\, t = \frac{\Omega_0}{2\,(\Omega_0 - 1)^{3/2}}\,[\theta - \sin(\theta)]; \tag{2.29}$$

- si $\rho_{\text{matière}} < \rho_c$ donc $K < 0$ on passe à des fonctions hyperboliques en faisant $\theta \to \mathrm{i}\psi$.

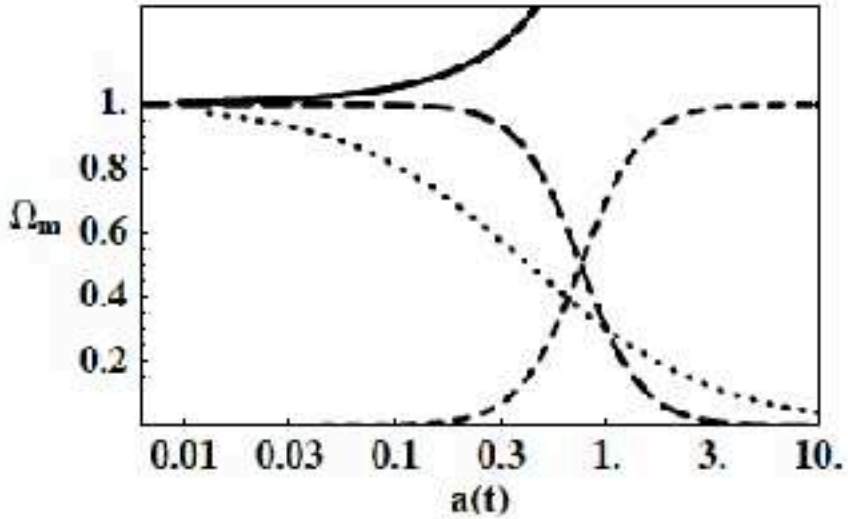


FIG. 2.3 – Comportement des paramètres cosmologiques réduits Ω_m et Ω_Λ pour différentes cosmologies. Les tirets correspondent au cas d'un univers plat avec $\Omega_m^{(0)} = 0.3$ et $\Omega_\Lambda^{(0)} = 0.7$, les tirets longs donnant le comportement de Ω_Λ, les courts de Ω_m. Les pointillés correspondent au comportement de Ω_m pour un modèle ouvert sans constante cosmologique avec $\Omega_m^{(0)} = 0.3$ tandis que le trait continu correspond à un univers fermé avec $\Omega_m^{(0)} = 2$.

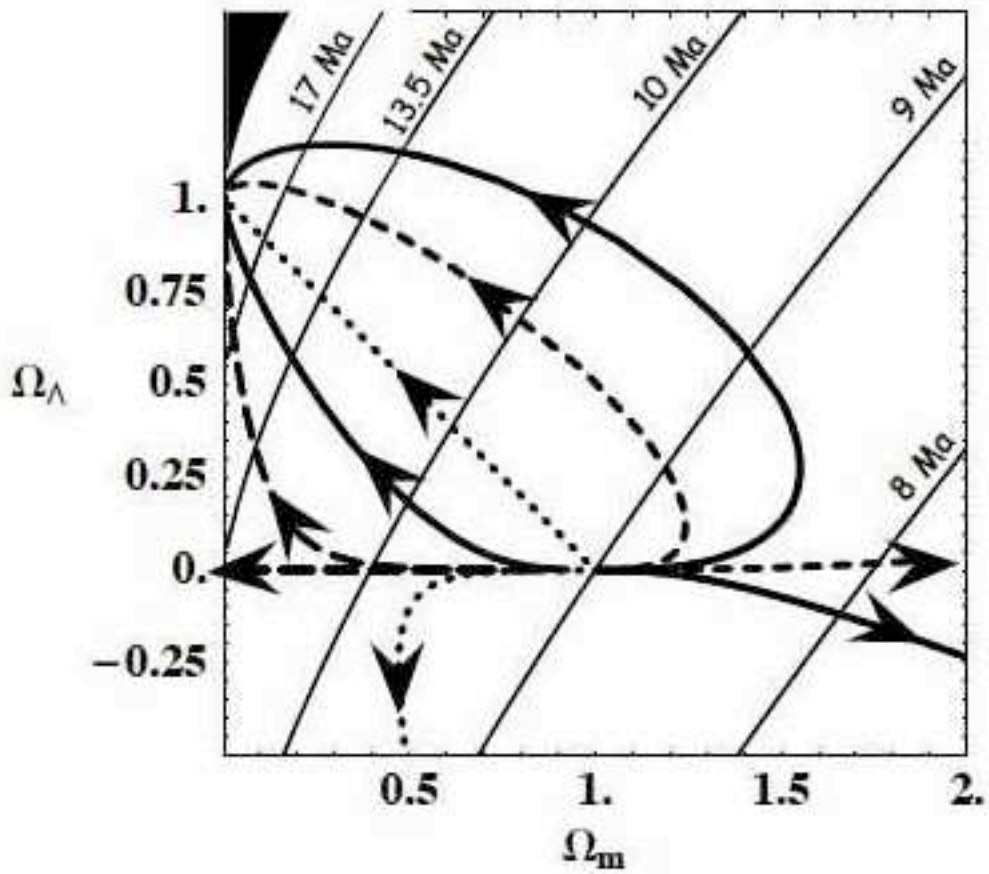
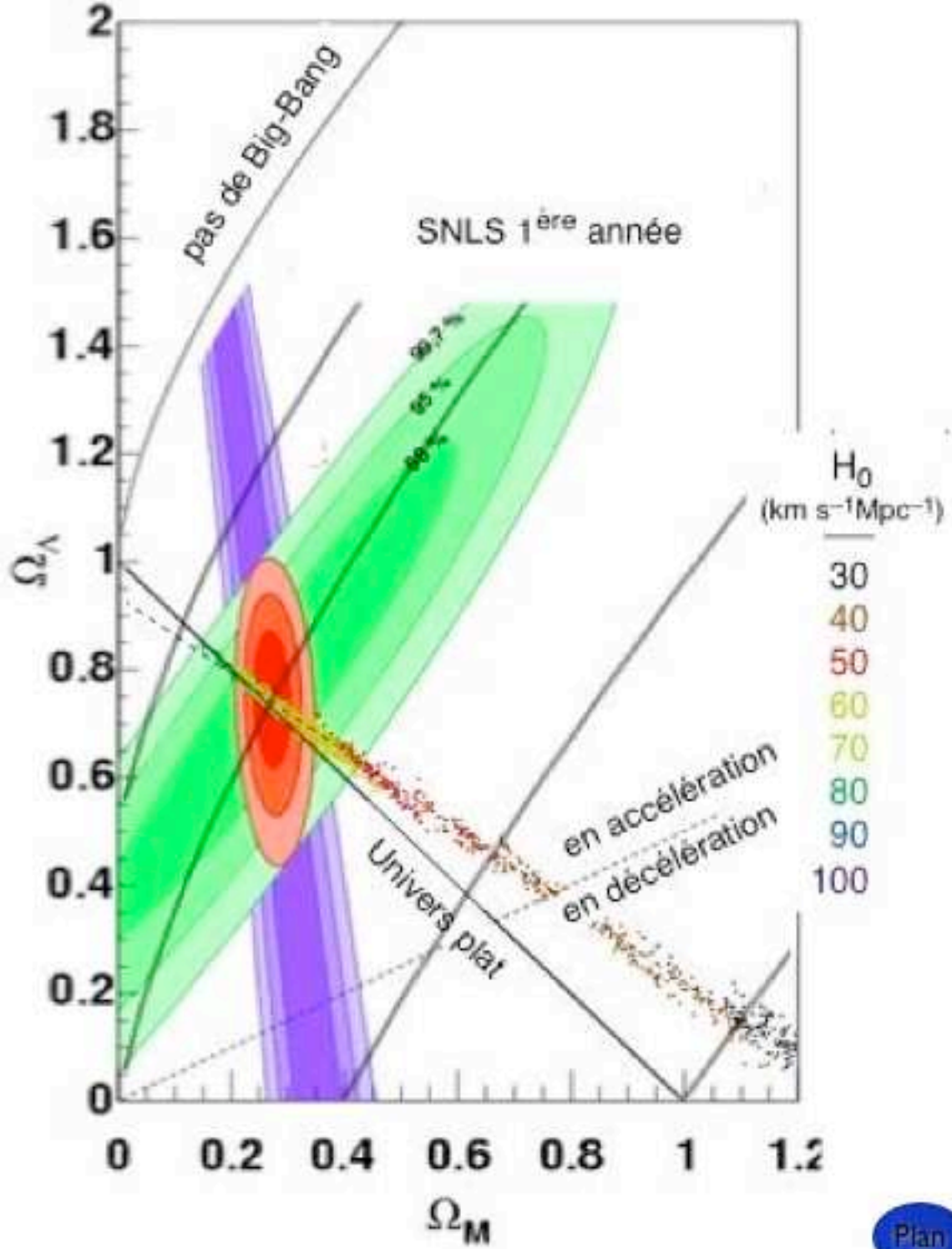


FIG. 2.4 – Comportement des paramètres cosmologiques réduits Ω_m et Ω_Λ pour différentes cosmologies dans le plan $\Omega_m - \Omega_\Lambda$. Le point Einstein-de Sitter apparaît clairement instable tandis que le point $\Omega_\Lambda = 1$, $\Omega_m = 0$ est un attracteur. Les traits fins donnent les lignes d'âge constant de l'univers de 8, 9, 10, 13.5 et 17 milliard d'années respectivement en partant du bas à droite. La zone noire correspond à un âge infini, e.g. à une absence de big-bang. Ce diagramme est à rapprocher de la planche 9.7 qui montre les contraintes observationnelles dans ce même plan.

Les paramètres cosmologiques



Plan

La distance angulaire.

L'idée est d'associer une distance $\mathcal{D}$ à la taille angulaire δ avec laquelle serait perçu d'un objet de taille propre d. Quand cet angle est petit cela revient à écrire que

$$\delta = \frac{d}{\mathcal{D}}. \tag{2.35}$$

Si on écrit $ds^2 = 0$ pour la distance transversale d'un objet, donc à x_1 fixe, on a $dt = a(t_1)\, x_1(t_1)\, \delta$ d'après la forme de la métrique. On a donc simplement

$$\mathcal{D}(t_1) = a(t_1)\, x_1(t_1). \tag{2.36}$$

Il reste à obtenir une relation $x(t)$, c'est à dire trouver la forme du cône de lumière passé dans les coordonnées (t, x). Le point de départ est l'équation (2.14). Le terme de gauche de cette équation peut être réécrit,

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{c\,dt}{a} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{da}{\dot{a}\, a} = \int_0^{x_1} \frac{dz}{a_0\, H}. \tag{2.37}$$

Quant au terme de droite il admet une solution,

$$\int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{1 - K\, x^2}} = \frac{1}{\sqrt{K}} \mathrm{ArcSi}_K(\sqrt{K}\, x_1), \tag{2.38}$$

où $\mathrm{ArcSi}_K(K)$ est $\arcsin(K)$ si K est positif, $\mathrm{arcsinh}\,(K)$ si K est négatif et l'identité si K est nul. Il vient alors,

$$\mathcal{D}(z) = \frac{a(z)}{a(0)\sqrt{K}} \mathrm{Si}_K(\sqrt{K}\,\chi), \quad \chi = \int_0^z \frac{c\,dz'}{H(z')}, \tag{2.39}$$

où $\mathrm{Si}_K(x)$ est $\sin(x)$ si K est positif, $\sinh(x)$ si K est négatif et l'identité si K est nul. On retrouve ici les éléments géométriques de la formulation (2.12) de la métrique. Par exemple pour un Univers Einstein-de Sitter $K = 0$ et,

$$\mathcal{D} = a(z) \int_0^z \frac{c\,dz}{a_0\, H} = a(z) \int_0^z \frac{c\,dz}{a_0\, H_0} (1 + z)^{-3/2} = \frac{2c\, a(z)}{a_0\, H_0} \left[1 - 1/\sqrt{1 + z}\right]. \tag{2.40}$$

Horizon d'une particule

L'horizon d'une particule est défini comme la fraction d'univers avec laquelle une particule, un observateur, a pu être en contact causal. On voit que c'est une notion globale qui concerne la structure globale d'espace temps de l'univers. Dans le cas qui nous intéresse, le point de départ des calculs est de nouveau l'équation (2.14). L'horizon, x_H, sera obtenu quand on fait tendre le temps d'émission vers 0. On a donc,

$$\int_0^{x_H} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-K\,x^2}} = \int_{t\to 0}^{t} \frac{\mathrm{d}t}{a(t)}. \tag{2.44}$$

Cette intégrale converge si le facteur d'expansion ne croît pas trop vite à l'origine. Ce sera le cas dans une cosmologie dite standard, c'est à dire quand on admet que l'univers reste dominé par le rayonnement avant l'équivalence. Dans cette hypothèse, la contribution dominante à la valeur de x_H aujourd'hui vient de l'ère de la matière.

avec $H_0\,t_0 = 2/3$ cette expression peut se réécrire,

$$x_H(t_0) = \frac{2}{H_0}\left(\frac{a}{a_0}\right)^{1/2}. \tag{2.46}$$

C'est la distance comobile à notre propre horizon. Celle-ci est de l'ordre de 6000 h^{-1}Mpc. Notre horizon, mais on s'en doutait, est un petit peu plus loin que la surface de dernière diffusion.

Cela étant l'horizon croît avec le temps. L'horizon d'objets distants est donc plus petit. La taille angulaire de ces horizons peut facilement être calculée. Quand celle-ci est petite, elle est donnée par,

$$\delta_H(z) = \frac{x_H(z)}{\mathcal{D}(z)}. \tag{2.47}$$

Ainsi la taille angulaire de l'horizon d'un point de la surface de dernière diffusion s'obtient facilement en remarquant que $\mathcal{D}(z_*) \approx \mathcal{D}(z\to\infty) = x_H(z=0)$ et donc

$$\delta_H(z_*) = \left(\frac{a_*}{a_0}\right)^{1/2} \approx 0.03 = 2\,\mathrm{deg}\,. \tag{2.48}$$

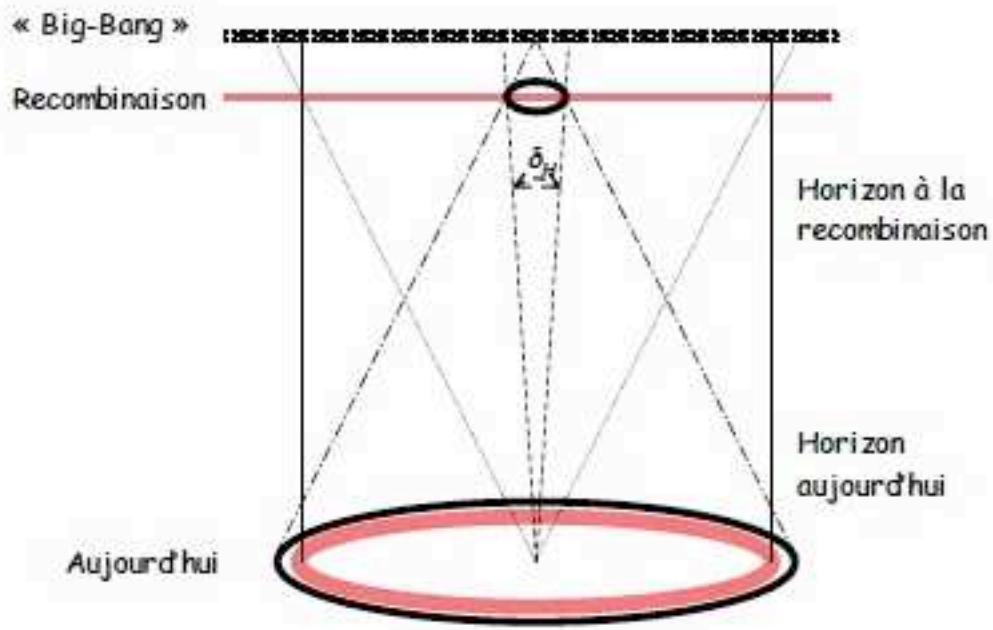


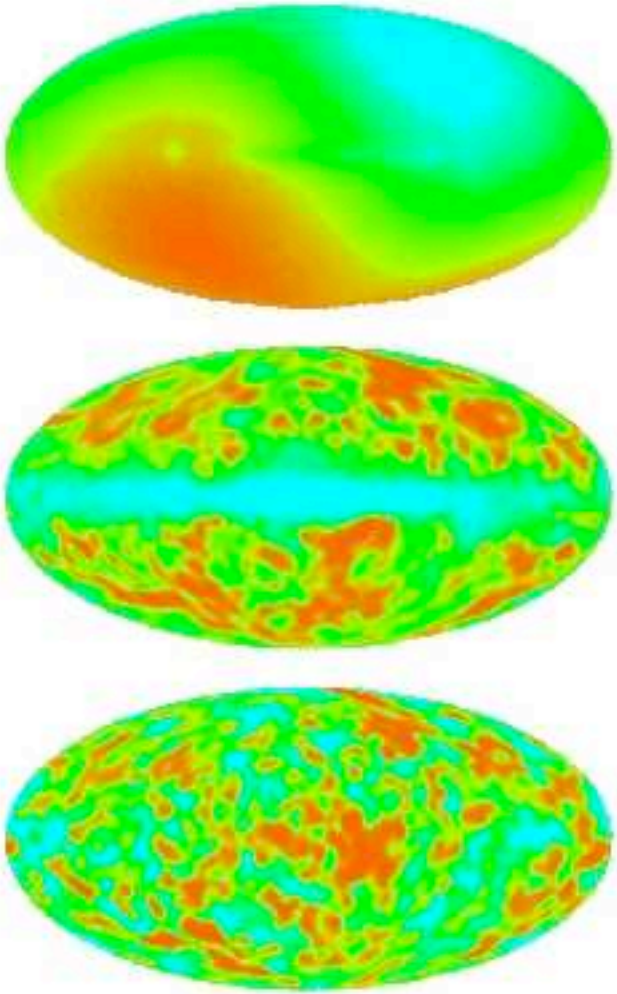
FIG. 2.6 – Construction géométrique donnant la taille angulaire de l'horizon de la surface de dernière diffusion. La surface de dernière diffusion correspond à l'interception de notre cône de lumière passé (lignes pointillées) avec le moment de la recombinaison. La taille de l'horizon correspond au rayon du cône de lumière futur (ligne en pointillés longs) partant d'un hypothétique $t = 0$ symboliquement présenté comme le "big-bang". La taille angulaire apparente de l'horizon est de l'ordre de 2 deg.

Observer l'univers extragalactique

- Compter des galaxies
- mesurer des spectres
- Faire des images

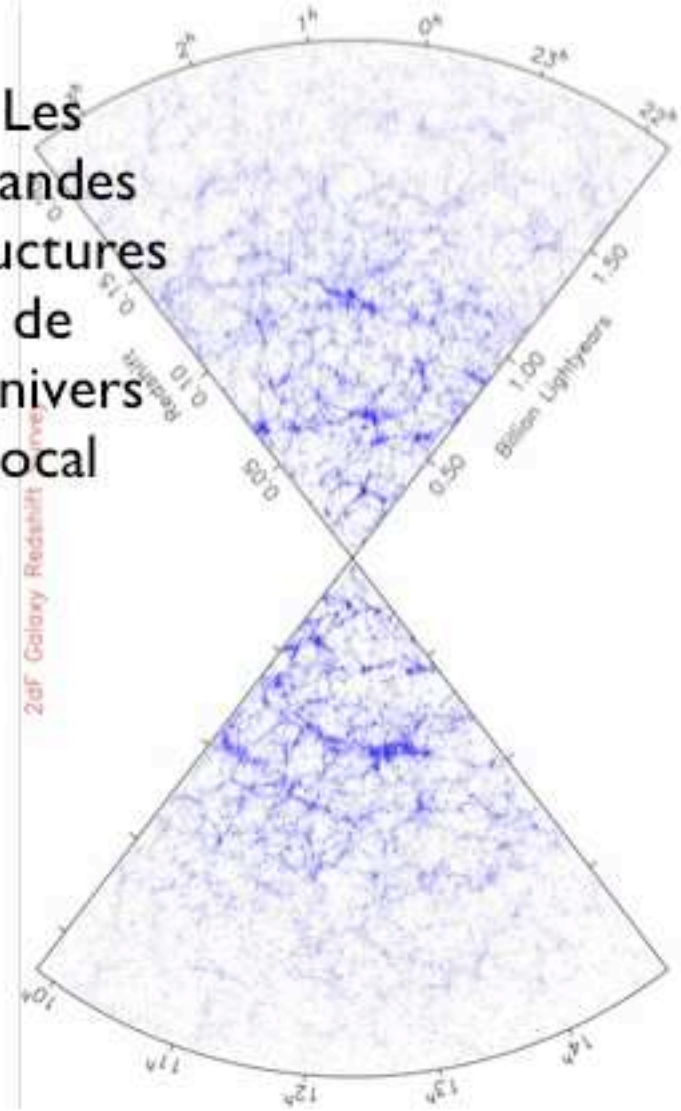
Les grandes structures

- Du CMB aux galaxies



Le fond diffus cosmologique micro-onde (CMB)

Les grandes structures de l'univers local



Plan

La propagation de photons en espace faiblement inhomogène

$$\begin{aligned} g_{00} &= -(1+2\Phi), \\ g_{0i} &= 0, \\ g_{ij} &= a^2(1-2\Psi)\gamma_{ij}, \end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}t} = g^{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta}\right)\frac{p^\alpha p^\beta}{p^0}, \tag{5.49}$$

où l'on a décrit la géodésique par un paramètre affine λ de telle sorte que,

$$\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} \equiv p^\mu. \tag{5.50}$$

On a ainsi pour la composante 0,

$$\frac{\mathrm{d}p^0}{\mathrm{d}t} = g^{00}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{0\alpha}}{\partial x^\beta}\right)\frac{p^\alpha p^\beta}{p^0}. \tag{5.51}$$

Après quelques lignes de calculs on a

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}p^0}{\mathrm{d}t} = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\frac{1}{a}(1-\Phi) - \frac{\partial\Psi}{\partial t} + 2\phi_i\frac{\gamma_i}{u}\right). \tag{5.52}$$

on a l'équation d'évolution de l'impulsion,

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} - \frac{\gamma_i}{a}\Phi_{,i}. \tag{5.54}$$

Le premier terme de droite correspond à un effet de dilution[5], les deux autres, à des effets gravitationnels (potentiels gravitationnels variables).

$$\Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}(\theta+\Phi) = \frac{\partial}{\partial\eta}(\Phi+\Psi) \quad \text{avec} \quad \mathrm{d}\eta = \frac{\mathrm{d}t}{a}.$$

A.6.2 La déflexion gravitationnelle de la lumière

Dans un premier temps on se place dans une métrique Newtonienne. On s'intéresse alors à l'évolution d'un quadrivecteur impulsion d'un photon dans cette métrique. L'équation maîtresse est l'équation géodésique qui donne l'évolution du quadrivecteur (p^0, p^i) en fonction du temps. L'impulsion d'un photon se propageant le long de la géodésique est $p^\mu = \mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\tau$. On peut ainsi faire de changement de variable $t \to \tau$ si bien que l'équation géodésique devient,

$$p^0 \frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}t} = -\Gamma^\lambda_{\mu\nu} p^\nu p^\mu. \tag{A.62}$$

On peut décomposer le quadri-vecteur impulsion en une impulsion p définie par,

$$p^2 = -{p^0}^2 g_{00} = p^i p^j g_{ij}, \tag{A.63}$$

et une direction, sous forme d'un trivecteur n^i, proportionel à p^i et de norme unité, e.g., $n^i n^j g_{ij} = 1$, ce qui conduit à,

$$n^i = \frac{p^i}{p}. \tag{A.64}$$

L'équation des géodésiques conduit à une variation aussi bien d'impulsion p que de la direction γ_i.

Dans ce paragraphe on s'intéresse à ce dernier effet. On choisit une direction i perpendiculaire à la direction de propagation donc pour laquelle $n^i = 0$. Dans le cas qui nous intéresse, au premier ordre en ϕ^{N},

$$\Gamma^i_{jk} = -\phi^{\mathrm{N}}_{,j}\delta^i_k - \phi^{\mathrm{N}}_{,k}\delta^i_j + \phi^{\mathrm{N}}_{,i}\delta^{ij}\delta_{jk} \tag{A.65}$$

$$\Gamma^i_{00} = \phi^{\mathrm{N}}_{,j}\delta^{ij}, \tag{A.66}$$

$$\Gamma^0_{i0} = \phi^{\mathrm{N}}_{,i}, \tag{A.67}$$

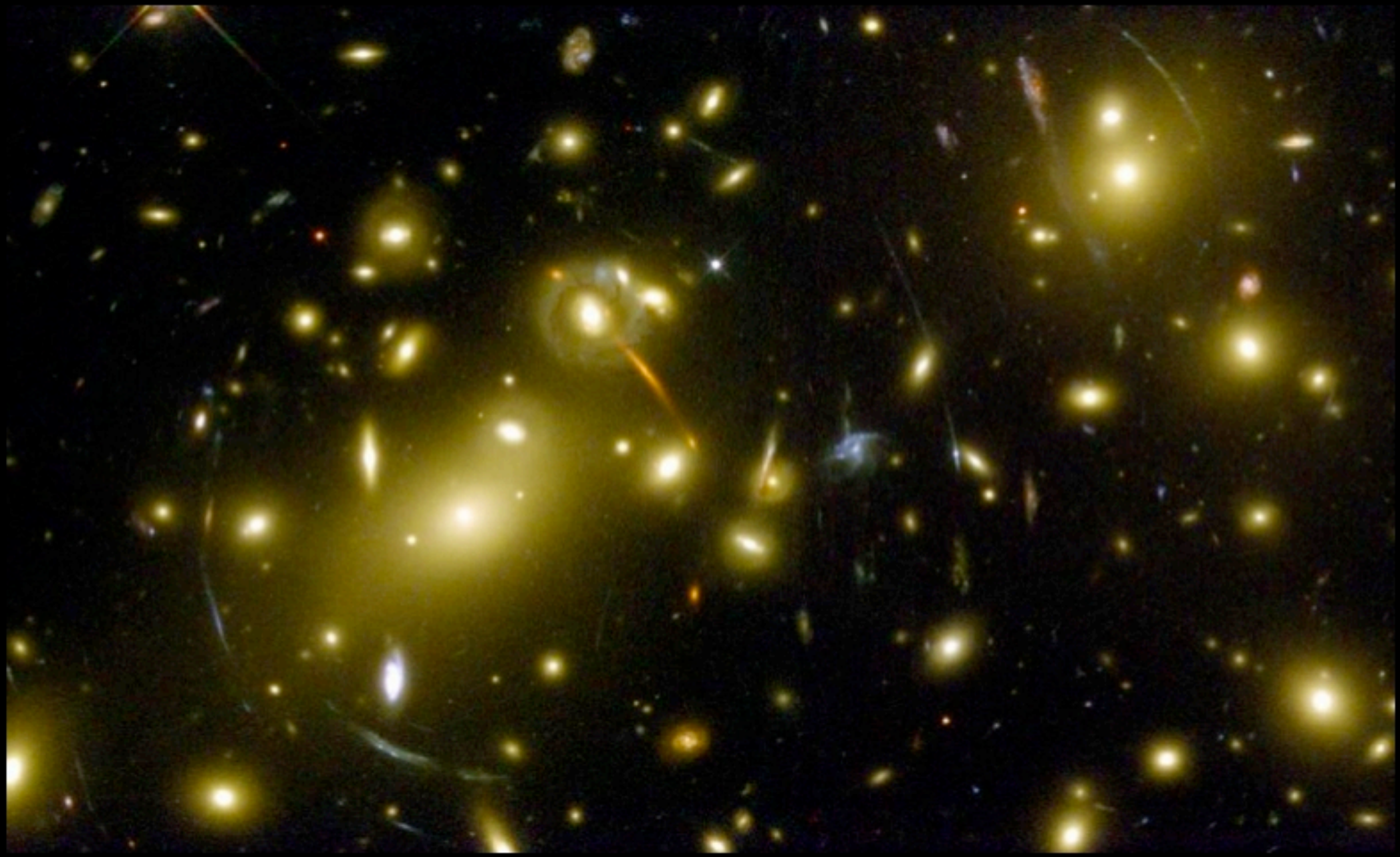
les autres paramètres affines étant nuls, si bien que

$$\frac{\mathrm{d}p^0}{\mathrm{d}t} = -\phi^{\mathrm{N}}_{,i}p^i \tag{A.68}$$

$$\frac{\mathrm{d}p^i}{\mathrm{d}t} = 2\phi^{\mathrm{N}}_{,j}p^j\frac{p^i}{p^0} - \phi^{\mathrm{N}}_{,i}\left(p^0 + \frac{p^jp^k\delta_{jk}}{p^0}\right). \tag{A.69}$$

Au premier ordre en ϕ^{N} la parenthèse du terme de droite vaut simplement $2p^0$. Pour le choix de direction i, $p^i = 0$ et donc, à cet ordre là, il vient,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}n^i = -2\phi^{\mathrm{N}}_i. \tag{A.70}$$



Cosmologie et fluctuations primordiales

SPhT, 9 novembre - 14 décembre 2007

- **Univers homogène, univers inhomogène**
  La métrique de Friedmann-Robertson-Walker. Introduction à la notion de distances et d'horizons. Inhomogénéités de l'espace temps. Relations entre métrique et quantités observables. Outils statistiques : fonctions de corrélations et spectres de puissance.

- **Le développement des instabilités gravitationnelles**
  Identification des modes propres d'instabilité. Décomposition Scalaire-Vecteur-Tenseur et identification des modes de jauge. Evolutions sub- et super-Hubble. Modes adiabatiques et modes isocourbes.

- **L'inflation, paradigme et prédictions I**
  La nécessité d'une phase inflationnaire. Quelle quantité d'inflation ? Forme de Mukhanov de l'action et quantification des champs. Transition quantique-classique. Spectres de puissance induits.

- **L'inflation, paradigme et prédictions II**
  Ondes gravitationnelles. Relations entre indices spectraux. Conséquences sur le fond diffus cosmologique.

- **Modèles inflationnaires**
  Inflation à un champ, chaotique, en loi de puissance. Modèles hybrides, modèles construits à partir des théories supersymétriques. Inflation multi-champ. Action de Dirac-Born-Infeld.

- **Au delà du régime linéaire, l'univers primordial, l'univers local**
  Couplages de modes dans l'univers local. Couplages de modes pendant la phase inflationnaire. Prédictions de l'inflation standard.

Plan du cours II

- Quelles fluctuations de métrique ?
  - décomposition Scalaires, Vecteur, tenseurs
  - Modes de jauge
- Equations d'Einstein
  - Modes adiabatiques, isocourbes...
- Eléments de statistique

Quelles fluctuations de métrique

On s'intéresse ici aux propriétés de la métrique à des échelles cosmologiques. L'application du principe cosmologique permet alors de contraindre les éléments de métrique[11]. La forme générale de la métrique prend alors la forme de la métrique de Friedmann-Robertson-Walker,

$$\mathrm{d}s^2 = a^2(\eta)\left(-\mathrm{d}\eta^2 + {}^3g_{ab}\,\mathrm{d}x^a\mathrm{d}x^b\right), \tag{A.114}$$

où η est le temps conforme, ${}^3g_{ab}$ la partie spatiale de la métrique.

A.8.1 Perturbations de la métrique en espace de FRW

Ce qui nous intéresse ici c'est plus particulière d'examiner le type de perturbations qui peuvent se développer dans une telle métrique. On suppose donc qu'il peut se développer des fluctuations de métrique de toute nature autour d'une métrique moyenne de FRW. Ces fluctuations sont évidemment liées à des fluctuations de densité ou de pression dans l'univers. La forme générale de la métrique que l'on se propose d'étudier est donc,

$$g_{00} = -a^2(\eta)\left[1 + h_{00}(\eta, x^i)\right] \tag{A.116}$$

$$g_{0a} = -a^2(\eta)\, h_{0a}(\eta, x^i) \tag{A.117}$$

$$g_{ab} = a^2(\eta)\left[{}^3g_{ab}(\eta, x^i) + h_{ab}(\eta, x^i)\right] \tag{A.118}$$

avec $h_{\mu\nu} \ll 1$. L'analyse de ces fluctuations repose sur une étude perturbative. Notons dans un premier temps que l'on peut prendre appui sur l'homogénéité spatiale. Si on s'autorise l'existence d'une courbure spatiale on est amené à définir des *dérivées spatiales covariante*,

$$\begin{aligned} X^{a_1\ldots a_n}{}_{b_1\ldots b_m|c} &= \frac{\partial}{\partial x^c} T^{a_1\ldots a_n}{}_{b_1\ldots b_m} \\ &+ \sum_{i=1}^{n} {}^3\Gamma^{a_i}_{ce} X^{a_1\ldots e\ldots a_n}{}_{b_1\ldots b_m} - \sum_{i=1}^{m} {}^3\Gamma^{e}_{b_i c} X^{a_1\ldots a_n}{}_{b_1\ldots e\ldots b_m} \end{aligned} \tag{A.119}$$

où les paramètres de connection affine sont définis par rapport à la partie spatiale de la métrique, ${}^3g_{ab}$. On peut alors définir des quantités tensorielles mais uniquement par rapport aux changements de coordonnées spatiales. On passera ainsi d'indice d'espace covariant à un indice contravariant par action du tenseur 3x3 ${}^3g_{ab}$ ou de son inverse.

A.8.2 Perturbations scalaires, vecteurs et tenseurs

On peut alors classer les différentes perturbations de la métrique selon la manière dont elles se transforment sous des *transformations spatiales* (et non pas spatio-temporelles) dans la métrique non perturbée. On a ainsi a priori des des fluctuations de type scalaire, vecteur ou tenseur.

De plus comme dans la métrique non-perturbée on a une séparation de temps et de l'espace, les perturbations de la métrique devront pouvoir s'écrire comme modes propres des opérateurs de différentiation covariants, c'est à dire des modes propres du Laplacien (équation de Helmholtz généralisée),

$$X^{|a}{}_{|a} + k^2 X = 0, \tag{A.120}$$

où k est la longueur d'un vecteur d'onde inversement proportionnelle à la taille comobile de la perturbation. Il va de soit que si la métrique spatiale est plate, une classe de solutions de (A.120) est constituée par les ondes planes.

Tout champ $S(x^a)$ scalaire va pouvoir se décomposer en sommes de fonctions solutions de (A.120), $S_{(k)}(x^a)$.

Une telle solution propre permet de définir un champ vectoriel,

$$S_{(k)a} = -\frac{1}{k}\, S_{(k)|a} \tag{A.121}$$

et un tenseur de rang deux, symétrique et de trace nulle,

$$S_{(k)ab} = \frac{1}{k^2}\, S_{(k)|ab} + \frac{1}{3}\, {}^3g_{ab}\, S_{(k)}. \tag{A.122}$$

On pourrait évidemment construire des tenseurs d'ordre plus élevé mais ils ne joueront pas de rôle dans les fluctuations de métrique. On peut remarquer qu'en prenant des divergences successives de ces champs on retrouve le champ scalaire dont on est parti,

$$S_{(k)}{}^{a}{}_{|a} = k\, S_{(k)} \tag{A.123}$$

$$S_{(k)}{}^{ab}{}_{|ab} = \frac{2}{3}(k^2 - 3K) S_{(k)}. \tag{A.124}$$

Il reste qu'il existe des champs vectoriels ou tensoriels qui ne peuvent pas être atteints par une telle construction. Ainsi un champ vectoriel de *divergence nulle* V^a ne peut pas dérivé d'un champ scalaire après application d'une ou deux opération(s) de dérivée covariante. Cela étant rien n'empêche de décomposer un tel champ en modes propres vectoriels $V^a_{(k)}$, solutions de (A.120),

$$V_{(k)}{}^{a|b}{}_{|b} + k^2 V_{(k)}{}^{a} = 0. \tag{A.125}$$

A partir d'un tel champ on peut construire un champ tensoriel de rang deux, symétrique, sans trace mais pas sans divergence,

$$V_{(k)}{}^{ab} = -\frac{1}{2}\left(V_{(k)}{}^{b|a} + V_{(k)}{}^{a|b}\right). \tag{A.126}$$

Par contre on ne peut construire de champ scalaire.

Il reste un type de champ tensoriel qui ne permet de construire ni un champ scalaire ni un champ vectoriel ; ce sont les champs tensoriels sans trace et sans divergence qui vont décrire les ondes gravitationnelles. Ces champs sont aussi décomposables en modes propres de (A.120), $T^{ab}_{(k)}$

$$T_{(k)}{}^{ab|c}{}_{|c} + k^2 T_{(k)}{}^{ab} = 0. \tag{A.127}$$

De tels champs ne permettent par contre de construire ni de champs vectoriels, ni de champs scalaires.

Perturbations scalaires

Dans le premier cas on peut supposer que toutes les composantes des perturbations de la métrique sont proportionnelles à un mode donné $S_{(k)}(x^i)$, $S_{(k)a}(x^i)$ ou $S_{(k)ab}(x^i)$ selon sa nature. Ainsi on peut écrire (en omettant dorénavant l'indice (k) qui est toujours sous-entendu),

$$h_{00}(\eta, x^i) = 2\,\mathcal{A}_S(\eta)\,S(x^i) \tag{A.128}$$

$$h_{0a}(\eta, x^i) = \mathcal{B}_S(\eta)\,S_a(x^i) \tag{A.129}$$

$$h_{ab}(\eta, x^i) = 2\,\mathcal{C}_S(\eta)\,{}^3g_{ab}(x^i) + 2\,\mathcal{D}_S(\eta)\,S_{ab}(x^i) \tag{A.130}$$

Il faut faire le même exercice de décomposition pour le tenseur énergie-impulsion du champ de matière. Pour construire de manière consistante les composantes du tenseur il est profitable de se placer d'abord dans le référentiel au repos du fluide. Dans ce cas, on va avoir des fluctuations locales d'énergie, de pression isotrope et éventuellement de pression anisotrope. L'application d'une transformé de Lorentz le long d'un quadri-vecteur V^i donne alors la forme générale des éléments mixtes de la matrice énergie-impulsion du fluide.

A la densité moyenne d'énergie $\rho(\eta)$ on associe les fluctuations relatives d'énergie locales, $\delta(\eta)S(x^i)$, de telle sorte que le première composante du tenseur énergie impulsion s'écrit,

$$T^0_0(\eta, x^i) = -\rho(\eta)\left[1 + \delta(\eta)S(x^i)\right] \tag{A.131}$$

Les composantes croisées de la matrice sont données par,

$$\begin{aligned} T^0_a(\eta, x^i) &= (\rho(\eta) + P(\eta))\,[V(\eta) - \mathcal{B}_S(\eta)]\,S_a(x^i) \\ T^a_0(\eta, x^i) &= -(\rho(\eta) + P(\eta))\;V(\eta)\;S^a(x^i) \end{aligned} \tag{A.132}$$

et on retrouve la forme générale pour un fluide parfait.

Les composantes spatiales de la métrique ne sont pas affectées par la transformée de Lorentz et s'écrivent,

$$T^a_b = P(\eta)\left[1 + \delta_P(\eta)S(x^i)\right]\delta^a_b + P(\eta)\pi_S(\eta)\;S^a{}_b(x^a). \tag{A.133}$$

Perturbations vectorielles

Ici on n'entend des perturbations vectorielles non-susceptibles d'être induites par des perturbations scalaires, donc des perturbations dont la dépendance spatiale sera proportionnelle à ${V_{(k)}}^a$. Dans ce cas là les quantités scalaires, T_{00}, la densité, etc., restent inchangées et on a simplement,

$$h_{0a}(\eta, x^i) = -\mathcal{B}_V(\eta)\, V_a(x^i) \tag{A.134}$$

$$h_{ab}(\eta, x^i) = 2\,\mathcal{D}_V(\eta)\, V_{ab}(x^i) \tag{A.135}$$

et pour le tenseur énergie-impulsion,

$$T^0_a(\eta, x^i) = (\rho(\eta) + P(\eta))\,[V(\eta) - \mathcal{B}_S(\eta)]\, S_a(x^i) \tag{A.136}$$

$$T^a_b = P(\eta)\delta^a_b + P(\eta)\pi_V(\eta)\; V^a_b(x^a). \tag{A.137}$$

Perturbations tensorielles

Dans ce cas là, on ne peut induire des perturbations que dans les parties spatiales sans trace des tenseurs,

$$h_{ab}(\eta, x^i) = 2\,\mathcal{D}_T(\eta)\, T_{ab}(x^i) \tag{A.138}$$

$$T^a_b = P(\eta)\delta^a_b + P(\eta)\pi_T(\eta)\; T^a_b(x^a). \tag{A.139}$$

Degrés de liberté de jauge ?

J. M. Bardeen, "Gauge-invariant cosmological perturbations," Phys. Rev. D , vol. 22, pp. 1882–1905, Oct. 1980.

A.8.3 Transformées de Jauge

L'analyse en perturbation des tenseurs nous a conduit à définir un certain nombre de grandeurs dépendantes du temps pour chaque type de perturbations. Il nous faut maintenant identifier les degrés de liberté redondant, c'est à dire ceux qui sont dus à une simple liberté de jauge. Il ne s'agit cependant pas de rechercher le comportement de ces quantités sous toutes les transformations de jauge possibles mais uniquement sous les transformées de jauge qui laissent inchangée la partie homogène.

Ainsi on va considérer un système de coordonnées, $(\tilde{\eta}, \tilde{x}^i)$, qui soit proche, c'est à dire obtenu par variation infinitésimale du système de coordonnées initial (η, x^i) et qui donne "la même physique", c'est à dire avec,

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\kappa}{\partial x^\nu} \tilde{g}_{\lambda\kappa}(\tilde{x}). \tag{A.140}$$

Les deux systèmes de coordonnés sont donc par construction identiques pour la partie homogène. Il reste que dans ces deux systèmes, les perturbations de métrique vont prendre des valeurs différentes, e.g. pour une même source de perturbation (un mode donné scalaire, tenseur ou vecteur) les fonctions $\mathcal{A}_S$, ... $\mathcal{D}_S$, $\mathcal{B}_V$, $\mathcal{D}_V$ et $\mathcal{D}_T$ par exemple changent de forme.

Ces variations de coordonnées correspondent elles-mêmes à un champ de transformations infinitésimales avec a priori des composantes scalaires, vectorielles et tensorielles dépendant de la nature de la transformée. Selon la nature des perturbations que l'on étudie dans le système de coordonnées initial, (η, x^i), pour les mêmes raisons que précédemment, les seules transformations pertinentes des coordonnées sont celles qui font intervenir le même champ, $S_{(k)}$, $V_{(k)}$ ou $T_{(k)}$.

Perturbations scalaires

Dans ce cas la forme générale de la transformée est

$$\tilde{\eta}(\eta, x^i) = \eta + \mathcal{T}_S(\eta)\, S(x^i) \tag{A.141}$$

$$\tilde{x}^a(\eta, x^i) = x^a + \mathcal{L}_S(\eta)\, S^a(x^i) \tag{A.142}$$

où $\mathcal{T}_S$ et $\mathcal{L}_S$ sont des fonctions arbitraires et libres du temps. La relation (A.140) implique alors que[12],

$$a(\tilde{\eta}) \approx a(\eta)\left[1 + \frac{a'}{a}\mathcal{T}_S(\eta)\, S(x^i)]\right] \tag{A.143}$$

$${}^3g_{ab}(\tilde{x}^i) \approx {}^3g_{ab}(x^i) + \mathcal{L}_S(\eta)\, S^c(x^i)\frac{\partial}{\partial x^c}{}^3g_{ab}(x^i). \tag{A.144}$$

Si on écrit maintenant la relation (A.140) à l'ordre linéaire en $S(x^i)$ on obtient, après quelques lignes de calculs soigneux, un ensemble de relations fonctionnelles entre les coefficients dépendant du temps dans la métrique perturbée,

$$\tilde{\mathcal{A}}_S = \mathcal{A}_S - \mathcal{T}_S' - \frac{a'}{a}\mathcal{T}_S \tag{A.145}$$

$$\tilde{\mathcal{B}}_S = \mathcal{B}_S + \mathcal{L}_S' + k\mathcal{T}_S \tag{A.146}$$

$$\tilde{\mathcal{C}}_S = \mathcal{C}_S - \frac{k}{3}\mathcal{L}_S - \frac{a'}{a}\mathcal{T}_S \tag{A.147}$$

$$\tilde{\mathcal{D}}_S = \mathcal{D}_S + k\mathcal{L}_S \tag{A.148}$$

où toutes ces fonctions s'entendent comme fonctions de η.

Il nous manque encore les relations concernant les éléments du tenseur énergie-impulsion. La différence de vitesse des fluide $\tilde{V}^i - V^i$ est simplement donnée par $\mathrm{d}(\tilde{x}^i - x^i)/\mathrm{d}\eta$, et donc

$$\tilde{V} = V + \mathcal{L}_S'. \tag{A.149}$$

La densité d'énergie est un scalaire et donc pour lequel on doit avoir $\tilde{\rho}(\tilde{\eta}) = \rho(\eta)$. Cela implique que[13]

$$\tilde{\delta} = \delta + 3(1 + P/\rho)\frac{a'}{a}\mathcal{T}_S, \tag{A.150}$$

quand on tire profit de (5.5). De la même manière les fluctuations isotropes de pression vont s'écrire,

$$\widetilde{\delta_P} = \delta_P - \frac{P'}{P}\mathcal{T}_S \tag{A.151}$$

alors la partie anisotrope sans trace reste à cet ordre invariante de jauge.

A partir de là deux voies sont possibles. On peut décider d'un choix de jauge particulier c'est à dire du choix de deux fonctions, $\mathcal{T}_S$ et $\mathcal{L}_S$, qui éliminent judicieusement des fonctions inconnues. Ainsi on peut faire un choix de jauge tel que $\mathcal{A}_S = \mathcal{B}_S = 0$: c'est la *jauge synchrone* dans laquelle seule la partie spatiale de la métrique est perturbée. Pour ce choix de jauge, ce sont les relations (A.145) et (A.146) qui fixent[15] respectivement $\mathcal{T}_S$ et $\mathcal{L}_S$. On peut tout aussi légitimement s'appuyer sur (A.148) et (A.146) pour faire le choix de $\mathcal{B}_S = \mathcal{D}_S = 0$: c'est la jauge longitudinale ou de Newton. Cette dernière jauge n'est pas forcément la plus utile techniquement. Elle a cependant un avantage "pédagogique", c'est elle qui se rapproche le plus de la limite Newtonienne.

Par inspection des relations (A.145-A.148), on peut exhiber deux quantités invariantes de jauge, $\Phi_{\mathcal{A}_S}$ et $\Phi_{\mathcal{C}_S}$,

$$\Phi_{\mathcal{A}_S} = \mathcal{A}_S + \frac{1}{k}\mathcal{B}'_S + \frac{1}{k}\frac{a'}{a}\mathcal{B}_S - \frac{1}{k^2}\left(\mathcal{D}''_S + \frac{a'}{a}\mathcal{D}'_S\right) \tag{A.152}$$

$$\Phi_{\mathcal{C}_S} = \mathcal{C}_S + \frac{1}{3}\mathcal{D}_S + \frac{1}{k}\frac{a'}{a}\mathcal{B}_S - \frac{1}{k^2}\frac{a'}{a}\mathcal{D}'_S, \tag{A.153}$$

construites à partir des potentiels de la métrique.

On a déjà remarqué que les éléments de la matrice énergie-impulsion ne sont pas invariants de jauge. On peut aussi construire des quantités invariantes de jauge à partir du contraste de densité ou du champ de vitesse. Ainsi

$$V_S = V - \frac{1}{k}\mathcal{D}'_S \tag{A.154}$$

est un invariant de jauge. De même,

$$\delta_S = \delta + 3(1 + P/\rho)\frac{a'}{a}(V - \mathcal{B}_S) \tag{A.155}$$

Perturbations vectorielles

On va retrouver une situation similaire mais plus simple pour les perturbations vectorielles. En effet dans ce cas le variable de temps est définie sans ambiguïté. On ne peut faire qu'une transformation des coordonnées spatiales,

$$\tilde{x}^a(\eta, x^i) = x^a + \mathcal{L}_S(\eta)\, V^a(x^i) \tag{A.156}$$

de telle sorte que

$$\tilde{\mathcal{B}}_v = \mathcal{B}_v + \mathcal{L}'_v \tag{A.157}$$

$$\tilde{\mathcal{D}}_v = \mathcal{D}_v + k\mathcal{L}_v. \tag{A.158}$$

La vitesse se transforme en

$$\tilde{V} = V + \mathcal{L}'_v. \tag{A.159}$$

Il existe alors une quantité invariante de jauge pour la métrique,

$$\Psi_{\mathcal{B}_v} = \mathcal{B}_v - \frac{1}{k}\mathcal{D}'_v \tag{A.160}$$

et une quantité invariante de jauge liée à la vitesse,

$$V_v = V - \mathcal{B}_v. \tag{A.161}$$

Perturbations tensorielles

Enfin il n'y a pas de transformées de jauge possibles pour les fluctuations tensorielles qui sont donc invariantes de jauge à cet ordre.

A.8.4 Les équations d'Einstein en quantités invariantes de jauge

L'objectif de ce paragraphe est de donner, et non de résoudre les équations d'Einstein, ce qui demanderait de faire des hypothèses sur le contenu en énergie/matière de l'univers. La description des solutions de ces équations fait l'objet de multiples chapitres de ce livre selon le régime dans le lequel on se place.

On va ici se contenter d'écrire les équations d'Einstein en fonction des quantités invariantes de jauge décrites avant. Le calcul même de ces équations est un travail fastidieux qui n'est pas présenté ici. Il demande le calcul des perturbations du tenseur de Ricci et de courbure ; une tâche longue mais qui ne présente pas de difficultés particulières.

Pour les fluctuations scalaires le résultat peut finalement se mettre sous la forme de deux équations,

$$(k^2 - 3K)\Phi_{\mathcal{C}_S} = 4\pi\, G\, \rho_0\, a^2\, \delta_S, \tag{A.162}$$

qui est l'équation de Poisson généralisée[17] et,

$$k^2(\Phi_{\mathcal{A}_S} + \Phi_{\mathcal{C}_S}) = -8\pi\, G\, P_0\, a^2\, \pi_S. \tag{A.163}$$

Ainsi les deux potentiels sont opposés en l'absence de pression anisotrope.

Pour des fluctuations vectorielles on a

$$(k^2 - 2K)\Phi_{\mathcal{B}_v} = 16\pi\, G\, (\rho_0 + P_0)\, a^2\, V_v, \tag{A.164}$$

avec l'équation du mouvement pour V_v,

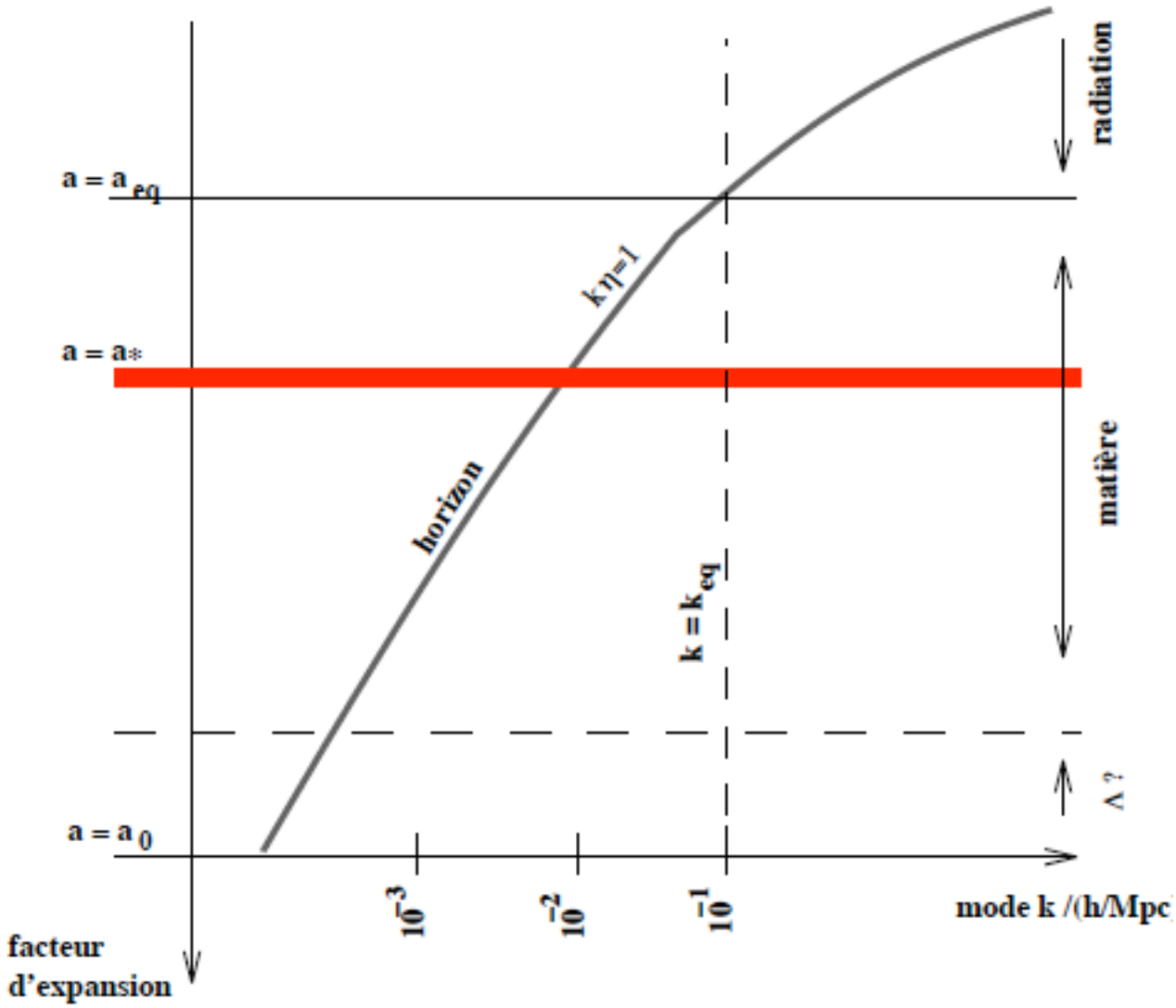
$$V_v' = -\frac{a'}{a}\left(1 - 3\frac{P_0}{\rho_0}\right) V_v - k\frac{P_0}{\rho_0 + P_0}\pi_V. \tag{A.165}$$

Enfin pour les fluctuations tensorielles il vient,

$$\mathcal{D}_T'' + 2\frac{a'}{a}\mathcal{D}_T' + (k^2 + 2K)\mathcal{D}_T = 8\pi\, G\, P_0\, a^2\, \pi_T. \tag{A.166}$$

Evolution des fluctuations

- Echelles “sub ou super-horizon”



Les analyses de transformées de jauge présentée dans la section A.8 permettent de montrer qu'il est légitime d'écrire les fluctuations de métrique de la forme[1],

$$g_{00} = -(1+2\Phi), \tag{5.16}$$
$$g_{0i} = 0, \tag{5.17}$$
$$g_{ij} = a^2(1-2\Psi)\gamma_{ij}, \tag{5.18}$$

5.3.1 Le tenseur énergie-impulsion

La forme générale du tenseur énergie impulsion au premier ordre dans les perturbations de métrique a déjà été donnée.

D'une manière générale, pour une espèce x on a,

$$T^0{}_0 = -\rho_x - \delta\rho_x, \tag{5.19}$$
$$T^i{}_0 = \frac{1}{k}(\rho_x + P_x)V_{x,i}, \tag{5.20}$$
$$T^0{}_i = -\frac{1}{k}(\rho_x + P_x)V_{x,i}, \tag{5.21}$$
$$T^i{}_j = (P_x + \delta P_x)\,\delta^i{}_j + \Pi_x{}^i{}_j, \tag{5.22}$$

où ρ_x et P_x sont respectivement la densité et la pression homogène du fluide, $\delta\rho_x$ et δP_x les fluctuations relatives de densité et de pression, V_x est le flot de x et $\Pi_x{}^i{}_j$ est la partie anisotrope (sans trace) de la pression. Dans ces expressions il faut comprendre qu'un mode $\mathbf{k}$ a été singularisé. La dépendance spatiale des fonctions qui sont écrites ici est donc celle d'une onde plane. Ainsi quand on prend la divergence d'une quantité vectorielle V_i elle s'écrit $V_{i,i} = -1/k\, V_{,ii} = kV$. De même le terme de pression anisotrope est construit à partir des divergences d'un champ scalaire, $\Pi^i_j = 1/k^2\Pi_{,ij} + 1/3\gamma_{ij}\Pi$.

La première équation de conservation, la conservation de l'impulsion donne,

$$3\mathcal{H}(\delta P_x + \delta\rho_x) + \delta\rho_x' - (\rho_x + P_x)(3\Psi' - kV_x) = 0. \tag{5.23}$$

Comme on va le voir cette équation conduit à une équation fort utile dans la suite. Remarquons dès maintenant que pour un fluide d'équation d'état donnée, $P_x = w_x\rho_x$, cette équation peut encore s'écrire,

$$kV_x + \frac{1}{1+w_x}\left(\frac{\delta\rho_x}{\rho_x}\right)' = 3\Psi'. \tag{5.24}$$

Le terme de droite étant le même pour tous les fluides, on obtient une relation entre les comportements des contrastes de densité pour les différents fluides.

La conservation de l'impulsion permet d'obtenir une nouvelle équation, elle aussi valable pour chacun des fluides,

$$(\rho_x + P_x)\left(4kV_x\mathcal{H} + kV_x' - k^2\Phi\right) + kV_x(\rho' + P') - k^2\delta P_x + k^2\Pi_x = 0 \tag{5.25}$$

Pour un fluide sans pression anisotrope Π_x et d'équation d'état donnée, on obtient la forme,

$$V_x' + (4 - 3(1+w_x))\mathcal{H}V_x - k\frac{w_x}{1+w_x}\delta\rho_x = k\Phi. \tag{5.26}$$

Pour un fluide de poussière, $w_x = 0$, on retrouve l'équation d'Euler, écrite ici pour un mode donné, et à l'ordre linéaire. Pour un fluide avec pression, on voit apparaître un terme dû aux forces de pression.

5.3.2 Les équations d'Einstein

Les équations d'Einstein vont permettre de fermer le système en reliant les potentiels gravitationnels aux éléments du tenseur d'énergie-impulsion total du système. On définit ainsi la densité, pression, vitesse du fluide total par additivité des tenseurs énergie impulsion. Ces quantité seront notées avec l'indice T. Ainsi,

$$\rho_T = \Sigma_x \rho_x, \quad \delta\rho_T = \Sigma_x \delta\rho_x, \quad V_T = \frac{1}{\rho_T + P_T} \Sigma_x (\rho_x + P_x) V_x, \quad \text{etc.} \tag{5.27}$$

Les équations d'Einstein donnent trois relations dont deux seulement sont indépendantes compte tenu des équations de conservation. Ces équations s'écrivent,

$$3\mathcal{H}^2\Phi + 3\mathcal{H}\Psi' + k^2\Psi = -\frac{1}{2M_{\rm Pl}^2}\, a^2 \delta\rho_T, \tag{5.28}$$

$$k\left(\mathcal{H}\Phi + \Psi'\right) = -\frac{1}{2M_{\rm Pl}^2}\, a^2 \left(\rho_T + P_T\right) V_T, \tag{5.29}$$

$$k^2(\Phi - \Psi) = \frac{-1}{M_{\rm Pl}^2}\, a^2\, \Pi_T. \tag{5.30}$$

Il est intéressant de voir qu'à partir des 2 premières équations d'Einstein on obtient,

$$k^2\,\Psi = -\frac{1}{2M_{\rm Pl}^2} a^2 \left(\delta\rho_T + 3\mathcal{H}(\rho_T + P_T)\frac{V_T}{k}\right). \tag{5.31}$$

C'est la généralisation de l'équation de Poisson habituelle. Il est à noter qu'il existe une jauge dans laquelle on peut annuler V_T (mais au prix d'une partie mixte dans la métrique). Formellement cette équation prend alors la forme habituelle de l'équation de Poisson. Plus simplement on peut définir un contraste de densité généralisée, Δ, par

$$\Delta_x = \frac{1}{\rho_x}\left(\delta\rho_x + 3\mathcal{H}(\rho_x + P_x)\frac{V_x}{k}\right). \tag{5.32}$$

5.3.3 Quantité conservée et modes superhorizon

L' équation de conservation de l'énergie peut se réécrire de la manière suivante,

$$(\Psi + \mathcal{H}\frac{\delta\rho_x}{\rho_x'})' + \frac{kV_x}{3} = -\frac{\mathcal{H}}{\rho_x + P_x}\left(\frac{P_x'}{\rho_x'}\delta\rho_x - \delta P_x\right), \tag{5.33}$$

en s'appuyant sur $\rho_x' = -3\mathcal{H}(\rho_x + P_x)$. Si le fluide a une équation bien déterminée, c'est à dire si la pression, est une fonction uniquement de la densité, alors le terme de droite de cette équation disparaît.

Qui plus est, aux grandes échelles, on s'attend à ce que le terme de vitesse ait un effet négligeable. Aux échelles super-Hubble on a donc,

$$(\Psi + \mathcal{H}\frac{\delta\rho_x}{\rho_x'})' = 0, \tag{5.34}$$

pour tous les fluides d'équation d'état donnée[2]. Pour deux fluides x et y différents[3] on aura donc,

$$\left(\frac{\delta\rho_x}{\rho_x'} - \frac{\delta\rho_y}{\rho_y'}\right)' = 0, \tag{5.35}$$

ce qui implique que les quantités,

$$s_{xy} = \frac{\delta\rho_x}{\rho_x + P_x} - \frac{\delta\rho_y}{\rho_y + P_y} \tag{5.36}$$

soient conservées. Ce sont les densités d'entropie correspondent à des fluctuations de composition de l'univers. Elles ne peuvent donc être générées aux échelles super-Hubble. Enfin si ces quantités sont toutes nulles[4], le terme de droite de l'équation (5.33) est nul aussi en supposant que le fluide total est un mélange de fluide d'équation d'état donné. Dans ce cas,

$$\mathcal{R} \equiv -\Psi - \mathcal{H}\frac{\delta\rho_T}{\rho_T'}, \tag{5.37}$$

est une quantité conservée aux échelles super-Hubble. C'est une quantité essentielle qui permet de faire le pont entre physique sub-Hubble et physique super-Hubble, que ce soit pendant les phases récentes de l'évolution de l'univers ou pendant une phase inflationnaire.

Le comportement de chacune des quantités pourra alors être obtenu à partir des équations d'Einstein. Pour être un peu explicite, le comportement des potentiels gravitationnels aux très grandes échelles, ou de manière équivalente à petit temps, peut facilement être obtenu en ignorant les effets de la pression anisotrope. C'est une hypothèse légitime dans la mesure celle-ci est nulle dans un fluide de matière non-relativiste, elle est nulle dans un fluide de matière relativiste couplée à de la matière non-relativiste, elle est aussi nulle pour un champ scalaire, et donc en phase inflationnaire comme on va le voir. Sous cette hypothèse $\Phi = \Psi$. En s'appuyant sur la deuxième équation d'Einstein, il est alors possible de donner une forme explicite pour la solution super-horizon des potentiels,

$$\Phi = \Psi = \mathcal{R}\left(\frac{\mathcal{H}}{a^2}\int a^2 \mathrm{d}\eta - 1\right). \tag{5.38}$$

Pour un fluide d'équation d'état donné, les potentiels gravitationnels sont constants. Pour être plus explicite on a,

$$\Psi = -\frac{2}{3}\mathcal{R}, \tag{5.39}$$

quand l'univers est dominé par la radiation et

$$\Psi = -\frac{3}{5}\mathcal{R}. \tag{5.40}$$

Il est même possible de donner la solution explicite de Ψ aux échelles super-Hubble pendant la transition rayonnement-matière en s'appuyant sur la relation (5.28),

$$\Psi = \frac{-9(a/a_{\mathrm{eq.}})^3 - 2(a/a_{\mathrm{eq.}})^2 + 8(a/a_{\mathrm{eq.}}) - 16\sqrt{(a/a_{\mathrm{eq.}}) + 1} + 16}{15(a/a_{\mathrm{eq.}})^3}\mathcal{R}. \tag{5.41}$$

Cosmologie et fluctuations primordiales

SPhT, 9 novembre - 14 décembre 2007

- **Univers homogène, univers inhomogène**
  La métrique de Friedmann-Robertson-Walker. Introduction à la notion de distances et d'horizons. Inhomogénéités de l'espace temps. Relations entre métrique et quantités observables. Outils statistiques : fonctions de corrélations et spectres de puissance.

- **Le développement des instabilités gravitationnelles**
  Identification des modes propres d'instabilité. Décomposition Scalaire-Vecteur-Tenseur et identification des modes de jauge. Evolutions sub- et super-Hubble. Modes adiabatiques et modes isocourbes.

- **L'inflation, paradigme et prédictions I**
  La nécessité d'une phase inflationnaire. Quelle quantité d'inflation ? Forme de Mukhanov de l'action et quantification des champs. Transition quantique-classique. Spectres de puissance induits.

- **L'inflation, paradigme et prédictions II**
  Ondes gravitationnelles. Relations entre indices spectraux. Conséquences sur le fond diffus cosmologique.

- **Modèles inflationnaires**
  Inflation à un champ, chaotique, en loi de puissance. Modèles hybrides, modèles construits à partir des théories supersymétriques. Inflation multi-champ. Action de Dirac-Born-Infeld.

- **Au delà du régime linéaire, l'univers primordial, l'univers local**
  Couplages de modes dans l'univers local. Couplages de modes pendant la phase inflationnaire. Prédictions de l'inflation standard.

Plan du cours III

- Inflation, paradigme et prédiction, I
  - nécessité d'une phase inflationnaire
  - Quelle quantité d'inflation ?
  - La phase d'expansion accélérée et le régime de "roulement lent"
  - action de Mukhanov et quantification des champs
  - description des résultat, "transition quantique classique"

Pourquoi une phase inflationnaire ?

Les problèmes d'une cosmologie standard :

- Problème de la platitude
- absence de reliques indésirables
- problème de l'horizon

Univers plat, une coïncidence ou le résultat d'une évolution dynamique ?

$$1 - \Omega_{\text{tot.}} = -\frac{K}{a^2\, H^2}$$

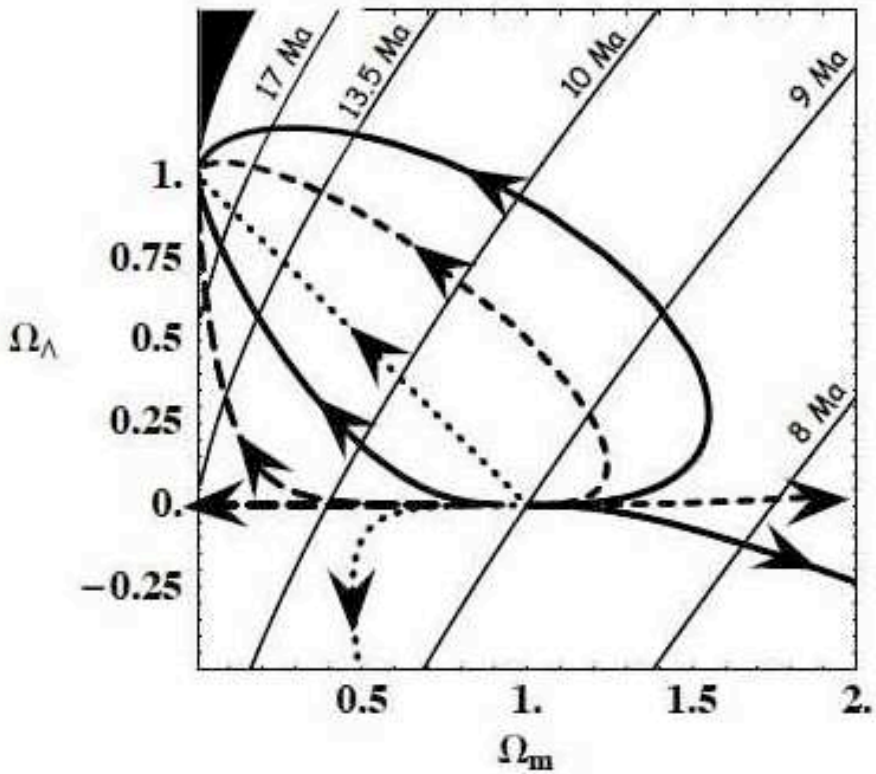


FIG. 2.4 – Comportement des paramètres cosmologiques réduits Ω_m et Ω_Λ pour différentes cosmologies dans le plan $\Omega_m - \Omega_\Lambda$. Le point Einstein-de Sitter apparaît clairement instable tandis que le point $\Omega_\Lambda = 1$, $\Omega_m = 0$ est un attracteur. Les traits fins donnent les lignes d'âge constant de l'univers de 8, 9, 10, 13.5 et 17 milliard d'années respectivement en partant du bas à droite. La zone noire correspond à un âge infini, e.g. à une absence de big-bang. Ce diagramme est à rapprocher de la planche 9.7 qui montre les contraintes observationnelles dans ce même plan.

La solution du problème de l'horizon : une phase inflationnaire

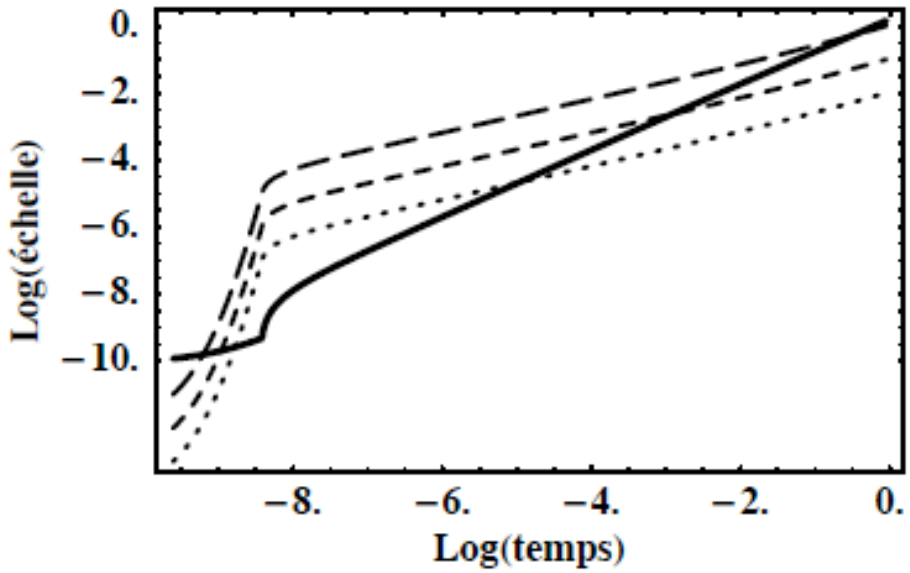


FIG. 8.1 – Comparaison d'échelles dans un scénario inflationnaire. Le rayon de Hubble, qui se comporte comme $1/H(t)$, est représenté par une ligne continue. Il est comparé au comportement d'échelles physiques correspondant à des tailles comobiles variables. Celle correspondant à notre rayon de Hubble actuel correspond à la ligne en pointillés longs. Ces échelles physique croissent comme $a(t)$. Un scénario inflationnaire avec une séquence de croissance rapide de $a(t)$ permet à ces courbes de se recroiser au cours de l'histoire thermique de l'univers. Les échelles sont logarithmiques ; les unités sont arbitraires.

L'inflation

- Définition "faible"

Une phase pendant laquelle

$$\ddot{a} > 0$$

et donc quand

$$\rho + 3P < 0$$

Combien d'inflation ?

On appelle alors N_e le nombre de "efolds",

$$N_e = \log \frac{a_{\text{fin}}}{a_H}. \tag{8.6}$$

Le calcul de ce nombre est assez élémentaire. La sortie de l'horizon pour notre univers observable se fait au moment où $a_H H_H = a_0 H_0$, H_H étant la valeur de la constante de Hubble à ce moment là. Il en résulte que

$$\frac{a_{\text{fin}}}{a_H} = \frac{a_{\text{fin}}}{a_0} \frac{H_H}{H_0}. \tag{8.7}$$

Pour estimer cette expression on fait l'hypothèse que l'on passe successivement (et instantanément) d'une phase inflationnaire à une phase dominée par le rayonnement jusqu'à $a = a_{eq}$ puis une phase dominée par la matière. Pendant cette première $a \sim \rho^{-1/4}$, puis $a \sim \rho^{-1/3}$. Il vient alors,

$$N_e = \frac{1}{4} \log \frac{\rho_H^2 \rho_{\text{fin}}^{-1}}{\rho_0^{1/3} \rho_{eq}^{2/3}}, \tag{8.8}$$

où la densité de l'univers est prise aux moments identifiés précédemment. Les densités écrites au dénominateur sont bien connues. Celles écrites au numérateur sont plus spéculatives. Remarquons que l'existence d'une phase dominée par la radiation jusqu'au moment de la nucléosynthèse primordiale impose une valeur plancher pour ρ_H et ρ_{fin} et donc un nombre minimal de efolds, de l'ordre de 25. De manière plus réaliste on s'attend à ce que la densité d'énergie pendant la phase inflationnaire soit de l'ordre de 10^{16} GeV. On peut alors écrire,

$$N_e \approx 60 + \frac{1}{4} \log \frac{\rho_H^2}{(10^{16}\text{GeV})^2} + \frac{1}{4} \log \frac{10^{16}\text{GeV}}{\rho_{\text{fin}}}. \tag{8.9}$$

C'est cette estimation que l'on considère généralement pour contraindre l'inflation. Evidemment cette contrainte dépend des détails du modèle cosmologique, en particulier des détails de l'histoire thermique de l'univers.

L'inflation avec un champ scalaire

Dans un contexte cosmologique, l'action conjointe d'un champ scalaire et de la métrique, s'écrit à partir de l'action de Hilbert-Einstein,

$$S = \int \mathrm{d}^4\mathbf{x}\,\sqrt{-g}\,\left(\mathcal{L} - \frac{\mathcal{R}\,M_{\mathrm{Pl}}^2}{2}\right), \tag{8.10}$$

où $\mathcal{L}$ est la densité de Lagrangien associée au champ scalaire[5],

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi\right) - V(\varphi). \tag{8.11}$$

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi), \quad P = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi). \tag{8.13}$$

Il est alors possible d'écrire les équations de Friedmann correspondantes,

$$H^2 = \frac{1}{3M_{\mathrm{Pl}}^2}\left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi)\right) \tag{8.14}$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{2M_{\mathrm{Pl}}^2}\,\dot{\varphi}^2, \tag{8.15}$$

auxquelles il faut rajouter l'équation de Klein-Gordon décrivant l'évolution du champ qui s'écrit pour la partie homogène,

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} = -V'(\varphi), \tag{8.16}$$

Potentiel quadratique

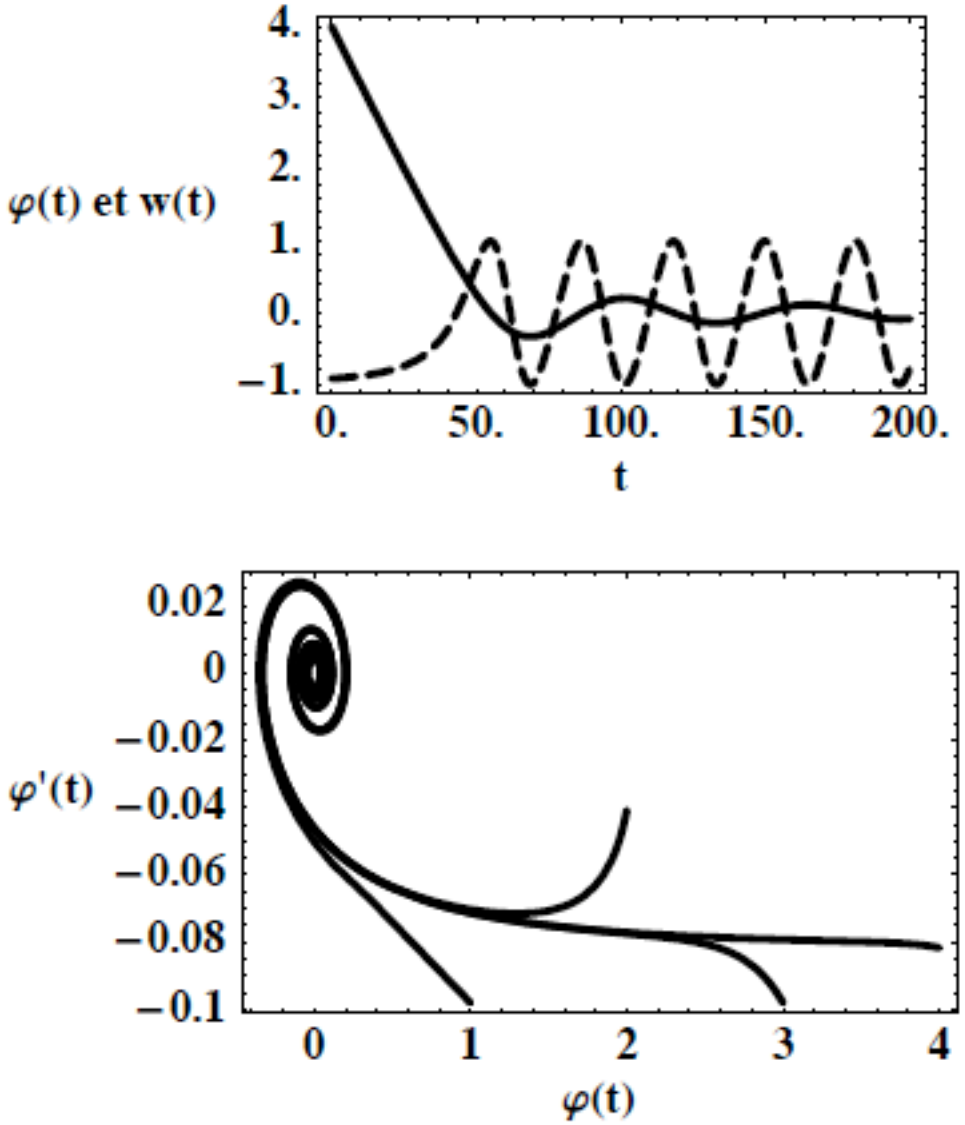


FIG. 8.2 – En haut, comportement de $\varphi(t)$ (ligne continue) et $w \equiv P/\rho$ (ligne en pointillée) pour un potentiel quadratique. Le champ est exprimée en unité de la masse de Planck. Le comportement est celui-ci est obtenu après résolution exacte de l'équation de Klein-Gordon. Après la phase inflationnaire on observe que le paramètre w présente un comportement oscillant. Sa moyenne sur un grand nombre de phases s'annule correspondant au paramètre d'état un fluide massif. En bas, trajectoire des champs dans l'espace des phases. Différentes trajectoires correspondent à différentes conditions initiales. On observe une branche asymptotique qui correspond à l'attracteur que représente la solution de slow-roll.

Potentiel quartique

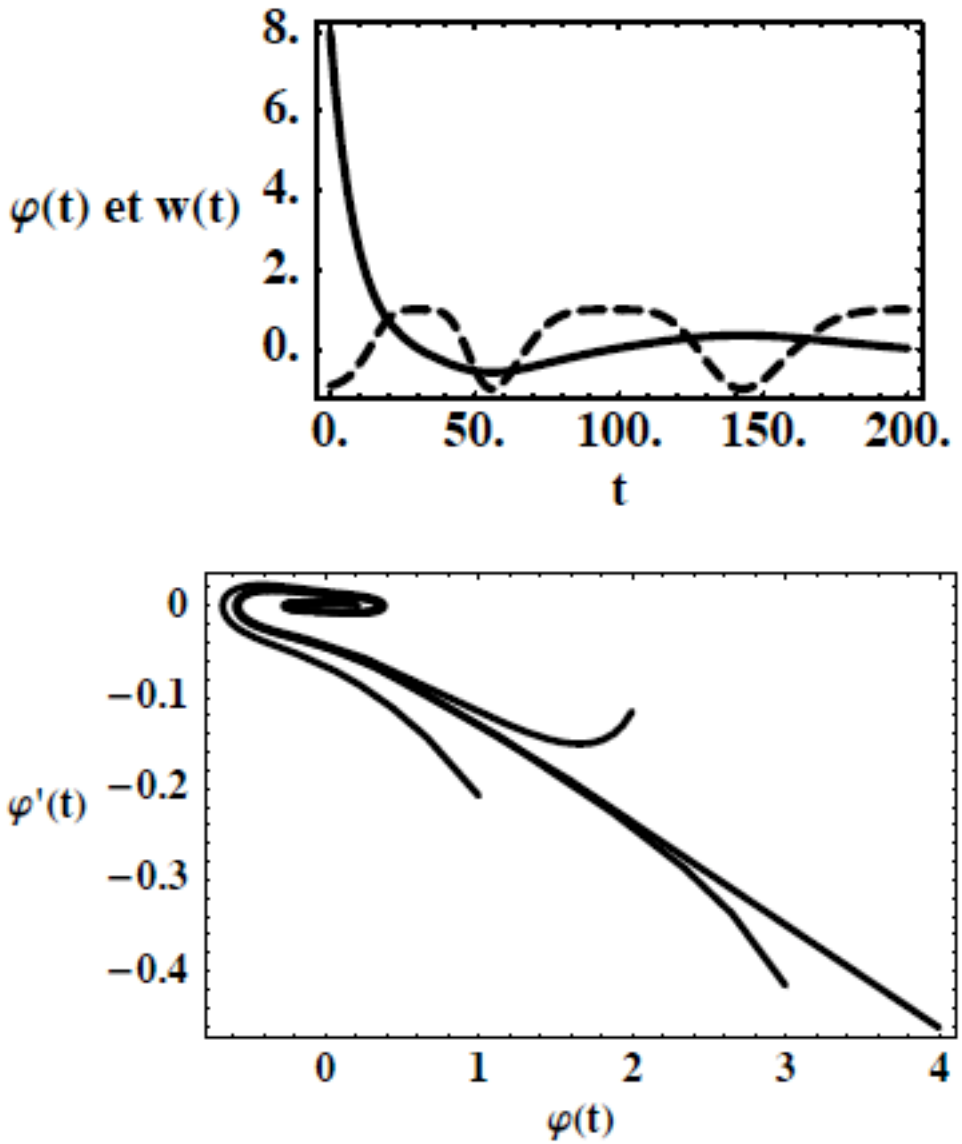


FIG. 8.3 – Mêmes figures que 8.2 mais pour un potentiel quartique. On observe que le comportement oscillant de w à la fin de la phase inflationnaire est dans ce cas là très asymétrique. Pour un tel potentiel sa valeur moyenne va s'établir à 1/3 correspondant à un univers dominé par la radiation.

Evolution de l'inflaton, le "slow-roll"

Le régime dit slow-soll, de roulement lent, correspond à un régime stationnaire où l'énergie du champ se dissipe dans une expansion rapide due à la densité d'énergie portée par le potentiel. Dans ce régime les équations du mouvement deviennent,

$$3H\dot{\varphi} = -V'(\varphi), \quad H^2 = \frac{1}{3M_{\rm Pl}^2}\, V(\varphi). \tag{8.17}$$

Il existe un certain nombre de conditions nécessaires pour entrer dans ce régime. Ces conditions s'expriment comme des conditions de régularité sur la forme du potentiel. Ainsi, on doit avoir ${\dot{\varphi}_0}^2 \ll V$ ce qui implique,

$$\epsilon = \frac{M_{\rm Pl}^2}{2}\left(\frac{V'}{V}\right)^2 \ll 1, \tag{8.18}$$

et la condition $\ddot{\varphi}_0 \ll V'$ finalement implique que,

$$|\eta| \ll 1 \;\; \text{avec} \;\; \eta = M_{\rm Pl}^2\,\frac{V''}{V}. \tag{8.19}$$

8.2.1 Potentiels quadratiques et quartiques

Pour illustrer notre propos on va s'intéresser aux cas de potentiels simples de la forme,

$$V(\varphi) = \lambda\,\varphi^p, \tag{8.20}$$

où on s'intéresse plus particulièrement aux cas $p = 2$ avec $\lambda = m^2/2$ ou $p = 4$. Les paramètres de slow-roll sont respectivement,

$$\epsilon = \eta = \frac{2\,M_{\rm Pl}^2}{\varphi^2} \tag{8.21}$$

dans le premier cas et

$$\epsilon = \frac{8\,M_{\rm Pl}^2}{\varphi^2} \;\; ; \;\; \eta = \frac{12\,M_{\rm Pl}^2}{\varphi^2} \tag{8.22}$$

dans le deuxième. En fait pour tous ces modèles les conditions de slow-roll imposent,

$$\varphi \gg M_{\rm Pl}. \tag{8.23}$$

8.7.1 Une réécriture des paramètres de slow-roll

On se propose ici de réécrire les paramètres de slow-roll en fonction non pas de $V(\varphi)$ mais de $H(t)$. Dans une inflation à un champ, la trajectoire slow-roll est en effet aussi bien décrite par la variation de $V(\varphi)$ que par les variations de H.

L'équation de Friedmann,

$$H^2(t) = \frac{1}{3M_{\rm Pl}^2} V(\varphi), \tag{8.111}$$

et l'équation de Klein-Gordon,

$$3H\dot{\varphi} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}, \tag{8.112}$$

prises dans l'approximation de slow-roll montrent que,

$$2H\dot{H} = -\frac{1}{9M_{\rm Pl}^2 H}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2. \tag{8.113}$$

Cela implique que le premier paramètre de slow-roll peut s'écrire,

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2}. \tag{8.114}$$

Le deuxième paramètre de slow-roll s'obtient par une différentiation supplémentaire par rapport au temps de l'expression de $\dot{H}$. Il vient alors,

$$\eta = \epsilon - \frac{\ddot{H}}{2H\,\dot{H}}. \tag{8.115}$$

Les paramètres de slow-roll expriment donc le fait qu'on a une phase inflationnaire si le taux de variation de H est bien moindre que le taux d'expansion de l'univers...

8.7.3 Inflation en loi de puissance

Un modèle d'inflation en loi de puissance est un modèle où le *facteur d'expansion* se comporte est une loi de puissance du temps,

$$a(t) \sim t^{\nu}, \tag{8.125}$$

où ν est constant. Un tel comportement décrira effectivement une phase inflationnaire si $\nu > 1$. Notons que pour un tel comportement on a,

$$a \sim \eta^{\frac{\nu}{(1-\nu)}}, \tag{8.126}$$

et aussi,

$$a\,H = -\frac{\nu}{\nu-1}\frac{1}{\eta}, \tag{8.127}$$

où η est le temps conforme. On se propose alors d'exhiber un modèle inflationnaire à un champ φ dont le potentiel conduit à ce comportement. On pourra alors calculer les fluctuations de courbure qui en résulte. Notons que pour un tel comportement, le rapport entre la densité de pression et la densité d'énergie est constant. L'équation de Friedmann,

$$H^2 = \frac{3}{M_{\rm Pl}^2}\left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi)\right), \tag{8.128}$$

montre alors qu'il ne pourra être obtenu que si $\dot{\varphi}(t) \sim 1/t$ et donc $\varphi(t) \sim \log(t)$, ce qui donne pour le potentiel la forme fonctionnelle suivante

$$V(\varphi) = V_0 \exp[-\varphi(t)/\alpha], \tag{8.129}$$

où α est une constante ayant la dimension d'un champ. Les équations du mouvement permettent alors de relier α à ν,

$$\frac{\alpha^2}{M_{\rm Pl}^2} = \frac{\nu}{2}. \tag{8.130}$$

Elles donnent aussi le comportement de $\varphi(t)$,

$$\varphi(t) = 2\alpha \log(t), \tag{8.131}$$

à une constante près.

La condition $\nu > 1$ impose alors $\alpha > 1/\sqrt{2}$. Sous cette condition le potentiel (8.129) conduit effectivement à une phase inflationnaire[20]. On peut aussi relier α à l'équation d'état de l'inflaton, ω_φ, ce qui conduit à,

$$\omega_\varphi = -1 + \frac{1}{3\alpha^2}. \tag{8.132}$$

Les fluctuations du champ

L'écriture des équations d'Einstein impose de connaître les éléments de matrice $T_{\mu\nu}$ pour un tel système. On trouve en particulier,

$$\delta T^0_{\ 0} = \frac{1}{a^2}\psi {\varphi_0'}^2 - \frac{1}{a^2}\delta\varphi'\varphi_0' - \frac{\partial V}{\partial\varphi}\delta\varphi \tag{8.32}$$

$$\delta T^i_{\ 0} = \frac{1}{a^2}\varphi_0'\delta\varphi_{,i} \tag{8.33}$$

auquel il faut ajouter le fait que le tenseur énergie impulsion d'un champ scalaire est sans pression anisotrope.

On déduit alors des équations d'Einstein,

$$\Psi - \Phi = 0, \tag{8.34}$$

$$\Phi' + \mathcal{H}\Phi = \frac{1}{2M_{\rm Pl}}\varphi_0'\delta\varphi, \tag{8.35}$$

$$k^2\Phi = -\frac{1}{2M_{\rm Pl}^2}\left[{\varphi_0'}^2\Phi + \varphi_0'\delta\varphi' + a^2\frac{\partial V}{\partial\varphi}\delta\varphi + 3\mathcal{H}\varphi_0'\delta\varphi\right]. \tag{8.36}$$

Il reste l'équation de Klein-Gordon qui devient,

$$\delta\varphi'' + 2\mathcal{H}\delta\varphi' + k^2\delta\varphi = -2a^2\frac{\partial V}{\partial\varphi}\Phi + 4\varphi_0'\Phi' - a^2\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}\delta\varphi \tag{8.37}$$

quand on tient compte de la relation $\Psi = \Phi$.

8.3.3 Fluctuations quantiques dans la limite slow-roll

Si on définit le champ u par

$$u(\eta, \mathbf{x}) = a(t)\,\delta\varphi(\eta, \mathbf{x}), \tag{8.38}$$

son équation d'évolution devient,

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\eta^2} + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right) u = 0 \qquad \text{ou encore} \qquad \mathcal{S} = \int \mathrm{d}\eta\, \mathrm{d}^3\mathbf{x} \left(\frac{u'^2}{2} - \frac{u_{,i}u^{,i}}{2} + \frac{z''}{z}\frac{u^2}{2}\right)$$

Le champ u a donc un terme cinétique standard. C'est ce champ là qui va pouvoir être quantifié[8]. Cela veut dire que l'on peut écrire,

$$u(\eta, \mathbf{x}) = \int \mathrm{d}^3\mathbf{k} \left[a_{\mathbf{k}}\, \psi_k(\eta)\, \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}.\mathbf{x}) + a^\dagger_{\mathbf{k}}\, \psi^*_k(\eta)\, \exp(-\mathrm{i}\mathbf{k}.\mathbf{x})\right], \tag{8.40}$$

où $a^\dagger_{\mathbf{k}}$ et $a_{\mathbf{k}}$ vont être les opérateurs de création de d'annihilation du champ. Ils obéissent donc à la relation de commutation suivante,

$$[a_{\mathbf{k}}, a^\dagger_{\mathbf{k}'}] = \mathrm{i}\hbar\delta_{\mathrm{Dirac}}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \tag{8.41}$$

Pour avoir la normalisation on peut imposer qu'à petite échelle on retrouve les mêmes règles de quantification que pour un espace de Minkowski, c'est à dire que,

$$\left[\varphi, \pi \equiv \frac{\partial}{\partial\dot{\varphi}}\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t}\varphi\right] = \mathrm{i}\,\delta^{(3)}(a\,\mathbf{x}_1 - a\,\mathbf{x}_2) = \frac{\mathrm{i}}{a^3}\,\delta^{(3)}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2). \tag{8.42}$$

Pour une métrique de Minkowski les fonctions ψ_k sont simplement proportionnelles à des exponentielles et leur amplitude est donnée par,

$$\psi_k(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\,k}}\,\exp[\mathrm{i}\,k\eta]. \tag{8.43}$$

Pour un espace inflationnaire il faut tenir compte de la masse effective du champ, a''/a, qui dépend du temps. Il se trouve que dans la limite de de Sitter, c'est à dire dans la limite de petits paramètres de slow-roll, on a $a''/a = 2/\eta^2$ et que dans ce cas l'équation (8.39) a une solution simple qui conduit à,

$$\psi_k(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\,k}}\left(1 - \frac{\mathrm{i}}{k\eta}\right)\exp[\mathrm{i}\,k\eta]. \tag{8.44}$$

Limite superhorizon

$$\delta\varphi(\eta, \mathbf{x}) = \int \mathrm{d}^3\mathbf{k}\, \hat{\varphi}_{\mathbf{k}}\, e^{\mathrm{i}\,\mathbf{k}.\mathbf{x}}, \tag{8.45}$$

avec,

$$\hat{\varphi}_{\mathbf{k}} \approx \frac{H}{k^{3/2}} \left(a_{\mathbf{k}} + a^{\dagger}_{-\mathbf{k}}\right). \tag{8.46}$$

– toutes les observables que l'on peut construire à partir de ces champs dans la limite super-horizon vont commuter entre elles. On passe donc de fluctuations quantiques à des variables qui se comportent comme des grandeurs stochastiques classiques[9]. On peut facilement vérifier de plus que les variables aléatoires $\left(a_{\mathbf{k}} + a^{\dagger}_{-\mathbf{k}}\right)$ induisent un champ stochastique Gaussien. Pour être plus spécifique on a,

$$\begin{aligned}
< 0|\hat{\varphi}_{\mathbf{k}}\hat{\varphi}_{\mathbf{k}'}|0 > &= \delta^{(3)}(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\, P_{\varphi}(k), && (8.47)\\
< 0|\hat{\varphi}_{\mathbf{k}_1} \ldots \hat{\varphi}_{\mathbf{k}_{2p}}|0 > &= \sum_{\text{combinaisons}} \prod_{\text{paires (i,j)}} < 0|\hat{\varphi}_{\mathbf{k}_i}\hat{\varphi}_{\mathbf{k}_j}|0 >, && (8.48)\\
< 0|\hat{\varphi}_{\mathbf{k}_1} \ldots \hat{\varphi}_{\mathbf{k}_{2p+1}}|0 > &= 0. && (8.49)
\end{aligned}$$

Par la suite on identifie les moyennes sur le vide à des moyennes d'ensemble sur les variables 'classiques stochastiques' $\varphi_{\mathbf{k}}$;

– ce sont les variations de la valeur de la constante de Hubble qui vont fixer les variations de l'amplitude des fluctuations de densité par la suite. Dans l'approximation du "slow-roll" la valeur de H ne change que très peu pour les échelles accessibles à l'observation. En conséquence de quoi on s'attend à avoir un spectre proche d'un spectre Harrison–Zeldovich. Pour être plus précis, le spectre de puissance du potentiel est en k^{-4+n_s}, celui de la densité sera en k^{n_s} avec $n_s \approx 1$;

Au delà de la limite Slow-Roll

$$u = -z\,\mathcal{R} = z\Phi + a\delta\varphi \tag{8.52}$$

avec

$$z = \frac{a\varphi_0'}{\mathcal{H}}. \tag{8.53}$$

L'équation du mouvement pour u, que l'on tire de l'équation de Klein-Gordon et des équations d'Einstein, prend alors une forme très simple [182],

$$u'' + \left(k^2 - \frac{z''}{z}\right) u = 0. \tag{8.54}$$

C'est un résultat tout à fait remarquable. Remarquons au passage que le terme de masse $\partial^2 V/\partial\varphi^2$ du champ φ a été absorbé dans z''/z. La variable u a de nouveau un terme cinétique standard. C'est un champ libre de masse variable z''/z. En fait pour être plus rigoureux il faut remarquer que l'action de Hilbert-Einstein en présence d'un champ scalaire de potentiel quelconque devient

$$\mathcal{S} = \int \mathrm{d}\eta\, \mathrm{d}^3\mathbf{x} \left(\frac{u'^2}{2} - \frac{u_{,i}u^{,i}}{2} + \frac{z''}{z}\frac{u^2}{2}\right) \tag{8.55}$$

8.3.6 Le spectre de puissance des fluctuations de métrique

Pour connaître la forme du spectre des fluctuations de métrique il faut en principe connaître la solution exacte à grand temps de (8.54). Ce n'est en général pas possible (voir cependant exercice 8.7.3). On peut cependant profiter du fait qu'on a deux échelles de temps très différentes, l'une rapide correspondant à l'expansion accélérée, l'autre lente à des variations des grandeurs comme $\mathcal{H}$ ou φ_0. Dans cette limite $z''/z = a''/a$; les solutions de l'équation (8.54) seront donc celles de (8.39) où la valeur de $\mathcal{H}$ est remplacée par celle de la constante de Hubble au moment de la traversée de l'horizon. Le scénario décrit précédemment se retrouve donc dans le cas général. Après la traversée de l'horizon le champ u devient un champ classique stochastique. Ainsi aux échelles super-Hubble les fluctuations de métrique écrites dans la variable conservée $\mathcal{R}$ se comportent comme un champ stochastique classique gelé de statistique Gaussienne. On peut en définir le spectre, $P_{\mathcal{R}}(k)$, par

$$\langle \mathcal{R}_{\mathbf{k}} \mathcal{R}_{\mathbf{k}'} \rangle = \delta_{\delta_{\text{Dirac}}}(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P_{\mathcal{R}}(k). \tag{8.56}$$

Celui-ci s'écrit in fine,

$$P_{\mathcal{R}}(k) = \frac{H_*^2}{2k^3} \frac{V_*^2}{V_*'^2} = \frac{H_*^2}{4k^3 \epsilon_*}, \tag{8.57}$$

où les indices $_*$ indiquent qu'il faut prendre la valeur de la quantité correspondante au moment où le mode sort de l'horizon, e.g. $k/(aH) = 1$. Les mesures des amplitudes des anisotropies de température du fond diffus cosmologique donne l'amplitude du spectre de fluctuation,

$$k^3 \, P_{\mathcal{R}}(k) \approx 4 \, 10^{-8} \quad \text{en} \quad k = 0.05/\text{Mpc} \tag{8.58}$$

d'après les derniers résultats de WMAP. Cette amplitude permet de préciser l'ordre de grandeur de la valeur de la constante de Hubble pendant la phase inflationnaire. Elle s'écrit,

$$H \approx 4 \, 10^{-4} \sqrt{\epsilon} \, M_{\text{Pl}}. \tag{8.59}$$

8.7.3 Inflation en loi de puissance, calcul du spectre

Le calcul est basé sur le comportement super-horizon des solutions des équations du mouvement pour la variable de Mukhanov, $u_{\mathbf{k}}$, équation (8.52). Notons qu'ici z, défini par (8.53), prend la forme,

$$z = \frac{a\dot{\varphi}}{H} = \frac{1}{3\alpha}a. \tag{8.133}$$

Les solutions $u_{\mathbf{k}}$ de l'équation (8.54) sont alors données par les fonctions de Hankel $H_\mu(\eta)$ d'indice μ donné par,

$$\mu = \frac{3\nu - 1}{2(\nu - 1)}, \tag{8.134}$$

avec

$$u_{\mathbf{k}}(\eta) = \frac{\sqrt{-\pi\eta}}{2} H_\mu(-k\eta). \tag{8.135}$$

Dans la limite super-horizon, ces solutions se comportent comme,

$$u_{\mathbf{k}}(\eta) \to \frac{\sqrt{-\pi\eta}}{2} \frac{\pm \mathrm{i}}{\sin(\pi\mu)\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{-k\eta}{2}\right)^{-\mu}. \tag{8.136}$$

Le spectre de puissance des fluctuations de courbure, $P_{\mathcal{R}}(k)$, est alors donné par

$$P_{\mathcal{R}}(k) = \frac{1}{z^2}|u_{\mathbf{k}}|^2. \tag{8.137}$$

Dans la limite super-horizon, ce spectre ne dépend plus du temps. Sa dépendance en k est donnée par,

$$P_{\mathcal{R}}(k) \sim k^{-3-\frac{2}{\nu-1}}. \tag{8.138}$$

Dans la limite $\nu \to \infty$ on retrouve bien un spectre invariant d'échelle. L'écart à l'invariance d'échelle, $n_s = 1 - 2/(\nu - 1)$, est bien celle attendue dans un développement slow-roll. On peut plus généralement s'assurer que la relation (8.57) est bien vérifiée dans la limite slow-roll.

8.7.4 Champ test dans un univers en expansion : une approche stochastique

$$\chi_H(a) = \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}\, W\left(\frac{k}{aH}\right) \chi_{\mathbf{k}},$$

$$\dot{\chi}_H = -\frac{1}{3H}\frac{\mathrm{d}V(\chi_H)}{\mathrm{d}\chi_H} + \xi_{\mathrm{Q}}(t).$$

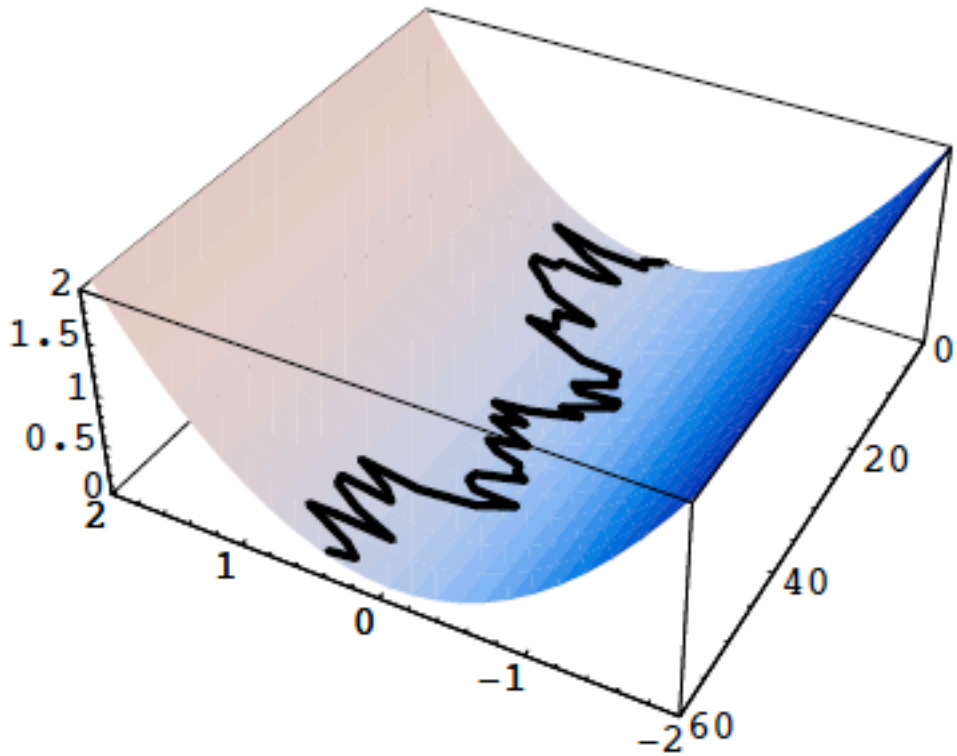


FIG. 8.14 – Illustration du comportement de χ_H suivant l'équation de Langevin (8.145). La valeur du champ se comporte comme une marche aléatoire, avec pas indépendants, mais dont les excursions sont limitées par le potentiel au fond duquel évolue le marcheur. Pour un champ de masse nul, les excursions ne sont pas bornées et la largeur de la distribution des excursions croît indéfiniment.

Formellement l'expression de $\xi_{\mathrm{Q}}(t)$ est donnée par[22],

$$\xi_{\mathrm{Q}}(t) = -\int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} (kHR_H) \left[\chi_k(t) W'(kR_H) \hat{a}_{\mathbf{k}} + \text{h.c.}\right], \tag{8.141}$$

où R_H est le rayon de Hubble, $R_H = 1/aH$ et $\xi_{\mathrm{Q}}(t)$ est exprimé en fonction des opérateurs de création et d'annihilation du champ. Le bruit quantique introduit par ce terme de source sont remplacées par un bruit classique dont les propriétés dérivent de l'identification,

$$\langle \xi(t)\xi(t')\rangle = \langle 0| \xi_{\mathrm{Q}}(t)\xi_{\mathrm{Q}}(t') |0\rangle . \tag{8.142}$$

Si par simplicité on suppose que la fenêtre W est une fenêtre carrée en espace de Fourier alors on obtient la relation suivante,

$$\langle \xi(t)\xi(t')\rangle = \frac{H^3}{4\pi^2} \delta_{\mathrm{Dirac}}(t-t'), \tag{8.143}$$

à partir du comportement de $\chi_{\mathbf{k}}(t)$ dans un espace de de Sitter.

On se retrouve alors avec une équation de Langevin de la forme,

$$\dot{\chi}_H = -\beta V'(\chi_H) + \xi, \qquad \langle \xi(t)\xi(t')\rangle = \alpha\, \delta_{\mathrm{Dirac}}(t-t'), \tag{8.144}$$

où les deux coefficients β et α sont indépendants de χ_H. Dans ce cas, il est possible de reconstruire de manière non ambiguë l'évolution de la probabilité de distribution de ξ à partir de l'évolution infinitésimale de ses moments. Plus précisément la fonction de distribution de probabilité de χ_H suit la loi d'évolution suivante [73],

$$\partial_t \mathcal{P} = \frac{\alpha^2}{2} \partial^2_{\chi_H} \mathcal{P} + \beta \partial_{\chi_H} (V'\mathcal{P}), \tag{8.145}$$

équation dite de Fokker-Planck.

Dans le cas qui nous intéresse on a, $\beta = 1/(3H)$ et $\alpha = H^{3/2}/(2\pi)$. $\mathcal{P}(\chi_H, t)$ est alors solution de,

$$\partial_t \mathcal{P} = \frac{H^3}{8\pi^2}\partial^2_{\chi_H}\mathcal{P} + \frac{1}{3H}\partial_{\chi_H}\left(V'\mathcal{P}\right). \tag{8.146}$$

Une telle équation décrit en fait le comportement d'une marche aléatoire dans un paysage énergétique donné par la forme de $V(\chi_H)$. Le comportement d'une telle marche est illustrée sur la figure 8.14.

Cette formulation possède un avantage énorme sur une approche directe. Il est en effet possible de dériver le comportement asymptotique, à grand temps, de la solution de cette équation. Elle conduit en effet à une solution d'équilibre donnée par [243],

$$\mathcal{P}_{\rm eq} = \mathcal{N}^{-1}\exp\left(-\frac{8\pi^2}{3H^4}V(\chi_H)\right), \qquad \mathcal{N} \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{8\pi^2}{3H^4}V(\chi_H)\right)\mathrm{d}\chi_H \tag{8.147}$$

indépendamment des conditions initiales. Cette solution est évidemment valable pour un champ libre massif[23]. On obtient alors la distribution suivante,

$$\mathcal{P}(\chi_H) = \frac{2\,m}{H^2}\sqrt{\frac{\pi}{3}}\,\exp\left[-\frac{4\chi_H^2 m^2\pi^2}{3H^4}\right]. \tag{8.148}$$

Il est à noter que cette distribution donne

$$\langle\chi_H^2\rangle = \frac{3\,H^4}{8\pi^2\,m^2}, \tag{8.149}$$

en accord avec ce qu'une approche rigoureuse permet d'obtenir pour le comportement de $\langle\chi_H^2\rangle$ avec la masse (voir appendice B). Les divergences infrarouges rencontrées en espace de de Sitter ne sont donc pas strictement de nature quantique. Elles viennent de l'accumulation de modes super-Hubble.

Cosmologie et fluctuations primordiales

SPhT, 9 novembre - 14 décembre 2007

- **Univers homogène, univers inhomogène**
  La métrique de Friedmann-Robertson-Walker. Introduction à la notion de distances et d'horizons. Inhomogénéités de l'espace temps. Relations entre métrique et quantités observables. Outils statistiques : fonctions de corrélations et spectres de puissance.

- **Le développement des instabilités gravitationnelles**
  Identification des modes propres d'instabilité. Décomposition Scalaire-Vecteur-Tenseur et identification des modes de jauge. Evolutions sub- et super-Hubble. Modes adiabatiques et modes isocourbes.

- **L'inflation, paradigme et prédictions I**
  La nécessité d'une phase inflationnaire. Quelle quantité d'inflation ? Forme de Mukhanov de l'action et quantification des champs. Transition quantique-classique. Spectres de puissance induits.

- **L'inflation, paradigme et prédictions II**
  Ondes gravitationnelles. Relations entre indices spectraux. Conséquences sur le fond diffus cosmologique.

- **Modèles inflationnaires**
  Inflation à un champ, chaotique, en loi de puissance. Modèles hybrides, modèles construits à partir des théories supersymétriques. Inflation multi-champ. Action de Dirac-Born-Infeld.

- **Au delà du régime linéaire, l'univers primordial, l'univers local**
  Couplages de modes dans l'univers local. Couplages de modes pendant la phase inflationnaire. Prédictions de l'inflation standard.

Plan du cours IV

- Inflation, paradigme et prédictions, II
  - Prédictions sur les fluctuations scalaires et tensorielles
  - relations entre indices spectraux
  - Conséquences sur le fond diffus cosmologique
  - contraintes observationnelles, discussion

Rappel : fluctuations scalaires induites en inflation

$$u = -z\mathcal{R} = z\Phi + a\delta\varphi \tag{8.52}$$

avec

$$z = \frac{a\varphi_0'}{\mathcal{H}}. \tag{8.53}$$

L'équation du mouvement pour u, que l'on tire de l'équation de Klein-Gordon et des équations d'Einstein, prend alors une forme très simple [182],

$$u'' + \left(k^2 - \frac{z''}{z}\right) u = 0. \tag{8.54}$$

C'est un résultat tout à fait remarquable. Remarquons au passage que le terme de masse $\partial^2 V/\partial\varphi^2$ du champ φ a été absorbé dans z''/z. La variable u a de nouveau un terme cinétique standard. C'est un champ libre de masse variable z''/z. En fait pour être plus rigoureux il faut remarquer que l'action de Hilbert-Einstein en présence d'un champ scalaire de potentiel quelconque devient

$$\mathcal{S} = \int \mathrm{d}\eta\, \mathrm{d}^3\mathrm{x} \left(\frac{u'^2}{2} - \frac{u_{,i}u^{,i}}{2} + \frac{z''}{z}\frac{u^2}{2}\right) \tag{8.55}$$

$$P_{\mathcal{R}}(k) = \frac{H_*^2}{2k^3}\frac{V_*^2}{V_*'^2} = \frac{H_*^2}{4k^3\epsilon_*}, \tag{8.57}$$

où les indices $_*$ indiquent qu'il faut prendre la valeur de la quantité correspondante au moment où le mode sort de l'horizon, e.g. $k/(aH) = 1$. Les mesures des amplitudes des anisotropies de température du fond diffus cosmologique donne l'amplitude du spectre de fluctuation,

$$k^3\, P_{\mathcal{R}}(k) \approx 4\,10^{-8} \quad \text{en} \quad k = 0.05/\text{Mpc} \tag{8.58}$$

$$\Longrightarrow \qquad H \approx 4\,10^{-4}\sqrt{\epsilon}\, M_{\text{Pl}}. \tag{8.59}$$

La valeur précise de H dépend donc non seulement de l'amplitude des fluctuations de métriques observées mais aussi de la valeur du paramètre de slow-roll. Celui-ci dépend du modèle inflationnaire. Les paramètres de slow-roll vont aussi intervenir dans la forme du spectre.

En effet l'amplitude de fluctuations de métrique attendues dépend de l'échelle à travers les variations de H_*, V_* et V_*' avec k au moment où celui-ci traverse l'échelle de Hubble. L'équation (8.57) permet de calculer les corrections à l'indice spectral à l'ordre dominant[11] dans un développement en slow-roll. Remarquons que la condition $k = aH$ implique que,

$$\mathrm{d}\log k = \mathcal{H}'\mathrm{d}\eta = -\frac{V}{M_{\text{Pl}}^2\partial V/\partial\varphi}\mathrm{d}\varphi, \tag{8.60}$$

ce qui donne,

$$\frac{\mathrm{d}\log P_{\mathcal{R}}(k)}{\mathrm{d}\log k} = -3 - 6\epsilon + 2\eta. \tag{8.61}$$

L'indice spectral que l'on définit traditionnellement pour les fluctuations de densité correspondante est alors,

$$n_s = 4 + \frac{\mathrm{d}\log P_{\mathcal{R}}(k)}{\mathrm{d}\log k} = 1 - 6\epsilon + 2\eta. \tag{8.62}$$

Les dernières données de WMAP suggèrent fortement que $n_s - 1$ soit différent de 1. Les données donnent

$$n_s = 0.951^{+0.015}_{-0.019}, \tag{8.63}$$

Cas des potentiels quadratiques et quartiques

On peut facilement montrer que pour un potentiel quadratique on a :

$$N_e \approx \frac{1}{2p}\frac{\varphi_{\mathrm{d}}^2}{M_{\mathrm{Pl}}^2}, \quad \epsilon = \frac{2\,M_{\mathrm{Pl}}^2}{\varphi^2} \;\; ; \; \eta = \frac{2\,M_{\mathrm{Pl}}^2}{\varphi^2} \qquad n_s = 1 - \frac{2}{N_e}$$

Pour un potentiel quartique on a :

$$n_s = 1 - \frac{3}{N_e}$$

8.3.7 Modes tenseur : le fond stochastique d'ondes gravitationnelles

Un mode scalaire a été identifié ; il reste deux modes tensoriels tels qu'ils ont été décrits dans l'annexe A. L'action pour ces modes s'obtient facilement en développant l'action de Hilbert-Einstein jusqu'à l'ordre deux[12] en h_{ij},

$$S_T = \frac{1}{8M_{\rm Pl}^2}\int \mathrm{d}^3\mathrm{x}\mathrm{d}\eta\, a^2\left[h'_{ij}h'^{ij} - h_{ij,k}h^{ij,k},\right] \tag{8.64}$$

Définissons v_p, ces deux modes de polarisation, par,

$$v_p = \frac{a(\eta)\, h_p}{2M_{\rm Pl}},$$

de manière à ce que l'action prennent maintenant la forme,

$$S_T = \sum_p \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3\mathrm{x}\mathrm{d}\eta\left[v_p'^2 - v_{p,i}v_p{}^{,i} + \frac{a''}{a}v_p^2\right]. \tag{8.66}$$

Les deux modes de polarisation se quantifient alors comme un mode scalaire dès lors que l'on remplace z''/z par a''/a. L'équation d'évolution des modes $v_p(\mathbf{k})$ s'écrit naturellement,

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_p(\mathbf{k})}{\mathrm{d}\eta^2} + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right)v_p(\mathbf{k}) = 0. \tag{8.67}$$

Si au moment de la traversée de l'horizon on peut supposer que l'univers est proche d'un univers de de Sitter alors les modes $v_p(\mathbf{k})$ prennent la forme,

$$v_p(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\,k}} \left(1 - \frac{\mathrm{i}}{k\eta}\right) \exp[\mathrm{i}\,k\eta], \tag{8.68}$$

qui donne l'amplitude des modes à la traversée de l'horizon. Ils vont conduire à des fluctuations tensorielles dont le spectre total (prenant en compte les deux modes de polarisations) est donné par,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{T}}(k) = 4\frac{H_*^2}{k^3}. \tag{8.69}$$

Remarquons tout de suite que, contrairement au cas des fluctuations scalaires, l'amplitude des fluctuations de métrique tensorielle est directement proportionnelle à la valeur de H pendant la phase inflationnaire. Si on définit r comme le rapport des 2 spectres,

$$r = \frac{\mathcal{P}_{\mathcal{T}}(k)}{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)}, \tag{8.70}$$

il vient dans l'approximation de slow-roll,

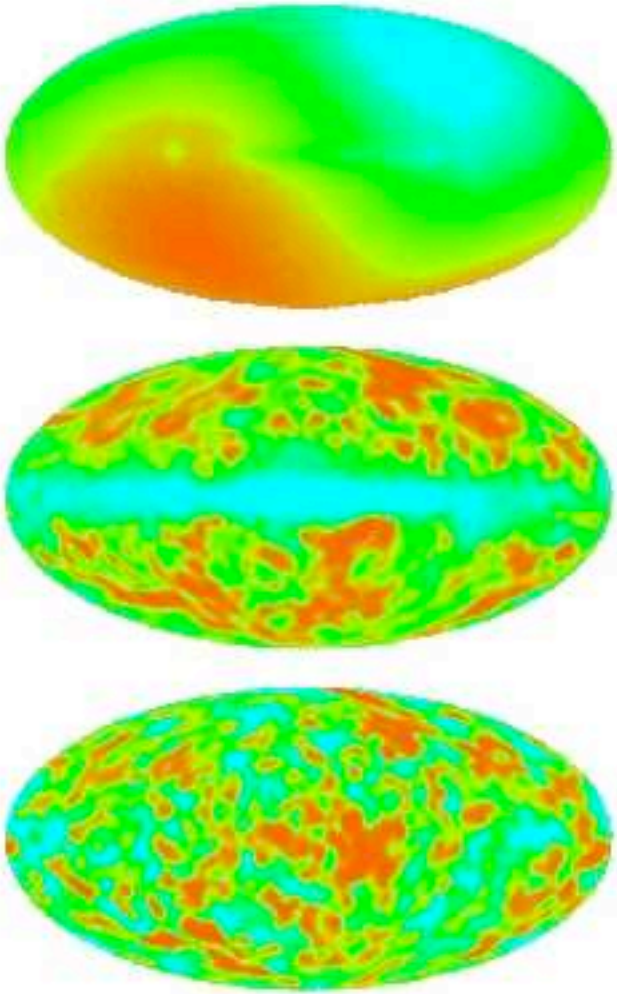
$$r = 16\epsilon. \tag{8.71}$$

Quels modèles d'inflations ?

De l'inflation aux grandes structures et aux anisotropies et polarisation du CMB

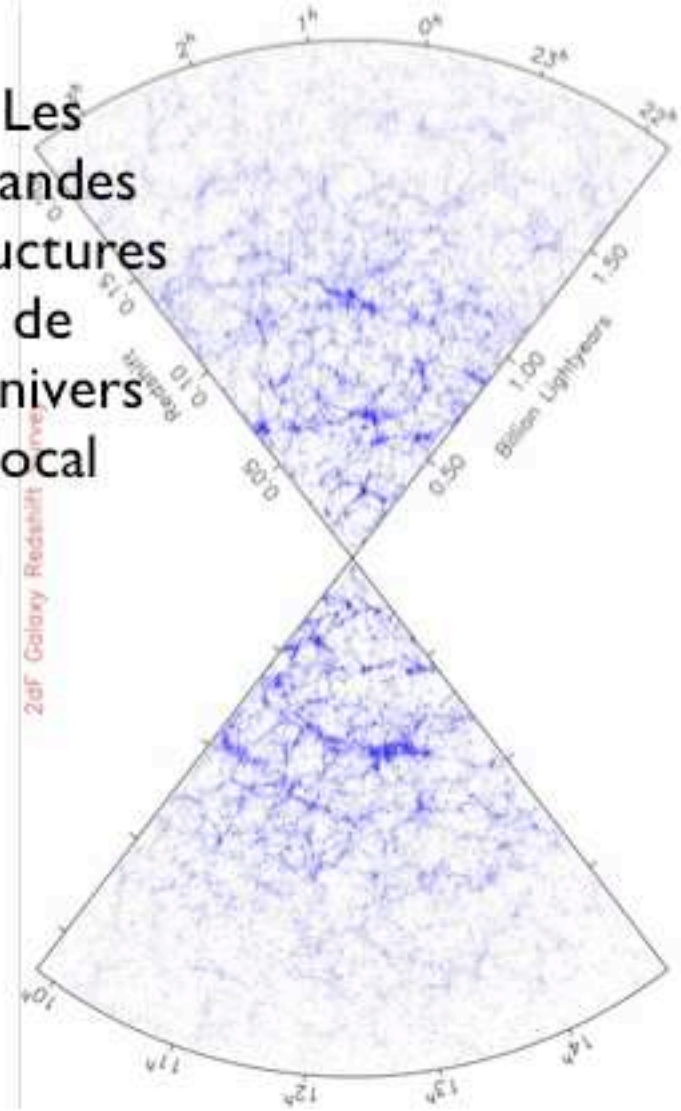
Les grandes structures

- Du CMB aux galaxies



Le fond diffus cosmologique micro-onde (CMB)

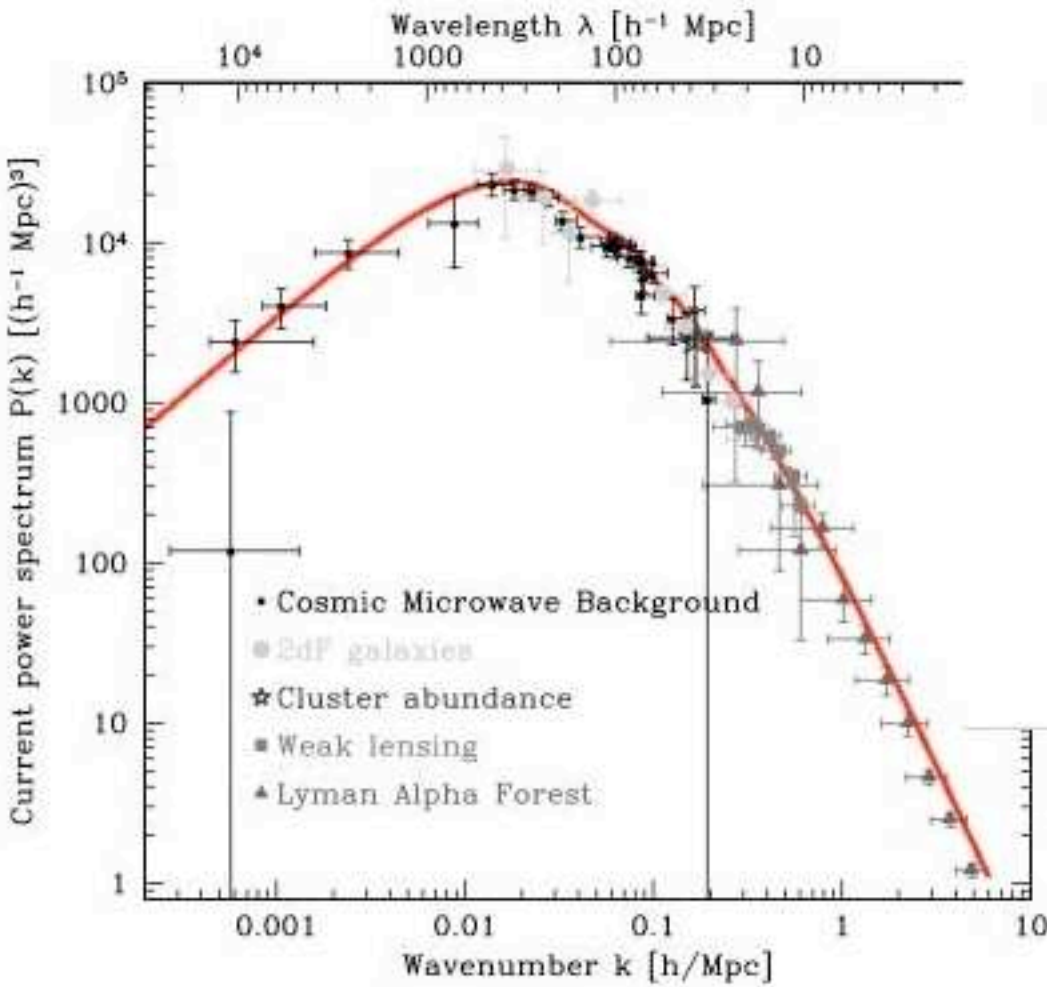
Les grandes structures de l'univers local

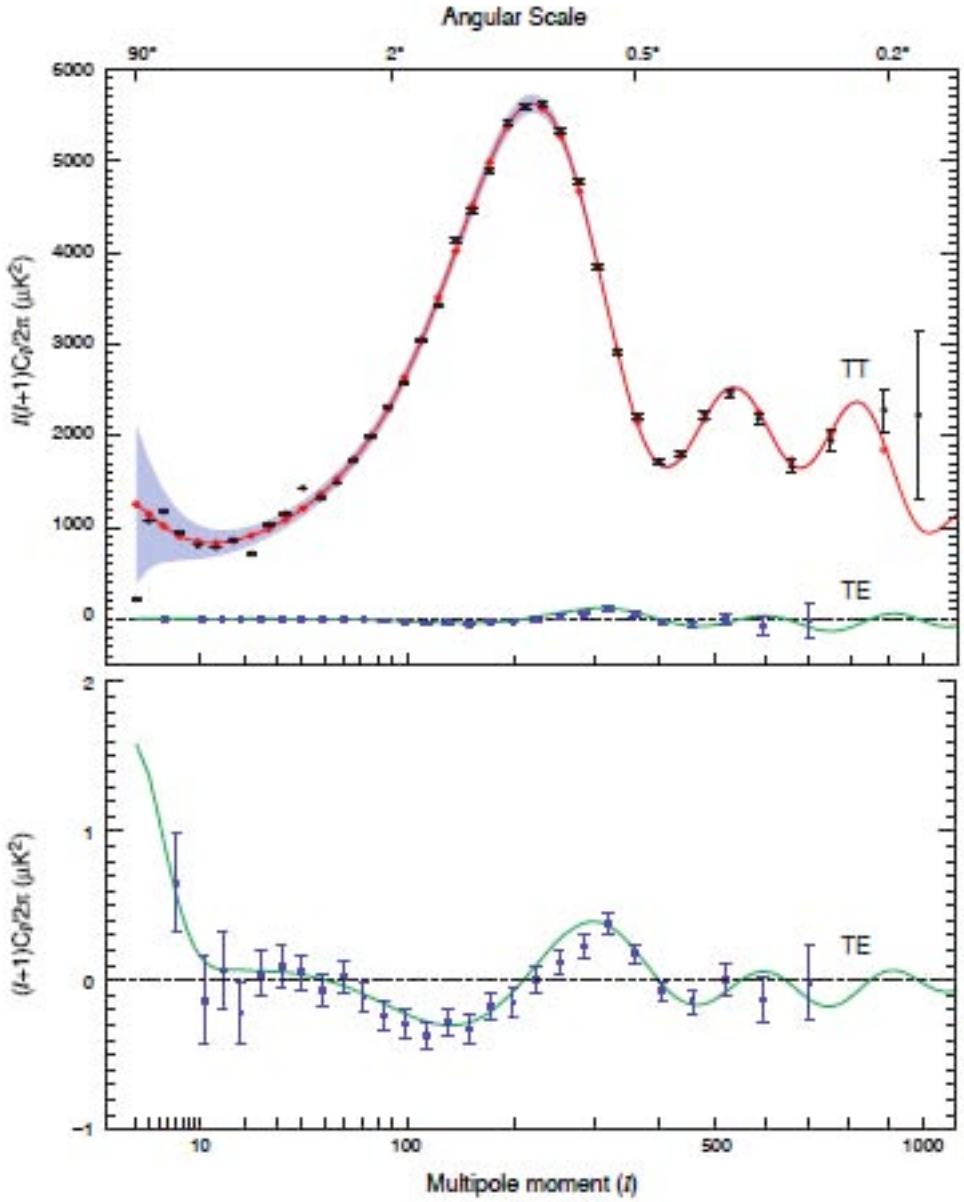


Plan

Spectres de puissance

Des fluctuations de densité
dans l'univers local





Plan

Décrire les propriétés statistiques de l'univers

3.2.2 Fonction de corrélation à deux points et spectre de puissance

La fonction de corrélation est définie comme la moyenne d'ensemble conjointe du champ en deux positions différentes,

$$\xi(r) = \langle \delta(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}+\mathbf{r})\rangle, \tag{3.9}$$

qui ne doit dépendre que de la norme de $\mathbf{r}$ à cause de l'homogénéité et de l'isotropie statistique.

On peut par ailleurs décrire tout champ scalaire $\delta(\mathbf{x})$ en terme de ses composantes de Fourier[8],

$$\delta(\mathbf{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}\,\delta(\mathbf{k})\,\exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}), \tag{3.10}$$

et de manière équivalente,

$$\delta(\mathbf{k}) = \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{x}}{(2\pi)^{3/2}}\,\delta(\mathbf{x})\,\exp(-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}). \tag{3.11}$$

Les modes de Fourier $\delta(\mathbf{k})$ sont des variables aléatoires complexes. De plus comme $\delta(\mathbf{x})$ est réel, on doit avoir,

$$\delta(\mathbf{k}) = \delta^*(-\mathbf{k}). \tag{3.12}$$

Il n'y a donc en quelque sorte qu'une moitié de l'espace de Fourier qui compte. Les propriétés statistiques du champ $\delta(\mathbf{x})$ sont entièrement déterminées par les propriétés statistiques de $\delta(\mathbf{k})$. Dans l'espace de Fourier, les corrélateurs deviennent

$$\langle\delta(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}')\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{x}}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{(2\pi)^3}\,\langle\delta(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}+\mathbf{r})\rangle\,\exp[-\mathrm{i}(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x} - \mathrm{i}\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}] \tag{3.13}$$

ce qui donne,

$$\begin{aligned}
\langle\delta(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}')\rangle &= \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{x}}{(2\pi)^{3/2}}\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{(2\pi)^{3/2}}\,\xi(r)\,\exp[-\mathrm{i}(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x} - \mathrm{i}\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}] \\
&= \delta_{\mathrm{Dirac}}(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\,\xi(r)\,\exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) \\
&\equiv \delta_{\mathrm{Dirac}}(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\,P(k),
\end{aligned} \tag{3.14}$$

où $P(k)$ est par définition le spectre de puissance du champ $\delta(\mathbf{x})$. La relation inverse entre le spectre de puissance et la fonction de corrélation à deux points s'écrit donc,

$$\xi(r) = \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,P(k)\exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}). \tag{3.15}$$

Calcul des fonctions de transfert

Les photons

Distribution de corps noir : $$f_0(\mathbf{p}) = \frac{1}{\exp(p/T_0) - 1},$$

Evolution géodésique : $$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} - \frac{\gamma_i}{a}\Phi_{,i}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}(\theta + \Phi) = \frac{\partial}{\partial\eta}(\Phi + \Psi)$$ si θ est la fluctuation locale de température

Couplage avec la matière $$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_i}\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_i}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial \gamma_i}\frac{\mathrm{d}\gamma_i}{\mathrm{d}t} = C[f]$$

$$\begin{aligned} C[f] \;=\; & \frac{1}{2E(p_\gamma)} \int \mathcal{D}q_e\, \mathcal{D}q'_e\, \mathcal{D}p'_\gamma\, (2\pi)^4\, \delta^{(4)}_{\mathrm{Dirac}}\left(\overline{p}_\gamma + \overline{q}_e - \overline{p}'_\gamma - \overline{q}'_e\right) |M|^2 \times \\ & \left[g(\overline{q}'_e)\, f(\overline{p}'_\gamma) - g(\overline{q}_e)\, f(\overline{p}_\gamma)\right], \end{aligned} \tag{5.74}$$

$$|M|^2 = 2(2\pi)^3\, \alpha^2 \left[\frac{\tilde{p}'}{\tilde{p}} + \frac{\tilde{p}}{\tilde{p}'} + 4(\epsilon_f \cdot \epsilon_i)^2 - 2\right]$$

Décomposition multipolaire

$$\theta(\mathbf{x},\gamma) = \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \exp[\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}] \left[\theta_0(\mathbf{k}) - \mathrm{i}\frac{\mathbf{k}\cdot\gamma}{k}\theta_1(\mathbf{k}) + \ldots (-\mathrm{i})^l P_l\left(\frac{\mathbf{k}\cdot\gamma}{k}\right)\theta_l(\mathbf{k})\right]$$

Valable pour un mode donné

Equation de la hiérarchie

$$\begin{aligned}
\theta_0' &= -\frac{k}{3}\theta_1 + \Psi', \\
\theta_1' &= k(\theta_0 + \Phi - \frac{2}{5}\theta_2) + \tau'(\theta_1 - V_e), \\
\theta_2' &= k\left(\frac{2}{3}\theta_1 - \frac{3}{7}\theta_3\right) + \frac{9}{10}\tau'\theta_2, \\
\ldots \\
\theta_l' &= k\left(\frac{l}{2l-1}\theta_{l-1} - \frac{l+1}{2l+3}\theta_{l+1}\right) + \tau'\theta_l, \quad (l > 2).
\end{aligned}$$

$$\tau' \equiv -a\, x_e\, n_e\, \sigma_T,$$

variation de la profondeur optique

... mais on a oublié la polarisation

La matière

Pas de pression, donc il suffit d'avoir les équations de conservation de l'énergie et de l'impulsion

$$\left(\frac{\delta\rho_{\rm m}}{\rho_{\rm m}}\right)' = 3\Psi' - kV_{\rm m}.$$

matière noire (sans interaction)

$$V_c' + \mathcal{H}V_c = k\Psi$$

matière baryonique

$$V_e' + \mathcal{H}V_e = k\Psi + \tau'(V_e - \theta_1)\frac{4\rho_\gamma}{3\rho_b}.$$

Evolution des fluctuations

Le contraste de densité du plasma photons + baryons en couplage fort

$$\theta_0'' + \frac{R'}{1+R}\theta_0' + k^2\, c_s^2 \theta_0 = \Psi'' + \frac{R'}{1+R}\Psi' - \frac{k^2}{3}\Psi$$

avec $$c_s^2 = \frac{p_\gamma'}{\rho_b' + \rho_\gamma'} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+R}.$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \theta_0 &\sim \cos\left(k \int_0^\eta \mathrm{d}\eta'\, c_s\right), \\ \theta_1 &\sim 3\, c_s \sin\left(k \int_0^\eta \mathrm{d}\eta'\, c_s\right) \end{aligned}$$

Le contraste de densité de la matière noire

$$\delta_c'' + \frac{a'}{a}\delta_c' = -k^2 \Psi$$

$$\Rightarrow \quad \delta_c \sim \log(a)$$

Evolution des contrastes de densité

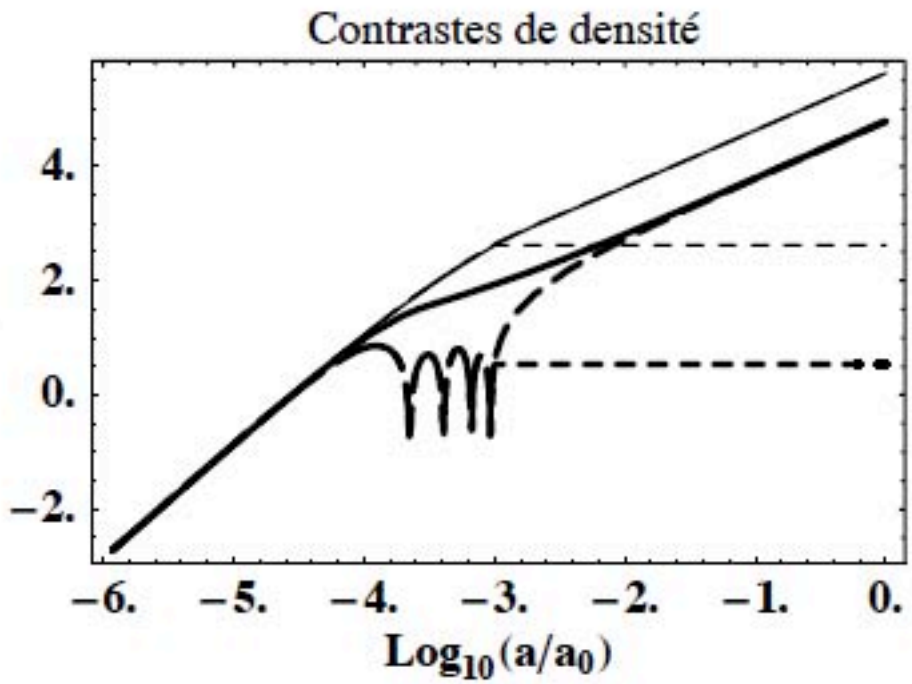


FIG. 5.4 – Evolution comparée de l'amplitude des contrastes de densité généralisés Δ pour la matière noire (lignes continues) la matière baryonique (pointillés longs) et les photons (pointillés courts) pour deux modes différents ($k = k_{\text{eq.}}/10$, lignes fines et $k = 10k_{\text{eq.}}$, lignes épaisses). Les paramètres cosmologiques sont ceux du modèle standard. On suppose que la transition couplage fort-couplage faible se fait de manière instantanée à $a/a_0 = 10^{-3}$.

⇨ ... de l'importance de la matière noire

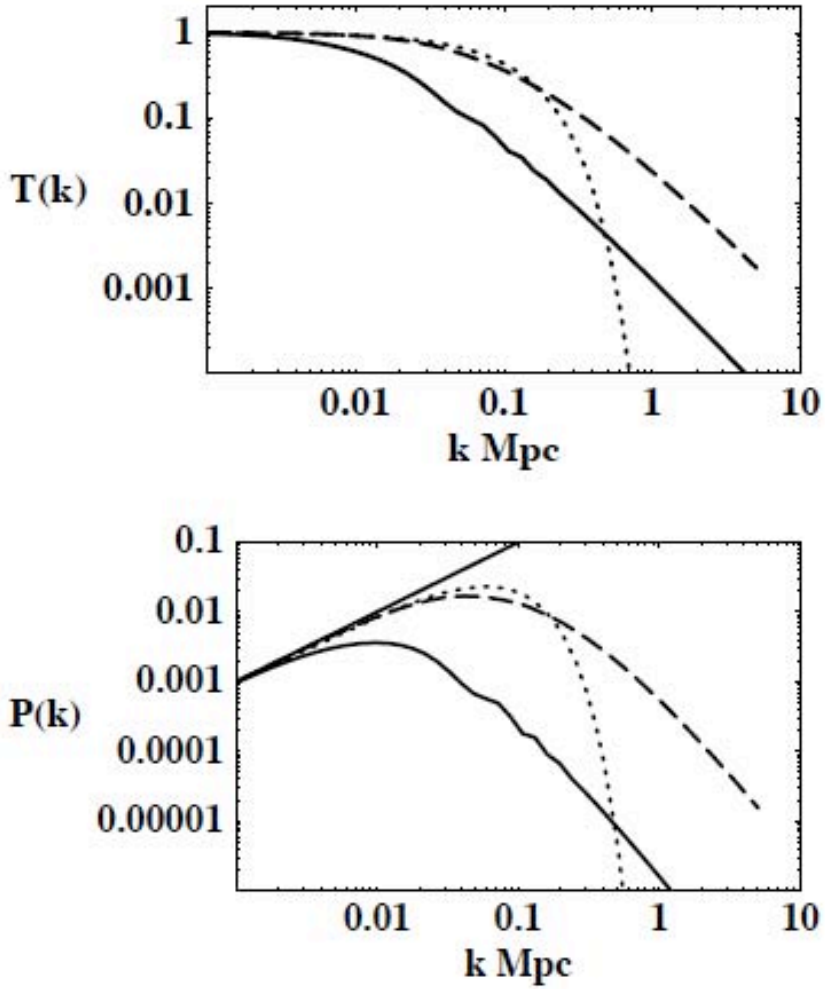


FIG. 5.5 – Schéma représentant la forme de la fonction de transfert pour des modèles de type CDM et HDM et la forme des spectres qui en résultent si le spectre de fluctuations primordiales est de type Harrison-Zel'dovich. Les lignes continues correspondent à un modèle de type Λ-CDM ; les tirets correspondent à un modèle CDM "standard" (sans constante cosmologique) et les pointillés à un modèle HDM avec la même quantité de matière noire que pour le modèle CDM. On voit que la coupure dans le cas des modèles HDM est beaucoup plus brutale que pour le modèle CDM correspondant. On peut remarquer pour le cas du modèle Λ-CDM la présence d'oscillations acoustiques. Celles-ci sont dues au fait que dans ce cas là les baryons représentent une fraction significative de la matière noire (20%) ; Leur présence influence donc la forme de la fonction de transfert.

Les ondes gravitationnelles

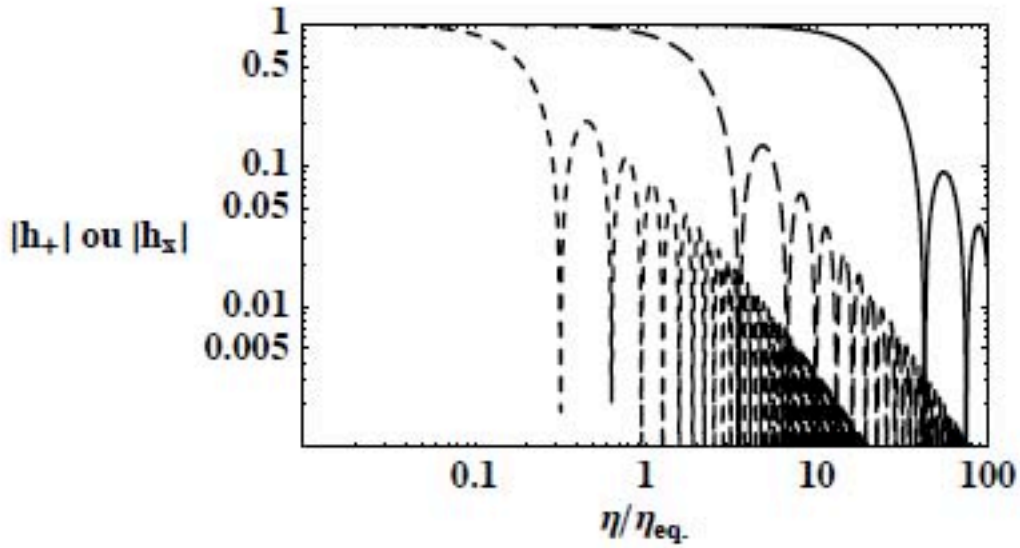


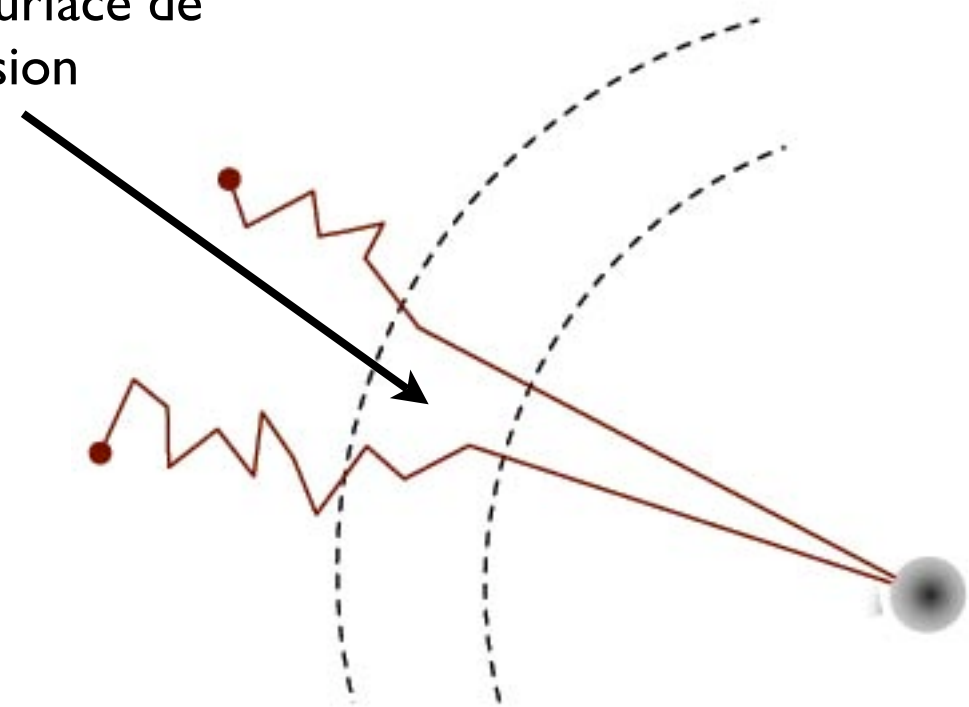
FIG. 7.2 – Evolution de l'amplitude des polarisations des ondes gravitationnelles en fonction du temps conforme pour différents modes. La ligne continue correspond à $k\eta_{eq.} = 0.1$, les tirets longs à $k\eta_{eq.} = 1.$ et les tirets courts à $k\eta_{eq.} = 10.$. On voit qu'on passe d'amplitude constante aux échelles super-horizon à un système d'oscillations amorties sous l'horizon.

Le développement de la polarisation

$$\theta(\gamma) = \frac{1}{4}\left(\frac{\int p^3\,\mathrm{d}p\,\left[f(p,\gamma,\mathbf{e}_1)+f(p,\gamma,\mathbf{e}_2)\right]/2}{\int p^3\,\mathrm{d}^3p\,f_0(p)} - 1\right),$$

$$\mathcal{P}(\gamma) = \frac{1}{4}\frac{\int p^3\,\mathrm{d}p\,\left[f(p,\gamma,\mathbf{e}_1)-f(p,\gamma,\mathbf{e}_2)\right]/2}{\int p^3\,\mathrm{d}p\,f_0(p)}.$$

A l'intérieur de la surface de dernière diffusion



une nouvelle hiérarchie.

La polarisation, modes E et B

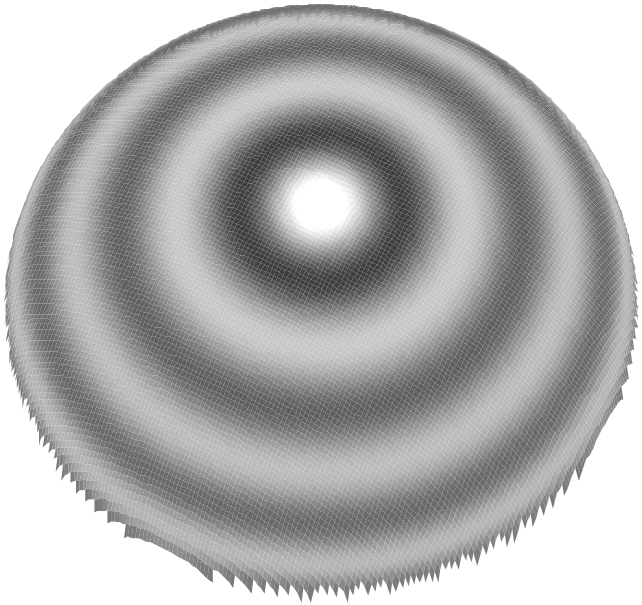
$$Q(\hat{\mathbf{n}}) + \mathrm{i}U(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{lm} {}_2a_{l,m}\ {}_2Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}}),$$

$$Q(\hat{\mathbf{n}}) - \mathrm{i}U(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{lm} {}_{-2}a_{l,m}\ {}_{-2}Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}}).$$

De ces composantes, il est utile de construire les composantes E et B associées, respectivement champ scalaire et pseudo scalaire sur la sphère céleste. On peut définir celle-ci par exemple par leur coefficients multipolaires ${}_Ea_{lm}$ et ${}_Ba_{lm}$,

$$\begin{aligned} {}_Ea_{l,m} &= -({}_2a_{l,m} + {}_{-2}a_{l,m})/2 && (7.45) \\ {}_Ba_{l,m} &= \mathrm{i}({}_2a_{l,m} - {}_{-2}a_{l,m})/2 && (7.46) \end{aligned}$$

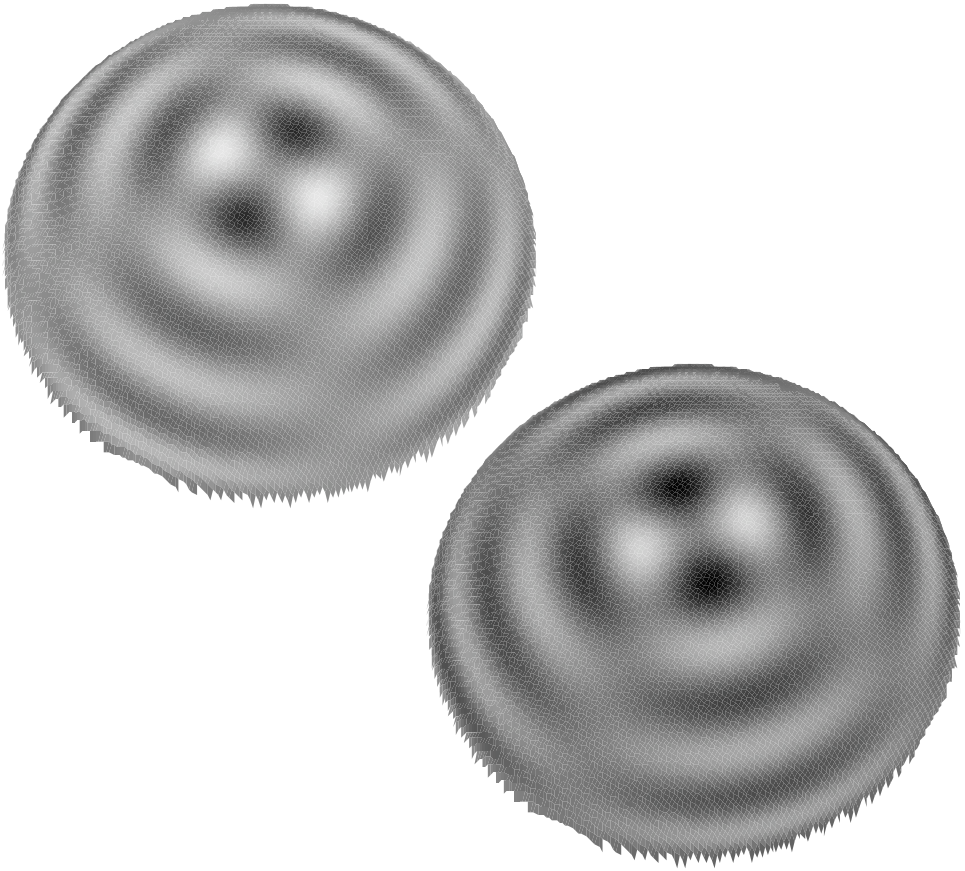
Modes scalaires sur la sphère céleste



Superposition d'harmoniques sphériques à m=0

Q=0 et B=0

Modes tenseurs sur la sphère céleste



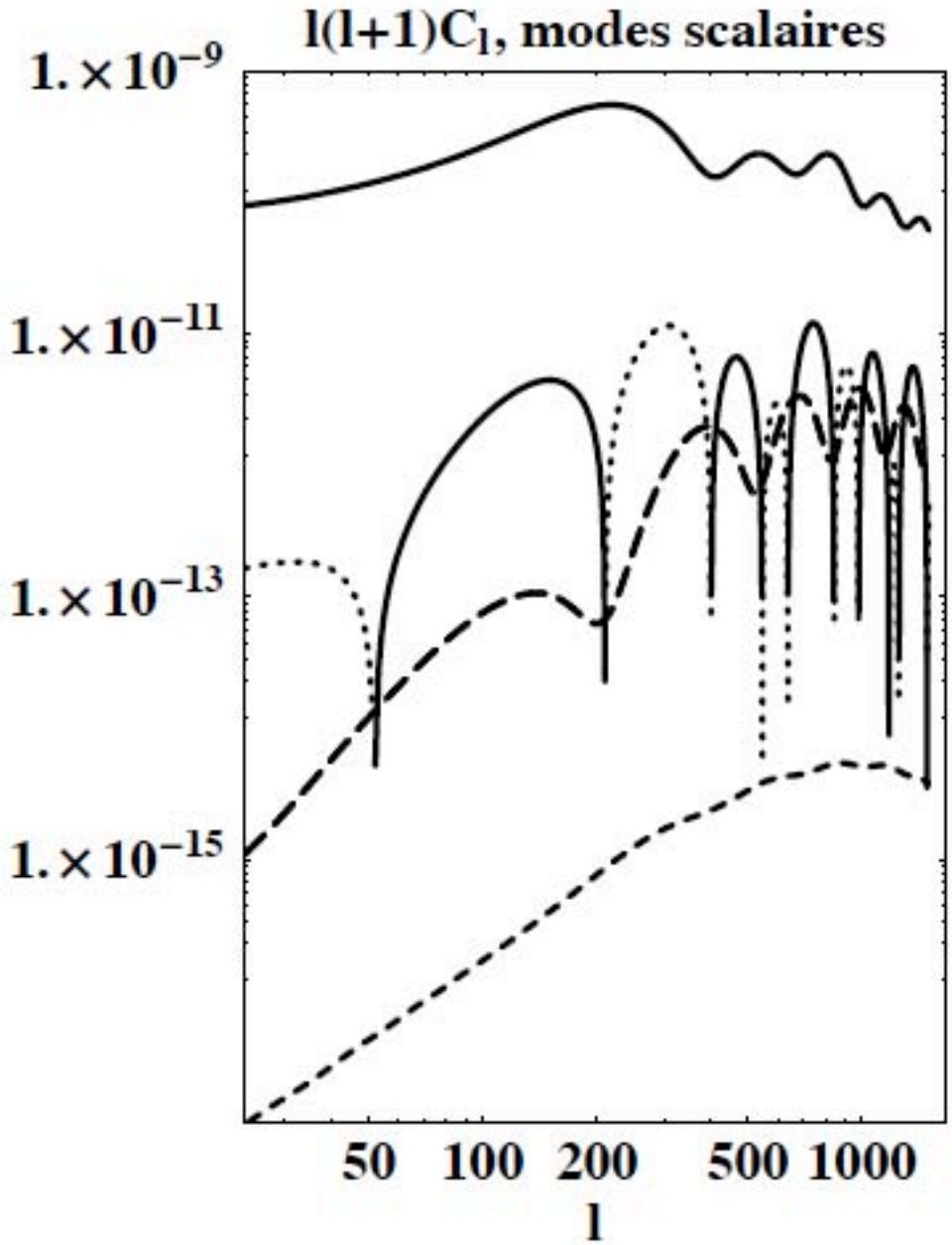


FIG. 7.5 – Spectres des anisotropies de température et de polarisation correspondant aux paramètres du modèle concordant. Ces spectres sont ceux induits par des fluctuations scalaires. La courbe continue correspond au spectre de température ; la courbe en tirets longs au spectre C_l^{EE} ; la courbe en tirets courts au spectre C_l^{BB} et la courbe en traits mixtes à C_l^{TE} où les parties continues correspondent à des corrélations positives, les parties pointillées à des corrélations négatives. Les effets secondaires dus aux lentilles gravitationnelles ont été pris en compte. Ils sont responsables de l'apparition des modes B. Ces spectres ont été calculés à l'aide du code CMBFAST.

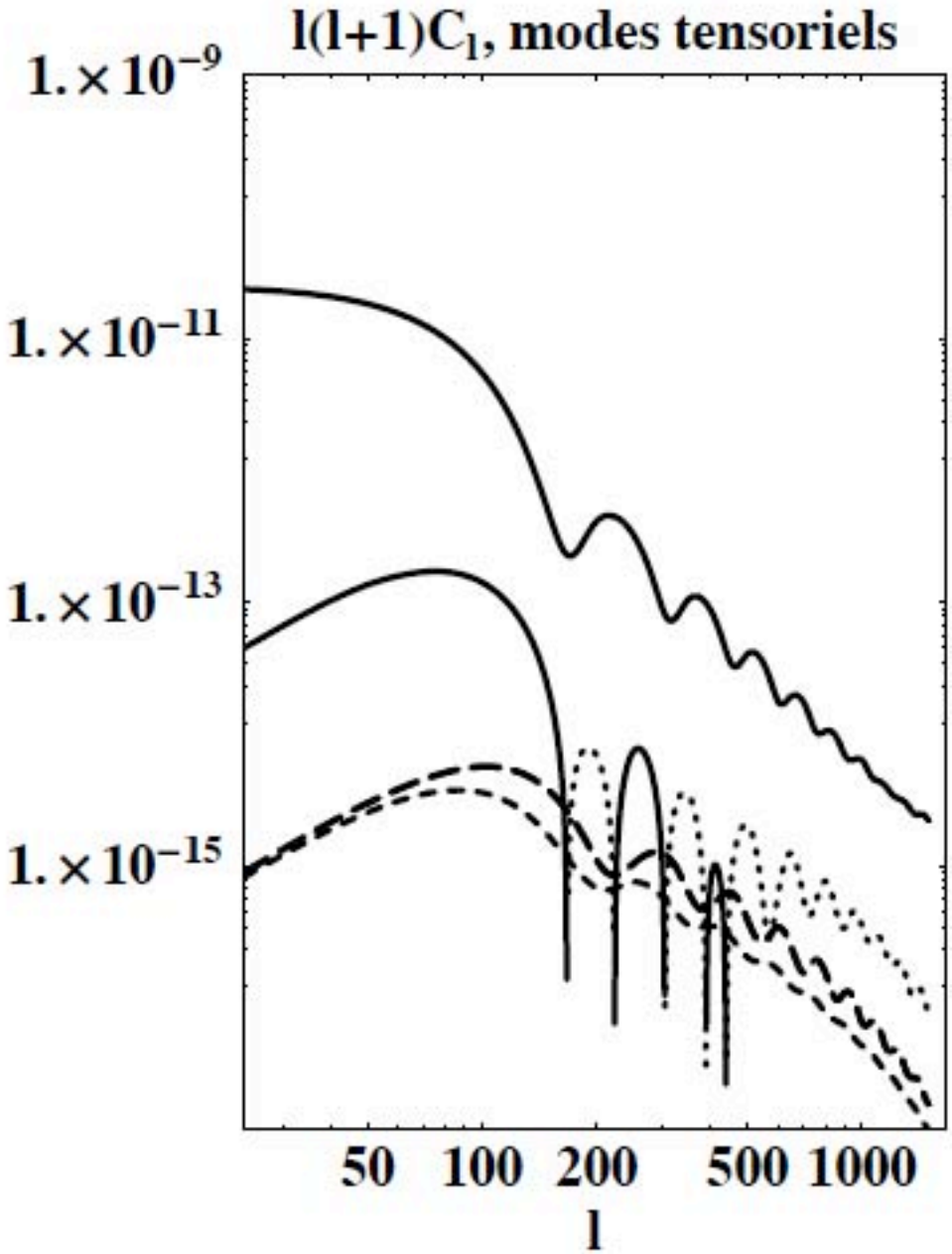
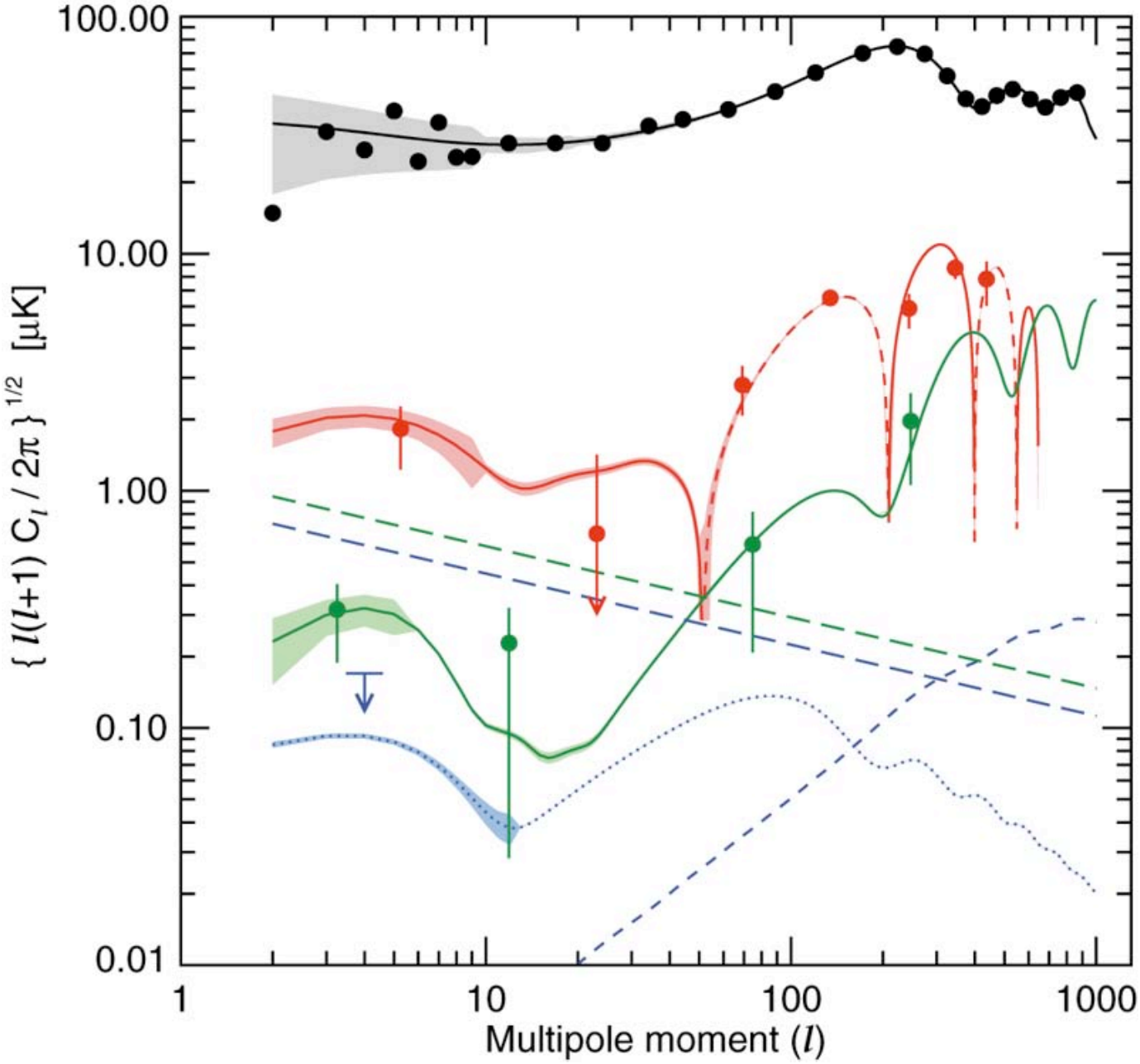
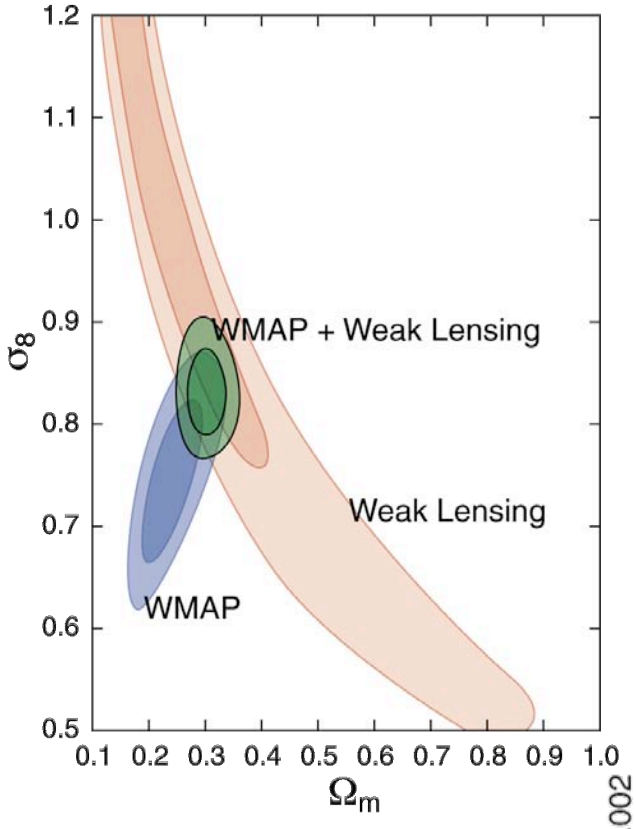


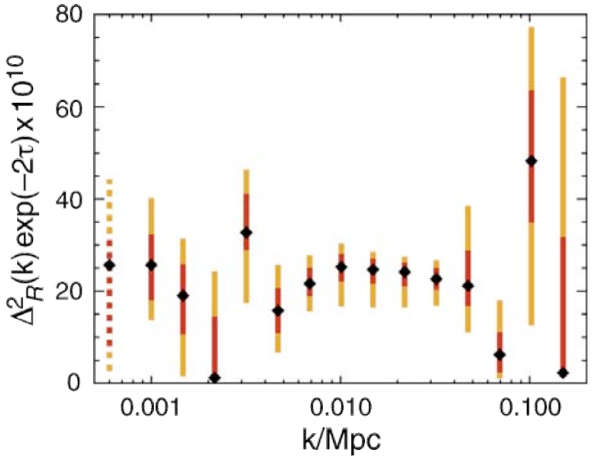
FIG. 7.6 – Spectres induits par des fluctuations tensorielles. Les paramètres sont ceux du modèle concordant avec $r = 0.3$ Les notations sont les mêmes que dans la figure précédente. On voit que les modes B et les modes E ont des amplitudes similaires. Cependant les modes B intrinsèques ne dominent sur les modes B induit par les effets de lentille qu'aux très grandes échelles.

Etat de l'art : WMAP 3 ans

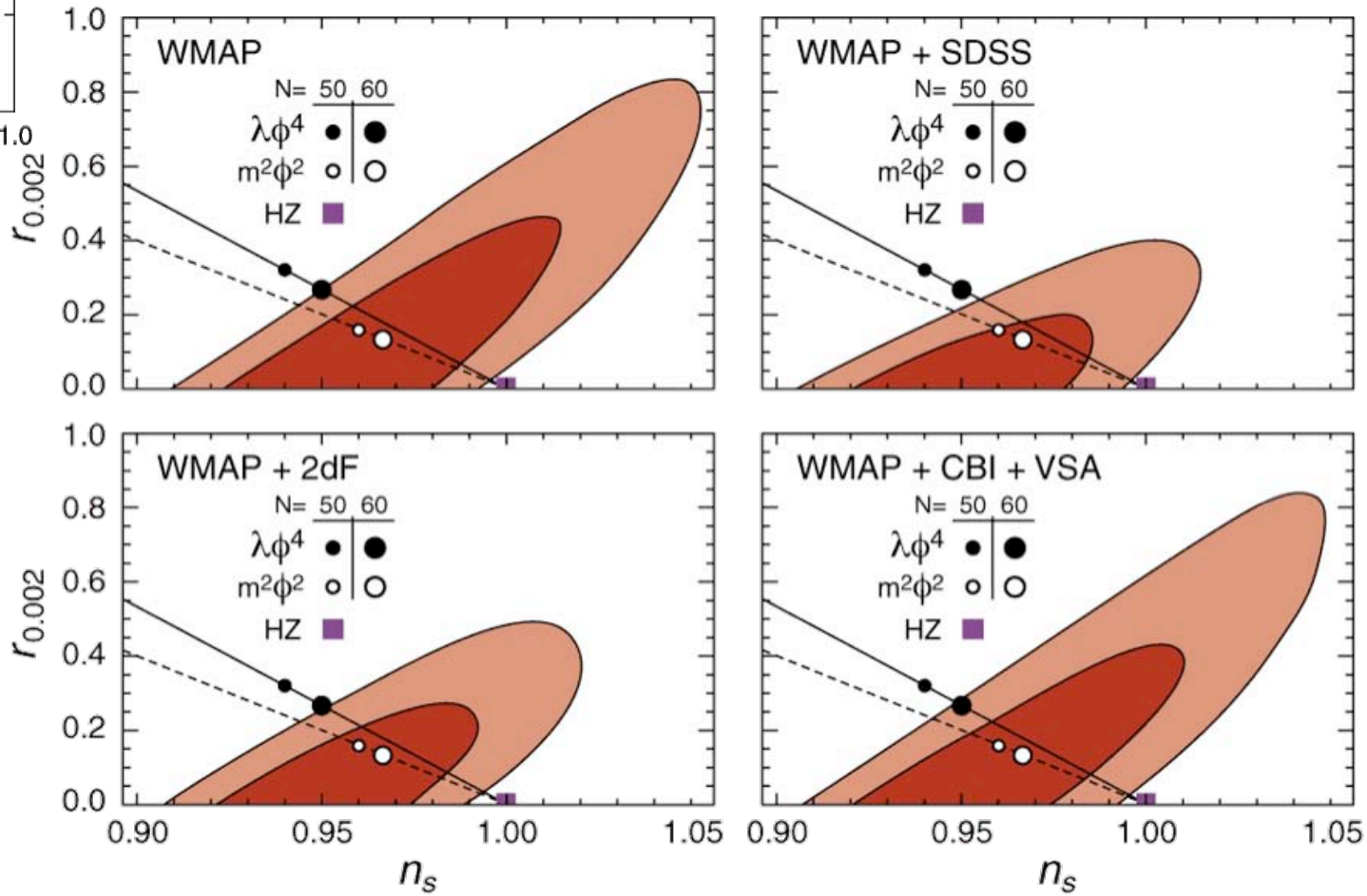


Contenu en matière de l'univers





Contraintes sur les modèles d'inflation



Cosmologie et fluctuations primordiales

SPhT, 9 novembre - 14 décembre 2007

- **Univers homogène, univers inhomogène**
  La métrique de Friedmann-Robertson-Walker. Introduction à la notion de distances et d'horizons. Inhomogénéités de l'espace temps. Relations entre métrique et quantités observables. Outils statistiques : fonctions de corrélations et spectres de puissance.

- **Le développement des instabilités gravitationnelles**
  Identification des modes propres d'instabilité. Décomposition Scalaire-Vecteur-Tenseur et identification des modes de jauge. Evolutions sub- et super-Hubble. Modes adiabatiques et modes isocourbes.

- **L'inflation, paradigme et prédictions I**
  La nécessité d'une phase inflationnaire. Quelle quantité d'inflation ? Forme de Mukhanov de l'action et quantification des champs. Transition quantique-classique. Spectres de puissance induits.

- **L'inflation, paradigme et prédictions II**
  Ondes gravitationnelles. Relations entre indices spectraux. Conséquences sur le fond diffus cosmologique.

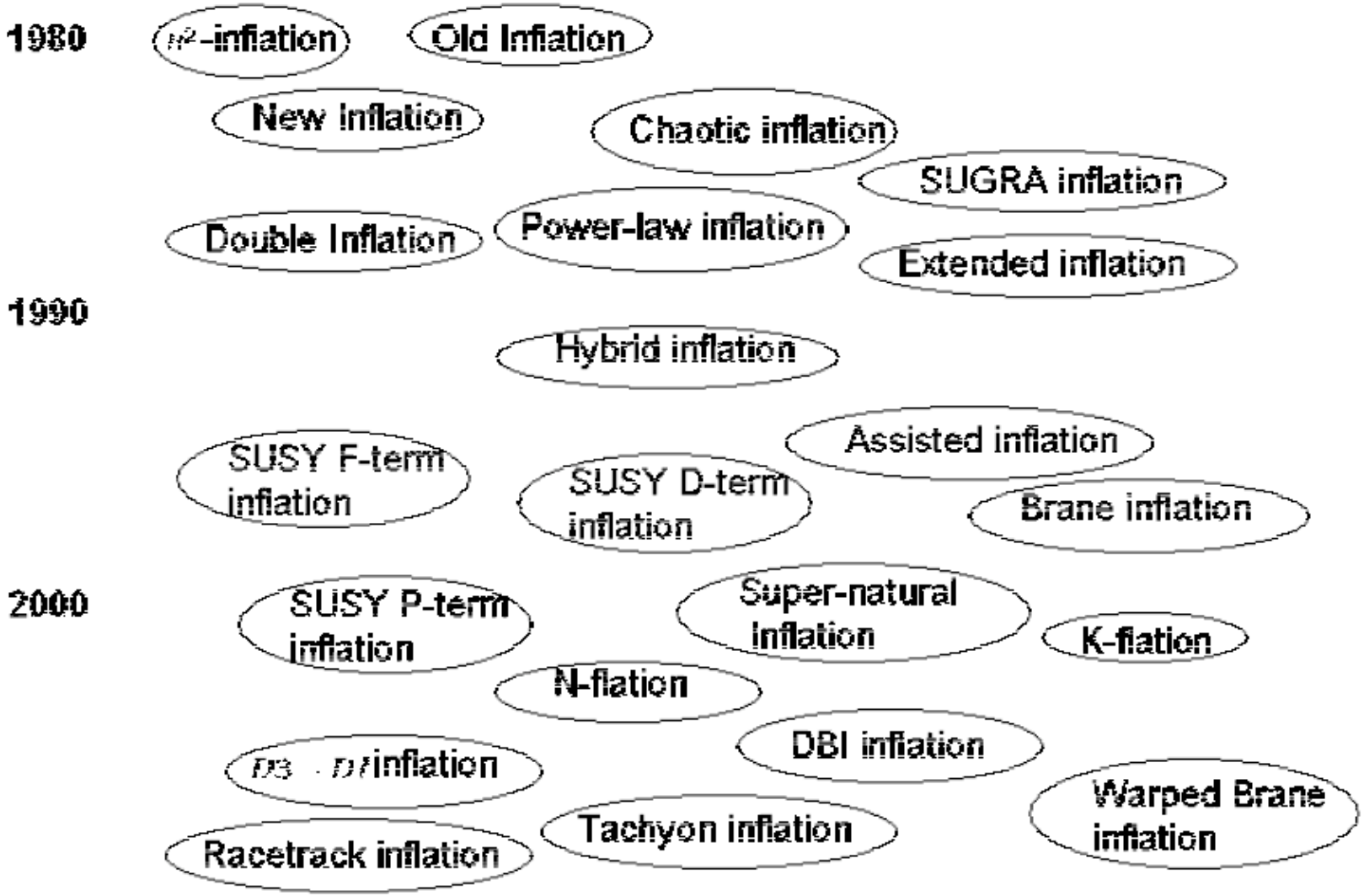
- **Modèles inflationnaires**
  Inflation à un champ, chaotique, en loi de puissance. Modèles hybrides, modèles construits à partir des théories supersymétriques. Inflation multi-champ. Action de Dirac-Born-Infeld.

- **Au delà du régime linéaire, l'univers primordial, l'univers local**
  Couplages de modes dans l'univers local. Couplages de modes pendant la phase inflationnaire. Prédictions de l'inflation standard.

Plan du cours V

- Modèles inflationnaires
  - A grande valeur du champ et à petite valeur du champ
  - inflation hybride
  - Inflation F et D term en SUSY
  - autres...
- La fin de l'inflation, reheating et preheating
- Vers une théorie des perturbations quantiques

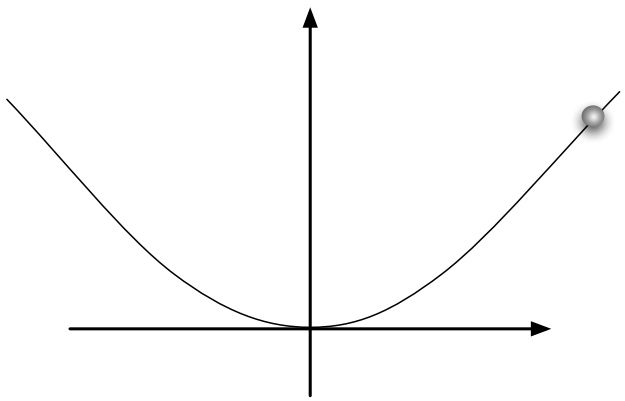
Quel(s) modèle(s) pour l'inflation ?



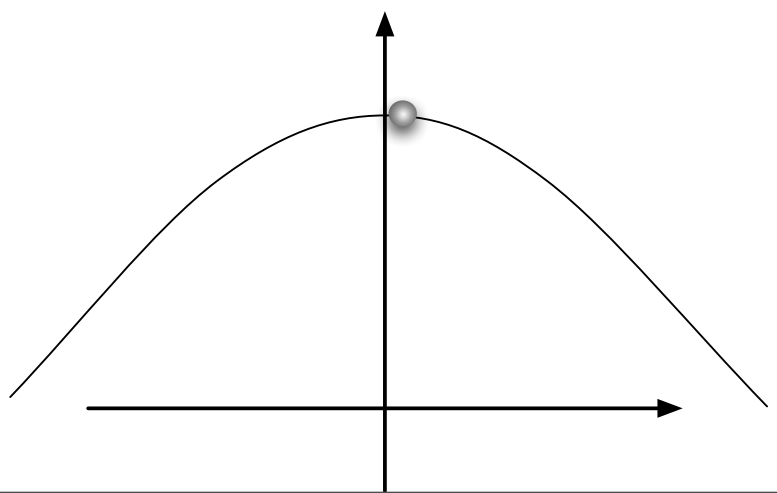
Modèles d'inflation : une première classification

A grande valeur du champ

A. D. Linde 1983



A petite valeur du champ



$$\eta = -\frac{m^2 M_{\rm pl}^2}{V_0} \qquad \epsilon = \frac{\eta^2 \varphi^2}{M_{\rm pl}^2}$$

$$N_e = \frac{\Delta \log \varphi}{\eta}$$

8.4.1 L'inflation hybride

A. D. Linde 1994

Les modèles hybrides mettent en jeu deux champs scalaires pendant la phase inflationnaire, un champ léger φ et un champ lourd. Le potentiel prend typiquement la forme suivante,

$$V(\varphi, \sigma) = V(\varphi) + \frac{\mu}{2}\left(\sigma^2 - \sigma_0^2\right)^2 + \frac{g}{2}\sigma^2\varphi^2 \tag{8.74}$$

où on a un introduit des couplages quartiques entre champs et un paramètre σ_0 qui est la vev du champ φ au minimum du potentiel. Un examen succinct de la forme du potentiel montre en effet que pour de grandes valeur de φ la masse effective carrée de σ est $g\varphi^2 - 2\mu\sigma_0^2$. Celle-ci est positive tant que $\varphi > \varphi_c$ avec

$$\varphi_c = \sqrt{\frac{2\mu}{g}}\sigma_0. \tag{8.75}$$

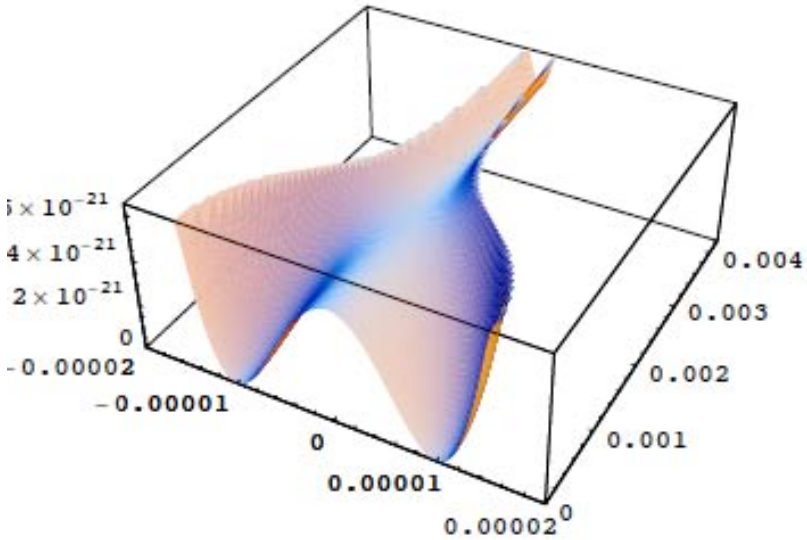


FIG. 8.5 – Forme du potentiel pour un exemple de modèle d'inflation hybride. L'inflation a lieu pour de grandes valeurs de φ. Quand la valeur du champ φ devient plus petite que φ_c, la masse du champ σ devient négative et l'inflation se termine avec le développement d'une instabilité tachyonique.

Dans un tel scénario, on peut donner un certain nombre de résultats génériques. Si $V(\varphi)$ est de la forme $m^2\varphi^2$ et si cette partie du potentiel reste négligeable devant V_0 alors les paramètres de slow-roll

$$\epsilon = \frac{1}{2}\frac{m^2\varphi^2}{V_0^2} \quad \text{et} \quad \eta = \frac{m^2}{V_0}. \tag{8.76}$$

Si effectivement $\varphi \ll M_{\rm Pl}$ alors $\eta \gg \epsilon$ et $n_s = 1 + 2\eta$. On trouve ainsi que $n_s - 1$ est donné par la masse effective de l'inflaton. Pour un potentiel standard quadratique ou quartique dans les champs, ce résultat est en contradiction avec les résultats de WMAP. Rappelons tout de même que des incertitudes pèsent sur ces résultats. Cela étant il est possible de contourner ce problème avec un modèle dit inversé $V(\varphi) = -1/2m^2\varphi^2$ ou encore si $V(\varphi) \sim \log(\varphi)$, une situation que l'on rencontre justement dans les modèles inspirés de la physique des hautes énergies (voir complément 8.7.7). Dans ce dernier cas il vient plus précisément,

$$n_s = 1 - \frac{1}{N_{\rm e}}\left(1 + \frac{3g^2}{8\pi^2}\right). \tag{8.77}$$

8.7.7 Inflation hybride dans un contexte supersymétrique

Les modèles de physique des particules dit supersymétriques occupent une grande part des développements actuels de physique des hautes énergies notamment pour la construction de modèles au delà du modèle standard. La supersymétrie et son extension naturelle, la supergravité, permettent en effet de résoudre un certains nombres de difficultés liées au modèle standard[25].

On ne trouvera pas ici de présentation des théories des champs supersymétriques. Il existe de nombreux ouvrages sur le sujet. La revue [169] en présente les idées de bases dans un contexte cosmologique. Pour aller à l'essentiel disons simplement qu'un Lagrangien sera supersymétrique s'il est invariant selon des transformations discrètes au cours desquelles on échange le rôle des bosons et des fermions. Pour qu'un Lagrangien soit invariant sous de telles transformation il faut qu'un certain nombre de relations soient vérifiées entre les masses des bosons et des fermions et leur amplitude d'interaction. L'ensemble des bosons et des fermions qui s'échangent ainsi constituent un supermultiplet. Le cas le plus simple est celui du supermultiplet chiral avec des bosons de spin 0, et des fermions de spin 1/2. Ce supermultiplet est décrit par le Lagrangien de Wess-Zumino suivant,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\phi^*_{,\nu}\phi^{,\nu} + \frac{1}{2}\bar{\psi}\left[\mathrm{i}\gamma^\mu\nabla_\mu - m\right]\psi - \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\bar{\psi}(\phi_1 - \mathrm{i}\gamma^5\phi_2)\psi - m\left|\phi\right|^2 - m\lambda\left|\phi\right|^2(\phi+\phi^*) - \lambda^2\left|\phi\right|^4 \tag{8.182}$$

D'une manière générale le terme de masse des fermions s'obtient avec la dérivée seconde du superpotentiel par rapport au chacun des scalaires du supermultiplet. Ainsi le lagrangien contient les termes

$$\mathcal{L}_\psi = \mathcal{L}_{\text{cin.}} + \mathcal{L}_\psi - V_D - V_F - V_{1-boucle} \tag{8.185}$$

$$\mathcal{L}_\psi = \overline{\psi}_i \frac{\partial^2 W}{\partial\phi_i \partial\phi_j} \psi_j \tag{8.186}$$

qui, on le voit dans l'exemple précédent, induisent aussi bien des termes de masse des fermions que des termes d'interaction du Yukawa. Le terme de masse et d'interaction des bosons est donné par deux contributions, le terme dit F et le terme dit D. Le premier découle directement du superpotentiel de la manière suivante,

$$V_F = \sum_i \frac{\partial W}{\partial\phi_i} \left(\frac{\partial W}{\partial\phi_i}\right)^* ; \tag{8.187}$$

le deuxième vient d'une éventuelle charge q_i associée aux multiplets et dépend de deux autres paramètres, l'amplitude de l'interaction de jauge associée g et un paramètre dimensionné libre ξ,

$$V_D = \frac{g^2}{2} \left(\sum_i q_i \phi_i \phi_i^* + \xi\right)^2 . \tag{8.188}$$

Une formule simple, la formule de Coleman-Weinberg [76] contient les contributions à l'ordre d'une boucle à l'énergie du vide. Elle est donnée par

$$V_{1-\text{boucle}} = \frac{1}{32\pi^2}\left(\sum_b m_b^2 - \sum_f m_f^2\right) + \frac{1}{64\pi^2}\left[\sum_b m_b^4 \left(\log\frac{m_b^2}{\Lambda^2} - \frac{3}{2}\right) - \sum_f m_f^4 \left(\log\frac{m_f^2}{\Lambda^2} - \frac{3}{2}\right)\right] \tag{8.189}$$

où m_b et m_f sont les masses de respectivement chacun des degrés de liberté bosoniques et fermioniques et Λ est l'échelle de régularisation. On peut le vérifier, ce potentiel s'annule quand fermions et bosons ont la même masse.

Inflation par le terme F

G. Dvali, Q. Shafi, and R. Schaefer, 1994

Comment alors générer une phase inflationnaire dans ce cadre ? Une telle phase correspond à un état de vide dans lequel la valeur du potentiel est non nulle. Il est effectivement possible de réaliser un tel état avec un superpotentiel relativement simple [91],

$$W = \lambda \mathcal{S} \overline{\phi} \phi - \mu^2 \mathcal{S}, \tag{8.190}$$

où $\mathcal{S}$, $\overline{\phi}$ et ϕ sont des champs scalaires complexes. Si besoin on suppose aussi que $\overline{\phi}$ portent des charges opposées à ϕ de manière à ce que W soit sans charge.

Alors le potentiel prend la forme (on ne fait jouer ici aucun rôle au terme D),

$$V = \lambda^2 |\mathcal{S}|^2 \left(|\overline{\phi}|^2 + |\phi|^2 \right) + |\lambda \overline{\phi} \phi - \mu^2|^2. \tag{8.191}$$

Pour étudier le paysage énergétique qui s'offre à nous, faisons le changement de variable suivant,

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\eta + \overline{\eta}) \tag{8.192}$$

$$\overline{\phi} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\eta - \overline{\eta}) \tag{8.193}$$

ce qui conduit à ,

$$|\phi|^2 + |\overline{\phi}|^2 = |\eta|^2 + |\overline{\eta}|^2 \quad \text{et} \quad \overline{\phi}\phi = \frac{1}{2}(\eta^2 - \overline{\eta}^2), \tag{8.194}$$

de telle sorte que,

$$V = \lambda^2 \mathcal{S}^2 \left(|\eta|^2 + |\overline{\eta}|^2 \right) + |\frac{1}{2}\lambda(\eta^2 - \overline{\eta}^2) - \mu^2|^2. \tag{8.195}$$

On peut vérifier que le minimum absolu du potentiel se trouve pour

$$\mathcal{S} = 0 \quad \text{et} \quad \overline{\eta} = 0, (\eta_1 = \frac{\pm \mu}{\sqrt{2\lambda}}, \eta_2 = 0) \quad \text{ou} \quad \eta = 0, \quad (\overline{\eta}_1 = 0, \overline{\eta}_2 = \pm \frac{\mu}{\sqrt{2\lambda}}) \tag{8.196}$$

si η_1 et η_2 sont respectivement les parties réelle et imaginaire de η. Notons qu'en ces points on a $V = 0$.

Il existe cependant des directions plates le long desquelles le potentiel est constant si le module de $\mathcal{S}$ est suffisamment grand. En effet quand η et $\overline{\eta}$ sont nuls, le potentiel vaut μ^4, indépendamment de la valeur de $\mathcal{S}$. C'est un minimum stable si autour de ces points les dérivées secondes du potentiel sont positives c'est à dire si les masses sont positives. A partir de la forme (8.195) il est possible de trouver l'expression des masses. On trouve deux valeurs propres distinctes pour la matrice de masse,

$$(m_{\pm}^{\text{bosons}})^2 = \lambda^2|\mathcal{S}|^2 \pm \lambda\mu^2, \tag{8.197}$$

les signes $+$ correspondant aux parties réelle de η et imaginaire de $\overline{\eta}$, les signes $-$ aux parties imaginaire de η et réelle de $\overline{\eta}$.

Le potentiel reste dans ce minimum local tant que,

$$\lambda^2|\mathcal{S}|^2 > \mu^2\lambda, \tag{8.198}$$

c'est à dire tant que $\mathcal{S} > \mathcal{S}_c$ avec,

$$\mathcal{S}_c = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}. \tag{8.199}$$

Cet état de vide brise la supersymétrie : autour de cet état les masses des fermions et des bosons ne sont plus identiques. Les masses des fermions sont données par,

$$(m_{\pm}^{\text{fermions}})^2 = \lambda^2|\mathcal{S}|^2. \tag{8.200}$$

Le potentiel doit alors être corrigé des corrections radiatives. De l'expression 8.189, il vient,

$$V_{1-\text{boucle}} \approx \frac{\lambda^4\mathcal{S}_c^4}{16\pi^2}\log\frac{\mathcal{S}}{\Lambda}. \tag{8.201}$$

C'est ce terme qui permet le roulement lent de valeurs de $\mathcal{S} > \mathcal{S}_c$ à $\mathcal{S} = \mathcal{S}_c$, moment auquel une instabilité tachyonique se développe qui met fin à l'inflation (voir texte). Pendant la phase inflationnaire le potentiel prend donc la forme,

$$V_{\text{infla.}} = \lambda^2\mathcal{S}_c^4\left(1 + \frac{\lambda^2}{16\pi^2}\log\frac{\mathcal{S}}{\mathcal{S}_c}\right). \tag{8.202}$$

Inflation par le terme D P. Binétruy and G. Dvali 1996

Le mécanisme qui conduit à un modèle inflationnaire par le terme D est tout à fait similaire à celui conduisant à une inflation par le terme F [47]. Il s'appuie sur des champs chargés dans un groupe de jauge - dans la suite ϕ a une charge positive et $\overline{\phi}$ a une charge négative - et sur une valeur non nulle de ξ. Le superpotentiel qui conduit à un modèle inflationnaire est donné par,

$$W = \lambda \mathcal{S} \overline{\phi} \phi, \tag{8.203}$$

ce qui conduit à,

$$V = V_F + V_D = \lambda^2 |\mathcal{S}|^2 \left(|\overline{\phi}|^2 + |\phi|^2 \right) + \lambda^2 |\overline{\phi}\phi|^2 + \frac{g^2}{2} \left(|\phi|^2 - |\overline{\phi}|^2 + \xi \right)^2 . \tag{8.204}$$

De la même manière que précédemment un tel potentiel présente une direction plate stable donnée par,

$$\phi = 0, \quad \overline{\phi} = 0, \quad \mathcal{S} > \mathcal{S}_c \tag{8.205}$$

avec

$$\mathcal{S}_c = \frac{g}{\lambda} \sqrt{\xi}. \tag{8.206}$$

Dans ce cas le potentiel pendant la phase inflationnaire est donné par,

$$V_{\text{infla.}} = \frac{\lambda^4 S_c^4}{2g^2} \left(1 + \frac{g^2}{8\pi^2} \log \frac{\mathcal{S}}{\mathcal{S}_c} \right) . \tag{8.207}$$

Inflation DBI

A. Silverstein et D. Tong 2004

Lagrangien motivé par les théorie de cosmologie branaire.
L'inflaton, identifié comme la distance inter brane, obéirait alors à l'action de Dirac-Born-Infeld

$$S = \frac{M_{pl}^2}{2}\int d^4x\sqrt{-g}R - \int d^4x\sqrt{-g}\,[f(\phi)^{-1}\sqrt{1+f(\phi)g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi} - f(\phi)^{-1} + V(\phi)]$$

avec typiquement

$$f(\phi) \simeq \frac{\lambda}{\phi^4}$$

ici

$$\begin{aligned} P &= -f(\phi)^{-1}\sqrt{1-2Xf(\phi)} + f(\phi)^{-1} - V(\phi)\ , \\ E &= 2XP_{,X} - P = \frac{f(\phi)^{-1}}{\sqrt{1-2Xf(\phi)}} - f(\phi)^{-1} + V(\phi) \end{aligned}$$

L'inflation a lieu quand $\sqrt{1-2Xf(\phi)}$ tend vers 0.

Inflations multi-champ...

- Multiple field inflation

$$S_{\chi_i} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\mathrm{d}\eta \left[v_i'^2 - v_{i,j}v_i^{,j} + \left(\frac{a''}{a} - a^2 m_i^2\right) v_i^2 \right] \qquad v_i = a\,\chi_i.$$

Cela implique que la présence de fluctuations isocourbes

$$n_i = 1 - 2\epsilon + 2\eta_\chi, \qquad \eta_\chi = \frac{m_i^2}{H_*^2}$$

- Curvaton

- Modulated inflation

- ...

Modulated inflation in Sugra hybrid D-term inflation

FB, Kofman, Uzan, 2004

Susy

$$V = V_{\rm D} + V_{\rm F} = \frac{\lambda}{4}\left(\sigma_+^2 - \sigma_-^2 - v^2\right)^2 + \frac{g^2}{2}\left(\phi^2\sigma_+^2 + \phi^2\sigma_-^2 + \sigma_+^2\sigma_-^2\right)$$

Super-gravité

$$V_F = e^{K/M_P^2}\left[K^{j^*i}\mathcal{D}_{j^*}W\,\mathcal{D}_iW - 3\,\frac{W^2}{M_P^2}\right]$$

$$K = -\log\left(t_1 + t_1^* - \sum_i |\Phi_i|^2\right) - \log(t_2 + t_2^*) - \log(t_3 + t_3^*)$$

$$V_F = \tilde{g}^2\left[|\tilde{\Phi}\tilde{\Phi}_+|^2 + |\tilde{\Phi}\tilde{\Phi}_-|^2 + |\tilde{\Phi}_-\tilde{\Phi}_+|^2\right]$$

$$\tilde{g}^2 = \frac{(t_1 + t_1^*)^2}{(t_2 + t_2^*)(t_3 + t_3^*)}g^2\ ,$$

→ modulation de g, pas de λ

$$P_{\mathcal{R}_+} = \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{H}{M_p}\right)^2\frac{1}{\varepsilon}(k\eta_*)^{-2\varepsilon}\left[(k\eta_*)^{2\eta-4\varepsilon} + 4\pi\gamma^2(1-\varepsilon)(k\eta_*)^{2m^2/3H^2}\right]$$

Deux champs massifs de masses différentes

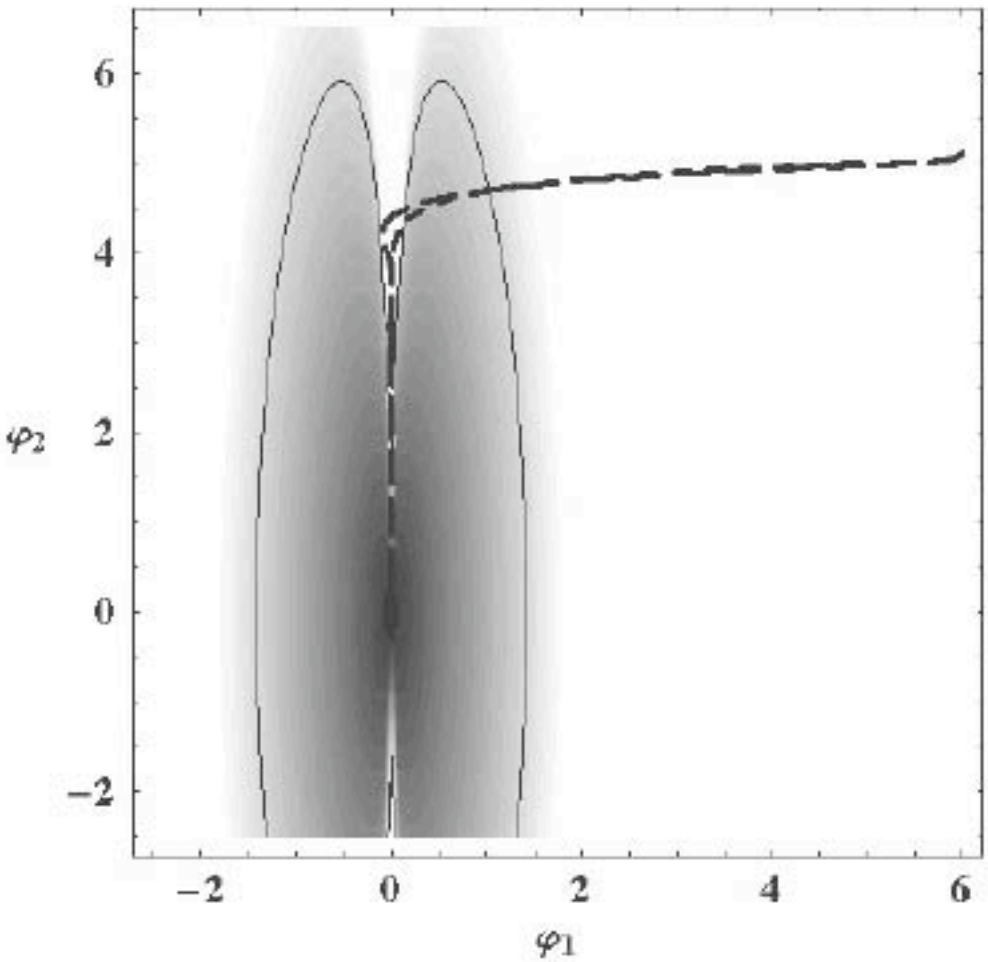


FIG. 8.13 – Exemple de trajectoire inflationnaire dans le cas de champs champs massifs φ_1 et φ_2 avec $m_1 = 5\,m_2$. Les pointillés longs représentent la dynamique exacte, les pointillés courts la solution de slow-roll. La ligne continue matérialise les lieux où $\eta = 1$ et les niveaux de gris correspondent aux isocontours de η. Dans les régions sombres les conditions de slow-roll sont donc violées. Pour les choix de paramètres et de conditions initiales, on voit qu'on traverse une région où les conditions de slow-roll ne s'appliquent pas.

La fin de l’inflation

8.5.1 Le réchauffage

Kolb Turner, 1990

Une première estimation de la température de réchauffage à la fin de l'inflation peut être basée sur des arguments cinétiques simples (pour plus de détail voir [155]). Pour un nombre de degré de liberté effectif de l'ordre de 100, la valeur de la constante de Hubble est donnée par,

$$H \approx 3.\frac{T^2}{M_{\rm Pl}}\left(\frac{g_*}{100}\right)^{1/2}, \tag{8.95}$$

si toutes les espèces sont relativistes. Cette température est à comparer aux taux de réactions, en particulier au taux total de désintégration $\Gamma_{\rm tot.}$ de l'inflaton. Tant que $\Gamma_{\rm tot.}$ est grand devant H, l'équilibre n'est pas atteint ; on s'attend donc à ce que la température cosmologique remonte jusqu'à la température $T_{\rm rec.}$ pour laquelle $H \approx \Gamma_{\rm tot.}$. La température de rechauffage estimée est donc,

$$T_{\rm rec.} \approx 0.5\ M_{\rm Pl}\left(\frac{g_*}{100}\right)^{-1/4}\ \sqrt{\Gamma_{\rm tot.}}. \tag{8.96}$$

Il faut encore calculer $\Gamma_{\rm tot.}$. Une approche perturbative pour le calcul des taux de désintégration peut être mise en oeuvre ; elle conduit aux calculs de ceux-ci en négligeant les effets collectifs ou cohérents. Par exemple pour un terme en $\lambda\Phi\sigma\chi^2$ couplant les champs scalaires Φ, σ et χ dans le Hamiltonien, si la vev de σ est non nulle le taux de désintégration de Φ en particules χ est $\Gamma_{\Phi\to\chi} = \lambda^2\sigma^2/(8\pi m_\Phi)$; pour un terme de Yukawa en $\lambda\Phi\overline{\Psi}\Psi$ couplant un champ scalaire Φ et un champ fermionique, le taux de désintégration est $\Gamma_{\Phi\to\Psi} = \lambda^2 m_\Phi/(8\pi)$.

8.5.2 Le préchauffage

L. Kofman, A. Linde, and A. A. Starobinsky, 1994

La théorie du préchauffage décrit la manière dont l'énergie stockée à la fin de l'inflation dans le mode zéro de l'inflaton est transférée dans les autres champs et vers des modes de plus petites longueurs d'onde. Comme on le verra cette production de particules est associée à une variation de leur masse effective. Celle-ci va dépendre de manière cruciale des différents couplages qu'il y a entre l'inflaton et les autres champs en présence, champs bosoniques ou champs fermioniques.

Pour illustrer notre propos on va considérer le cas d'un modèle inflationnaire avec un potentiel quadratique pour l'inflaton Φ et un terme d'interaction standard entre champs scalaires Φ et χ,

$$V(\Phi) = \frac{1}{2} m_\Phi^2 \, \Phi^2 + \frac{1}{2} g^2 \, \Phi^2 \chi^2. \tag{8.97}$$

Dans un tel modèle la masse effective du champ χ est $g^2\Phi^2$ et va donc varier au cours de l'évolution dynamique du champ Φ. Dans la suite on va donc s'intéresser à la production de particules χ pour un mode $\mathbf{k}$ donné. L'équation de Klein-Gordon décrivant l'évolution du mode $\mathbf{k}$ s'écrit,

$$\ddot{\chi}_{\mathbf{k}} + 3H\dot{\chi}_{\mathbf{k}} + \left[\frac{k^2}{a^2} + g^2\Phi^2(t)\right] \chi_{\mathbf{k}} = 0. \tag{8.98}$$

Au champ $\chi_{\mathbf{k}}$ est donc associée une fréquence caractéristique $\omega_k = \sqrt{k^2/a^2 + g^2\Phi^2(t)}$. Si celle-ci est constante ou varie peu on s'attend à ce que χ_k se comporte comme oscillateur amorti de fréquence ω_k. La figure 8.7 montre l'évolution conjointe des champs Φ et χ. L'évolution du champ Φ correspond à son mode zéro. On y voit le développement d'oscillations amorties. L'évolution du champ $\chi_{\mathbf{k}}$ a une amplitude arbitraire et correspond à un mode $k \to 0$. On peut remarquer une amplitude d'oscillation constante par plateaux ; cette amplitude variant brusquement aux moments où la valeur de Φ passe par zéro. Cet effet peut être plus facilement appréhendé sur le panneau du bas de cette figure. On y voit l'invariant adiabatique $n_{\mathbf{k}}$ défini par,

$$n_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}}\left|\frac{\mathrm{d}(a^{3/2}\chi_{\mathbf{k}})}{\mathrm{d}t}\right|^2 + \frac{1}{2}\omega_{\mathbf{k}}(a^{3/2}\chi_{\mathbf{k}})^2 - \frac{1}{2}. \tag{8.99}$$

Celui-ci décrit le nombre de particules produites. Pour une évolution adiabatique du champ celui-ci doit rester constant. On voit qu'il l'est par plateaux. Il change cependant brusquement, dans un sens ou dans l'autre, au moment où Φ s'annule. A ce moment là en effet la masse effective du champ s'annule et la production de particules peut se faire sans dépense énergétique.

Ce comportement peut être analysé plus précisément en remarquant que l'équation d'évolution de l'amplitude du champ $\chi_{\mathbf{k}}$ peut être ramenée à une équation de Mathieu [154]. Pour cela remarquons dans un premier temps que l'évolution de Φ prend, avec une très bonne approximation, la forme suivante,

$$\Phi(t) \approx \Phi_{\text{ampl.}}(t)\sin(m_\Phi t) \tag{8.100}$$

avec

$$\Phi_{\text{ampl.}}(t) = \sqrt{\frac{8}{3}}\frac{M_{\text{Pl}}}{m_\Phi\, t}, \tag{8.101}$$

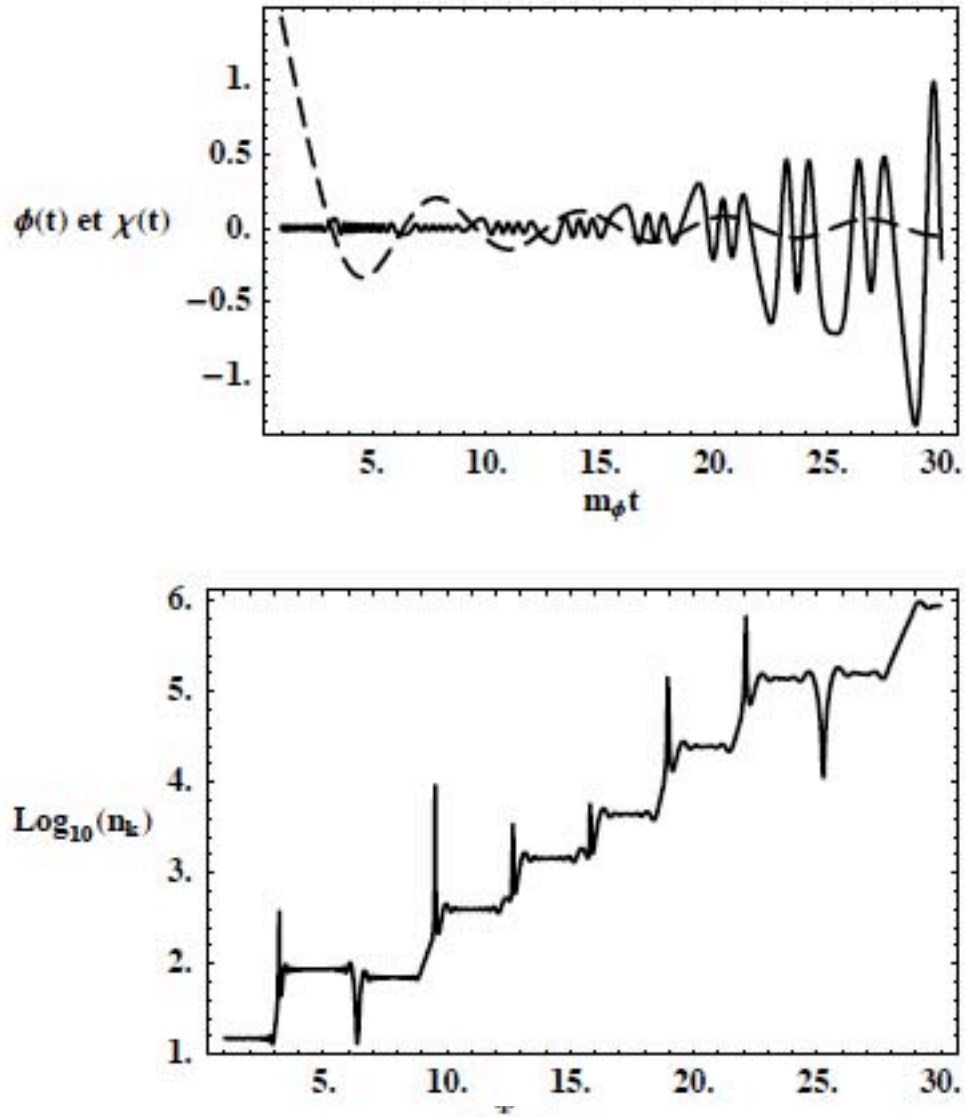


FIG. 8.7 – Comportement d'un inflaton massif, Φ et d'un champ scalaire χ couplé à celui-ci à la fin de la phase inflationnaire. La figure du haut montre l'amplitude des champs, ligne continue pour le champ χ et tirets pour le champ Φ. On y voit que l'amplitude des oscillations du champ χ est constante sauf quand la valeur du champ Φ passe par zéro. La figure du bas montre l'évolution par plateaux de l'invariant adiabatique $n_{\mathbf{k}}$ donnant la densité comobile de particules.

avec

$$A_k = 2q + \frac{k^2}{m_\Phi^2\, a^2}, \quad q = \frac{g^2 \Phi_{\text{ampl.}}^2}{4 m_\Phi^2}. \tag{8.103}$$

Cette équation correspond à l'équation de Mathieu de paramètres q et $a = A_k$. L'étude de cette équation montre qu'il existe dans le plan q–A des bandes d'instabilité. Elles sont montrées sur la figure 8.8. Au cours de l'évolution cosmologique le

Carte d'instabilité de Mathieu

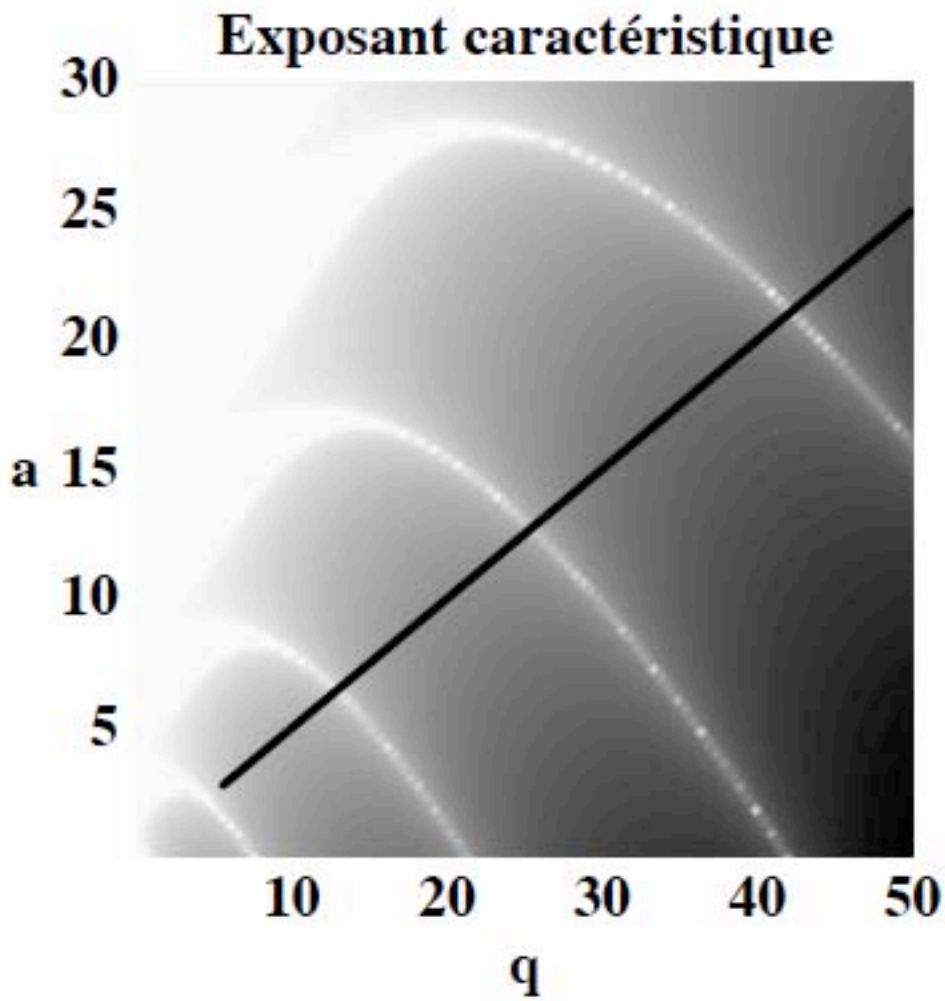


FIG. 8.8 – Carte montrant les zones, en gris, d'instabilité de l'équation de Mathieu en fonction des paramètres a et q. L'instabilité est d'autant plus importante que les régions sont plus sombres. Dans le cas d'un préchauffage avec un inflaton massif, la dynamique décrivant la production de particules χ parcours différentes régions de cette carte. La ligne continue correspond au cas $k \to 0$.

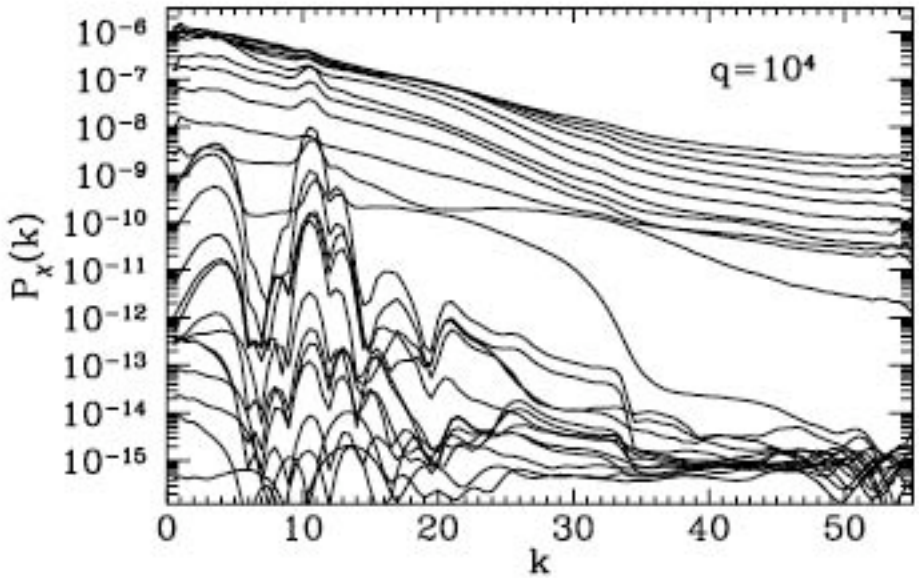


FIG. 8.9 – Simulation numérique sur réseau de l'évolution des nombres d'occupation n_k du champ χ dans le modèle (8.97) en fonction du temps. A temps court on voit l'effet des bandes d'instabilité ; à temps plus long les interactions entre modes conduisent à une distribution lisse, éventuellement thermique des modes. Figure tirée de [148].

Vers une théorie des perturbations quantiques

Peut-on “voir” les différents opérateurs du Lagrangien ?

B.4.1 Hamiltonien d'interaction et opérateurs d'évolution

On est donc amené à définir formellement $\overline{\varphi}$, $\delta\varphi$, $\overline{\pi}$ et $\delta\pi$ de telle sorte que,

$$\varphi(t,\mathbf{x}) = \overline{\varphi}(t,\mathbf{x}) + \delta\varphi(t,vx) \tag{B.58}$$

et

$$\pi(t,\mathbf{x}) = \overline{\pi}(t,\mathbf{x}) + \delta\pi(t,vx) \tag{B.59}$$

où $\overline{\varphi}$ et $\overline{\pi}$ sont les champs classiques obéissant aux équations d'évolution classiques (B.7-B.8) .

Les commutateurs des champs avec le Hamiltonien s'annulent avec la partie classique du champ ce qui implique que[9],

$$\dot{\overline{\varphi}}(\mathbf{x}) + \dot{\delta\varphi}(\mathbf{x}) \;=\; \mathrm{i}\,[H(\varphi(\mathbf{x}),\pi(\mathbf{x})),\delta\varphi(\mathbf{x})]\,. \tag{B.60}$$

Le Hamiltonien peut être décomposé en une partie classique, responsable de l'évolution des parties classiques, et une partie "quantique" responsable de l'évolution des parties quantiques. Plus écrivons H_Q comme le reste d'un développement de H par rapport à ses variables autour de la trajectoire classique à l'ordre linéaire,

$$\begin{aligned} H_Q[\delta\varphi(\mathbf{x}),\delta\pi(\mathbf{x})] \;&=\; H[\varphi(\mathbf{x}),\pi(\mathbf{x})] - H[\overline{\varphi}(\mathbf{x}),\overline{\pi}(\mathbf{x})] \\ &\quad -\delta\varphi\frac{\partial H}{\partial\varphi(\mathbf{x})}[\overline{\varphi}(\mathbf{x}),\overline{\pi}(\mathbf{x})] - \delta\pi\frac{\partial H}{\partial\pi(\mathbf{x})}[\overline{\varphi}(\mathbf{x}),\overline{\pi}(\mathbf{x})]. \end{aligned} \tag{B.61}$$

On peut alors vérifier à l'aide des relations (B.7-B.8) décrivant l'évolution classique des champs que l'équations (B.60) devient,

$$\dot{\delta\varphi}(\mathbf{x}) \;=\; \mathrm{i}\,[H_Q[\delta\varphi(\mathbf{x}),\delta\pi(\mathbf{x})],\delta\varphi(\mathbf{x})]\,. \tag{B.62}$$

Pour la mise en oeuvre de la théorie des perturbations on va aussi devoir se donner un temps t_i en deçà duquel on suppose que le Hamiltonien d'interaction ne joue pas de rôle. On peut alors considérer deux types d'évolution, l'évolution des champs suivant le Hamiltonien libre, et celle obtenue suivant le Hamiltonien complet. On définit ainsi $\varphi^{(0)}$ l'évolution de champ libre, e.g. celle obtenue par

$$\dot{\delta\varphi^{(0)}}(\mathrm{x}) = \mathrm{i}\left[H_Q^{(0)}[\delta\varphi(\mathrm{x}), \delta\pi(\mathrm{x})], \delta\varphi^{(0)}(\mathrm{x})\right]. \tag{B.64}$$

avec

$$\delta\varphi^{(0)}(t_i) = \delta\varphi(t_i). \tag{B.65}$$

Considérons maintenant une quantité observable $\mathcal{Q}(t)$, une fonction quelconque des champs $\varphi(t, \mathrm{x})$ et $\pi(t, \mathrm{x})$. Ce peut être par exemple un produit de champs pris au même temps. Alors on veut exhiber un opérateur (ou les opérateurs) ne dépendant que des champs libres et permettant d'exprimer $\mathcal{O}(t)$ en fonction de $\mathcal{Q}^{(0)}(t)$, la même observable calculée sur les champs libres.

Les opérateurs unitaires $\mathcal{U}(t, t_i)$ et $\mathcal{U}^{(0)}(t, t_i)$ définis par,

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}(t_i, t_i) &= \mathcal{U}^{(0)}(t_i, t_i) = 1 && \text{(B.66)}\\
\dot{\mathcal{U}}(t, t_i) &= -\mathrm{i}\mathcal{U}(t, t_i)\, H_Q[\varphi(t), \pi(t)] && \text{(B.67)}\\
\dot{\mathcal{U}}^{(0)}(t, t_i) &= -\mathrm{i}\mathcal{U}^{(0)}(t, t_i)\, H_Q^{(0)}[\varphi(t), \pi(t)] && \text{(B.68)}
\end{aligned}$$

sont tels que

$$\begin{aligned}
\delta\varphi(t) &= \mathcal{U}^{-1}(t, t_i)\, \delta\varphi(t_i\, \mathcal{U}(t, t_i) && \text{(B.69)}\\
\delta\varphi^{(0)}(t) &= (\mathcal{U}^{(0)})^{-1}(t, t_i)\, \delta\varphi(t_i\, \mathcal{U}^{(0)}(t, t_i). && \text{(B.70)}
\end{aligned}$$

Il est alors possible de réécrire les équations d'évolution de ces opérateurs sous la forme,

$$\dot{\mathcal{U}}(t,t_i) = -\mathrm{i}H_Q[t,\varphi(t_i),\pi(t_i)]\mathcal{U}(t,t_i) \tag{B.71}$$

$$\dot{\mathcal{U}}^{(0)}(t,t_i) = -\mathrm{i}H_Q^{(0)}[t,\varphi(t_i),\pi(t_i)]\mathcal{U}^{(0)}(t,t_i) \tag{B.72}$$

après avoir fait agir ces opérateurs sur l'argument des Hamiltoniens. Notons qu'il reste une dépendance en temps dans le Hamiltonien qui elle n'est pas changée.

Alors l'opérateur $\mathcal{U}^{(I)}(t,t_i)$ défini comme

$$\mathcal{U}^{(I)}(t,t_i) = (\mathcal{U}^{(0)})^{-1}(t,t_i)\mathcal{U}(t,t_i) \tag{B.73}$$

vérifie de plus l'équation d'évolution,

$$\dot{\mathcal{U}}^{(I)}(t,t_i) = -\mathrm{i}H^{(I)}[\delta\varphi^{(0)}(t),\delta\pi^{(0)}(t)]\dot{\mathcal{U}}^{(I)}(t,t_i) \tag{B.74}$$

où il est important de remarquer que le Hamiltonien d'interaction est calculé en fonction des champs libres. La solution de (B.74) prend formellement la forme suivante,

$$\mathcal{U}(t,t_i) = \mathcal{T}\left\{\exp\left(-\mathrm{i}\int_{t_i}^{t} H^{(I)}\mathrm{d}t\right)\right\} \tag{B.75}$$

où $H^{(i)}$ est calculé au point décrit dans l'expression précédente. Dans cette expression l'opérateur $\mathcal{T}$ est l'opérateur dit de "T-produit", c'est à dire que les champs apparaissant dans son arguments doivent être ordonnés en temps. En l'occurrence les termes du développement de l'exponentiel doivent être chacuns réordonnés de telle sorte que les termes écrits de gauche à droite décroissent en temps ; e.g.,

$$\mathcal{U}(t,t_i) = \mathrm{Id} - \mathrm{i}\int_{t_i}^{t}\mathrm{d}t_1 H^{(I)}(t_1) + \int_{t_i}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_1}^{t}\mathrm{d}t_2\, H^{(I)}(t_2)\, H^{(I)}(t_1) + \dots \tag{B.76}$$

Alors $\mathcal{U}^{(I)}$ a les propriétés recherchées. Il est en effet tel que

$$\mathcal{Q}(t) = (\mathcal{U}^{(I)})^{-1}(t,t_i)\,\mathcal{Q}^{(0)}(t)\mathcal{U}^{(I)}(t,t_i). \tag{B.77}$$

ce qui peut encore être réécrit,

$$\mathcal{Q}(t) = \left[\overline{\mathcal{T}}\exp\left(\mathrm{i}\int_{t_i}^{t} H^{(I)}\mathrm{d}t'\right)\right]\,\mathcal{Q}^{(0)}(t)\,\left[\mathcal{T}\exp\left(-\mathrm{i}\int_{t_i}^{t} H^{(I)}\mathrm{d}t'\right)\right]. \tag{B.78}$$

Cette relation est la base du calcul des perturbations d'observables dans un espace en expansion et en particulier pendant la phase inflationnaire.

B.4.2 Développement perturbatif de corrélateurs

Dans la pratique on va s'intéresser à des observables qui sont des produits de champs. Leur valeur moyenne dans le vide va donc s'écrire $\langle 0|\mathcal{Q}|0\rangle$ que l'on peut exprimer perturbativement en fonction du hamiltonien d'interaction. Ainsi on a

$$\begin{aligned}
\langle 0|\mathcal{Q}|0\rangle &= \langle 0|\mathcal{Q}^{(0)}|0\rangle \\
&\quad -\mathrm{i}\int_{t_i}^{t} \mathrm{d}t_1 \, \langle 0| \left[\mathcal{Q}^{(0)},\, H^{(I)}(t_1)\right] |0\rangle \\
&\quad -\int_{t_i}^{t} \mathrm{d}t_2 \int_{t_i}^{t_2} \mathrm{d}t_2 \, \langle 0| \left[\left[\mathcal{Q}^{(0)},\, H^{(I)}(t_1)\right], H^{(I)}(t_2)\right] |0\rangle \\
&\quad + \dots
\end{aligned} \tag{B.79}$$

8.4.3 * Champs tests en auto-interaction

La possibilité d'effectivement "voir" des fluctuations isocourbes ouvre la voie à des investigations spéficiques concernant les propriétés de champs scalaires "tests" dans un univers en inflation. Le cas d'un champ libre ne pose pas de problème particulier, en tout cas pas plus que le cas de l'inflaton. Il est cependant possible d'avoir des effets d'auto-interaction dans les directions isocourbes. Se pose alors le problème des propriétés de champs tests en auto-interaction.

Quand on est intéressé par des quantités n'impliquant qu'un vertex, l'opérateur d'évolution peut être développé au premier ordre en H_I,

$$U(\eta_0, \eta) = I_{\mathrm{d}} - \mathrm{i} \int_{\eta_0}^{\eta} \mathrm{d}\eta' \; H_I(\eta') \tag{8.86}$$

de telle sorte que la partie connexe de la moyenne d'ensemble ci-dessus au temps η devient,

$$\langle v_{\mathbf{k}_1} \ldots v_{\mathbf{k}_n} \rangle_c = -\mathrm{i} \int_{\eta_0}^{\eta} \mathrm{d}\eta' \; \langle 0 | \left[v_{\mathbf{k}_1} \ldots v_{\mathbf{k}_n}, H_I(\eta') \right] | 0 \rangle \tag{8.87}$$

où $[.,.]$ désigne le commutateur.

Le résultat s'écrit en fonction de la fonction de Green du champ libre,

$$G(k, \eta, \eta') = \frac{1}{2k} \left(1 - \frac{\mathrm{i}}{k\eta} \right) \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{k\eta'} \right) \exp[\mathrm{i}k(\eta' - \eta)] \tag{8.88}$$

définie comme $\langle 0 | v(\mathbf{k}, \eta) v(\mathbf{k}', \eta') | 0 \rangle = \delta_{\mathrm{Dirac}}(\mathbf{k} + \mathbf{k}') G(k, \eta, \eta')$.

Le résultat s'écrit en fonction de la fonction de Green du champ libre,

$$G(k,\eta,\eta') = \frac{1}{2k}\left(1-\frac{\mathrm{i}}{k\eta}\right)\left(1+\frac{\mathrm{i}}{k\eta'}\right)\exp[\mathrm{i}k(\eta'-\eta)] \tag{8.88}$$

définie comme $\langle 0|v(\mathbf{k},\eta)v(\mathbf{k}',\eta')|0\rangle = \delta_{\mathrm{Dirac}}(\mathbf{k}+\mathbf{k}')G(k,\eta,\eta')$.

Des résultats généraux peuvent être obtenus des potentiels en auto-interaction simples. Dans le complément 8.7.5, les résultats sont donnés explicitement pour des potentiels quartiques et cubiques. Le premier est évidemment un choix naturel à faire compte tenues des propriétés de stabilité et de renormalisation d'un tel potentiel.

Dans le cas d'un potentiel quartique de la forme,

$$H_I(\chi) = \int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\sqrt{-g}\,\lambda\frac{\chi^4}{4!} \tag{8.89}$$

il vient,

$$\begin{aligned}\langle v_{\mathbf{k}_1}\ldots v_{\mathbf{k}_4}\rangle_c &= -\mathrm{i}\lambda\delta_{\mathrm{Dirac}}(\mathbf{k}_1+\ldots+\mathbf{k}_4)\\ &\quad\int^{\eta}\mathrm{d}\eta'\,[G(k_1,\eta,\eta')\ldots G(k_4,\eta,\eta') - G^*(k_1,\eta,\eta')\ldots G^*(k_4,\eta,\eta')]\end{aligned} \tag{8.90}$$

Cette expression admet une forme explicite donnée dans le complément 8.7.5. Contentons-nous d'en donner une forme approchée dans la limite super-Hubble.

Dans cette limite, il apparaît légitime d'écrire la fonction de corrélation à quatre points comme la somme de produits de la fonction à deux points,

$$\langle \chi_{\mathbf{k}_1}\cdots\chi_{\mathbf{k}_4}\rangle_c = \delta_{\mathrm{Dirac}}\left(\sum \mathbf{k}_i\right)P_4(\{k_i\}) \tag{8.91}$$

$$P_4(\{k_i\}) = \nu_3(\{k_i\})\sum_i\prod_{j\neq i}\frac{H^2}{2k_j^3}. \tag{8.92}$$

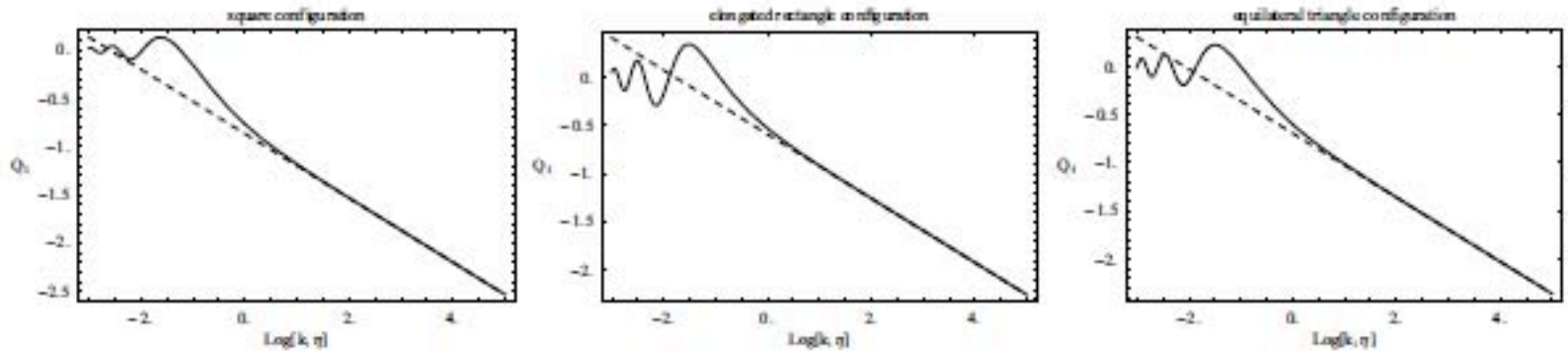


FIG. 8.6 – Comportement de Q_4 en fonction du temps. La transition d'un comportement sous-horizon à un comportement super-horizon (tirets) y est mise en évidence. La fonction Q_4 est dessinée ici pour une configuration en "carrée" ($k_1 = k_2 = k_3 = k_4$) en fonction de $k_t\eta = \sum k_i\eta$ (panneau de droite), pour une configuration "rectangulaire" ($k_1 = k_2 = 4$, $k_3 = 4k_4$) (panneau du centre) et pour une configuration "triangulaire" ($k1 = 0, k_2 = k_3 = k_4$) (panneau de gauche).

La valeur du vertex, ν_3, est donnée par,

$$\nu_3(\{k_i\}) = \frac{\lambda}{3H^2}\left[\gamma + \zeta(k_i) + \log\left(-\eta\sum k_i\right)\right], \tag{8.93}$$

qui contient une dépendance faible avec la géométrie des vecteurs d'onde au travers de la fonction ζ dont l'expression est donnée en complément et dont la valeur est comprise entre -3.2 et -2.

Quand le terme en $\log(-\eta \sum k_i)$ est grand, c'est à dire quand le nombre de efolds, N_e, entre le moment de la traversée de l'horizon et la fin de l'inflation est grand, la valeur du vertex est simplement donnée par,

$$\nu_3(\{k_i\}) = -\lambda\, N_e/(3\, H^2),$$

ce qui correspond à ce qu'une approche stochastique classique donnerait. La figure 8.6 précise cependant le domaine de validité de ce résultat en montrant la forme de la transition en régime quantique et régime classique au travers de la fonction,

$$Q_4(\{k_i\}) = \frac{P_4(k_1, k_2, k_3, k_4)}{P_2(k_1)P_2(k_2)P_2(k_3) + \text{sym.}}, \tag{8.94}$$

où P_2 est le spectre du champ libre. Ce qui apparaît clairement ici c'est que les couplages développés dans les champs χ_i sont dus essentiellement à l'évolution super-Hubble classique du champ.

Ces résultats ouvrent la voie à des études qualitatives précises sur la recherche de signatures possibles de tels effets dans les données (voir la fin du chapitre précédent).

Cosmologie et fluctuations primordiales

SPhT, 9 novembre - 14 décembre 2007

- **Univers homogène, univers inhomogène**
  La métrique de Friedmann-Robertson-Walker. Introduction à la notion de distances et d'horizons. Inhomogénéités de l'espace temps. Relations entre métrique et quantités observables. Outils statistiques : fonctions de corrélations et spectres de puissance.

- **Le développement des instabilités gravitationnelles**
  Identification des modes propres d'instabilité. Décomposition Scalaire-Vecteur-Tenseur et identification des modes de jauge. Evolutions sub- et super-Hubble. Modes adiabatiques et modes isocourbes.

- **L'inflation, paradigme et prédictions I**
  La nécessité d'une phase inflationnaire. Quelle quantité d'inflation ? Forme de Mukhanov de l'action et quantification des champs. Transition quantique-classique. Spectres de puissance induits.

- **L'inflation, paradigme et prédictions II**
  Ondes gravitationnelles. Relations entre indices spectraux. Conséquences sur le fond diffus cosmologique.

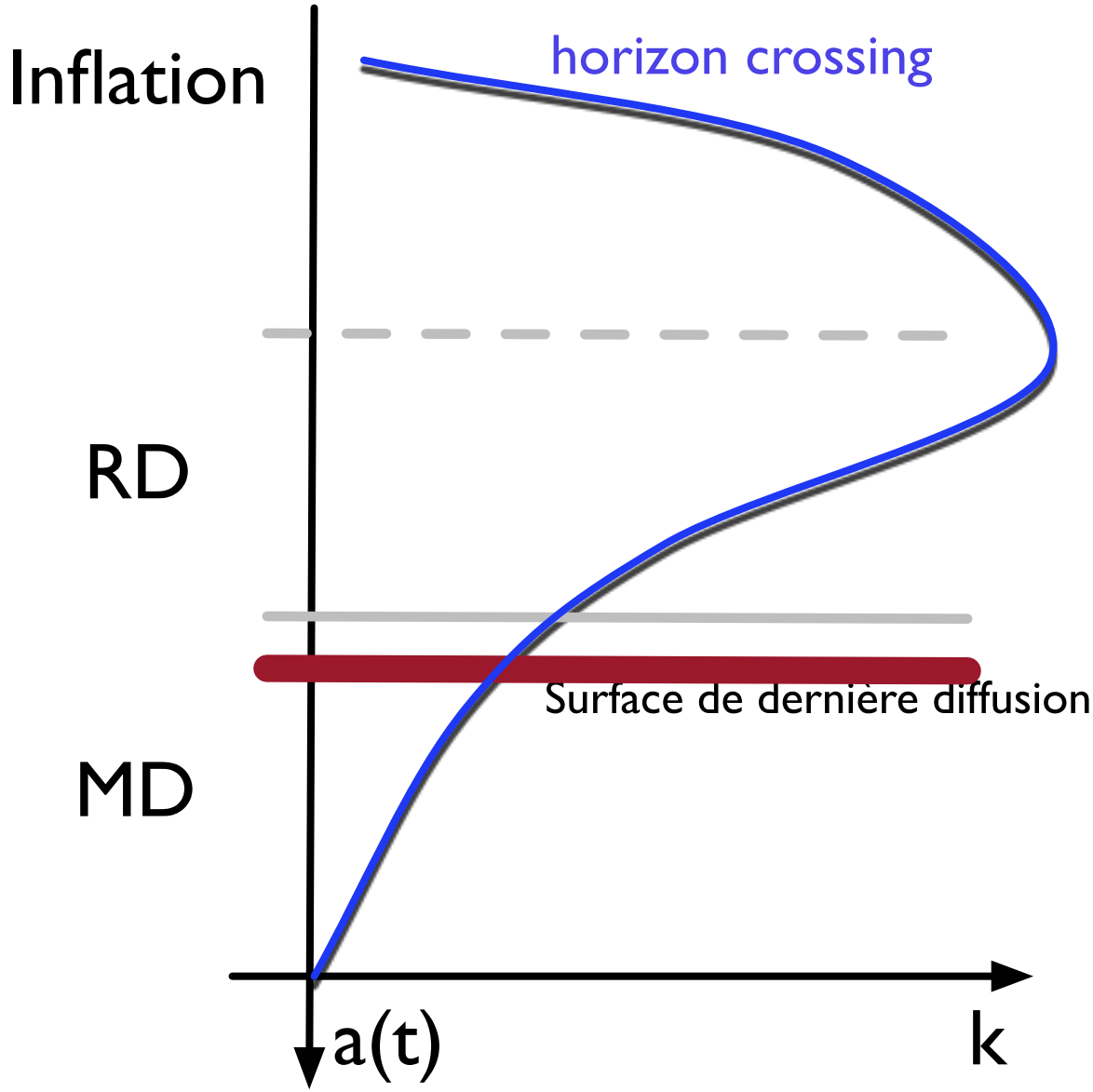
- **Modèles inflationnaires**
  Inflation à un champ, chaotique, en loi de puissance. Modèles hybrides, modèles construits à partir des théories supersymétriques. Inflation multi-champ. Action de Dirac-Born-Infeld.

- **Au delà du régime linéaire, l'univers primordial, l'univers local**
  Couplages de modes dans l'univers local. Couplages de modes pendant la phase inflationnaire. Prédictions de l'inflation standard.

Plan du cours VI

- Au delà du régime linéaire
  - Les différents régimes
  - couplages de modes dans l'univers local
- couplage de modes en inflation générique
- modèles d'inflation non standard

- Les différents régimes, les observations



Rappel : corrélateurs en théorie quantique des champs

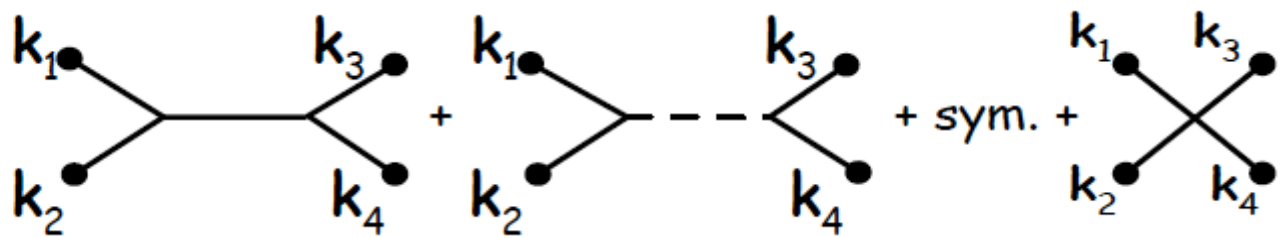
B.4.2 Développement perturbatif de corrélateurs

Dans la pratique on va s'intéresser à des observables qui sont des produits de champs. Leur valeur moyenne dans le vide va donc s'écrire $\langle 0|\mathcal{Q}|0\rangle$ que l'on peut exprimer perturbativement en fonction du hamiltonien d'interaction. Ainsi on a

$$\begin{aligned}\langle 0|\mathcal{Q}|0\rangle &= \langle 0|\mathcal{Q}^{(0)}|0\rangle \\ &\quad -\mathrm{i}\int_{t_i}^{t} \mathrm{d}t_1\, \langle 0|\left[\mathcal{Q}^{(0)},\, H^{(I)}(t_1)\right]|0\rangle \\ &\quad -\int_{t_i}^{t} \mathrm{d}t_2 \int_{t_i}^{t_2} \mathrm{d}t_2\, \langle 0|\left[\left[\mathcal{Q}^{(0)},\, H^{(I)}(t_1)\right], H^{(I)}(t_2)\right]|0\rangle \\ &\quad + \dots \end{aligned} \tag{B.79}$$

Termes à l'ordre des arbres en présence d'un potentiel avec termes cubiques et quartiques

$P^X{}_1(k_1,k_2,k_3,k_4) =$



Mécanique Classique : développement des corrélations de grand ordre

Equation du mouvement $\mathcal{D}[\phi(t)] = S(\phi)$

Elle peut être résolue ordre par ordre

fonction de Green

$$\phi^{(n)} = \int_{t_i}^{t_0} \mathrm{d}t\, G(t,t_0)\, S^{(n)}\left(\phi^{(1)},\ldots,\phi^{(2)}\right)$$

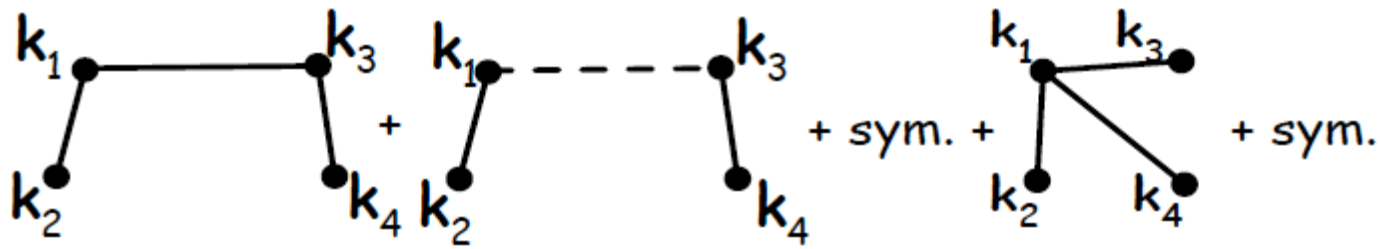
Les cumulants sont obtenues par développement du champ

$$\langle \Phi_1 \Phi_2 \ldots \rangle_c = \left\langle \left(\Phi_1^{(1)} + \Phi_1^{(2)} + \ldots\right)\left(\Phi_2^{(1)} + \Phi_2^{(2)} + \ldots\right)\ldots \right\rangle_c$$

que l'on peut redévelopper...

Termes à l'ordre des arbres en présence d'un potentiel avec termes cubiques et quartique, *pour des conditions initiales Gaussiennes*

$P^X{}_1(k_1,k_2,k_3,k_4) =$



arXiv:0712.1148v2, Yadav et Wandelt

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_L(\mathbf{r}) + f_{NL}\left(\Phi_L^2(\mathbf{r}) - \langle\Phi_L^2(\mathbf{r})\rangle\right)$$

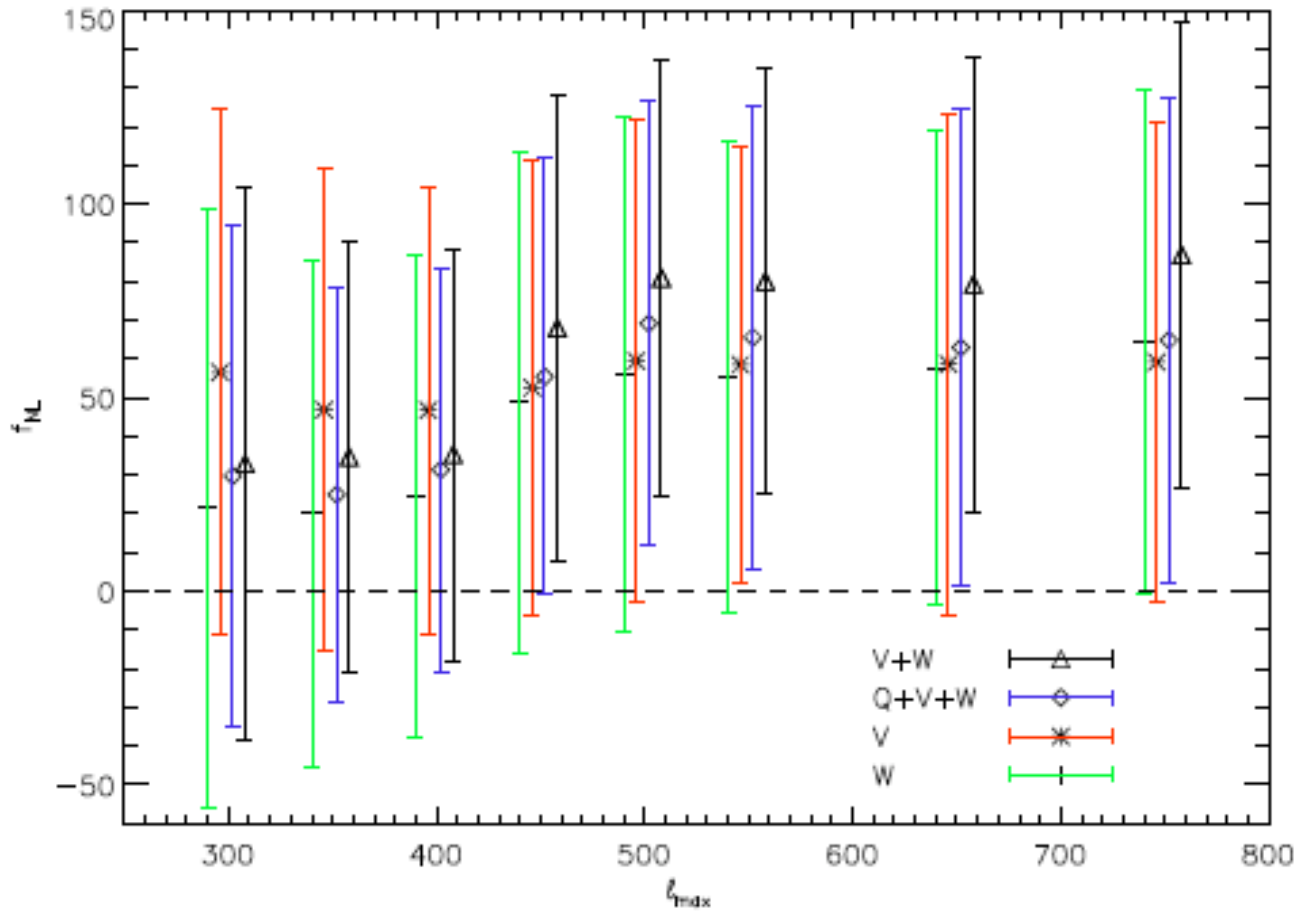


FIG. 1: We show the measured value of the non-linear coupling parameter $f_{\rm NL}$ using WMAP 3-year maps, and the corresponding 95% error bars derived from the Gaussian simulations. For this analysis the WMAP Kp0 mask was used. The analysis is done for 4 combinations of the frequency channels: coadded Q+V+W, coadded V+W, V, and W.

Couplage de modes dans le régime Newtonien

Equation du mouvement pour une particule

Il en résulte que l'équation du mouvement s'écrit pour la vitesse particulière $\mathbf{u}$ - écart de la vitesse totale avec le flot de Hubble - ,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{u} = \mathbf{g} = G\overline{\rho}\, a \int \mathrm{d}^3\mathbf{x}' \frac{\delta(\mathbf{x}')(\mathbf{x}' - \mathbf{x})}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3}. \tag{4.3}$$

Cette équation du mouvement, écrite pour une seule particule, va permettre d'écrire l'équation d'évolution de la densité de particules dans l'espace des phases, l'équation de Vlasov. La densité dans l'espace des phases est définie par,

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{p})\, \mathrm{d}^3\mathbf{x}\, \mathrm{d}^3\mathbf{p}, \tag{4.5}$$

où $\mathbf{x}$ est la position comobile et $\mathbf{p}$ est l'impulsion. Le théorème de Liouville appliqué à l'évolution de la densité f donne alors l'équation de Vlasov,

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + \frac{\mathbf{p}}{ma^2}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) - m\nabla_{\mathbf{x}}.\Phi(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = 0 \tag{4.6}$$

$$\Delta\Phi(\mathbf{x}) = \frac{4\pi G m}{a}\left(\int f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)\mathrm{d}^3\mathbf{p} - \overline{n}\right), \tag{4.7}$$

où $\overline{n}$ est la moyenne spatiale de $\int f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)\mathrm{d}^3\mathbf{p}$. Dans toute sa généralité cette équation est évidemment très difficile à résoudre à cause des nonlinéarités qu'elle contient.

Quand on intègre l'équation de Vlasov par rapport à $\mathbf{p}$ on obtient (en profitant du fait que $\overline{\rho}\, a^3$ est constant),

$$\overline{\rho}\,\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a}\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\left[\rho(\mathbf{x})\,\mathbf{u}(\mathbf{x})\right] = 0, \tag{4.12}$$

soit,

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a}\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\left[(1+\delta(\mathbf{x}))\mathbf{u}(\mathbf{x})\right] = 0, \tag{4.13}$$

Le moment suivant par rapport à l'impulsion donne une autre équation de conservation, celle de l'impulsion. En effet quand on intègre l'équation (4.6) par rapport à $\mathbf{p}$ après l'avoir multiplié par $\mathbf{p}$ on a,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int p_i\, f\, \mathrm{d}^3\mathbf{p} + \frac{1}{m\, a^2}\partial_j \int p_i\, p_j\, f\, \mathrm{d}^3\mathbf{p} + a^3\rho(\mathbf{x},t)\Phi_i = 0. \tag{4.14}$$

On peut réécrire cette équation en faisant apparaître la vitesse particulière du flot ce qui donne l'équation de d'Euler,

$$\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{u}_i + \frac{1}{a}\mathbf{u}_j\,\mathbf{u}_{i,j} = -\frac{1}{a}\nabla_i\Phi - \frac{1}{\rho\, a}\left(\rho\,\sigma_{ij}\right)_{,j}. \tag{4.15}$$

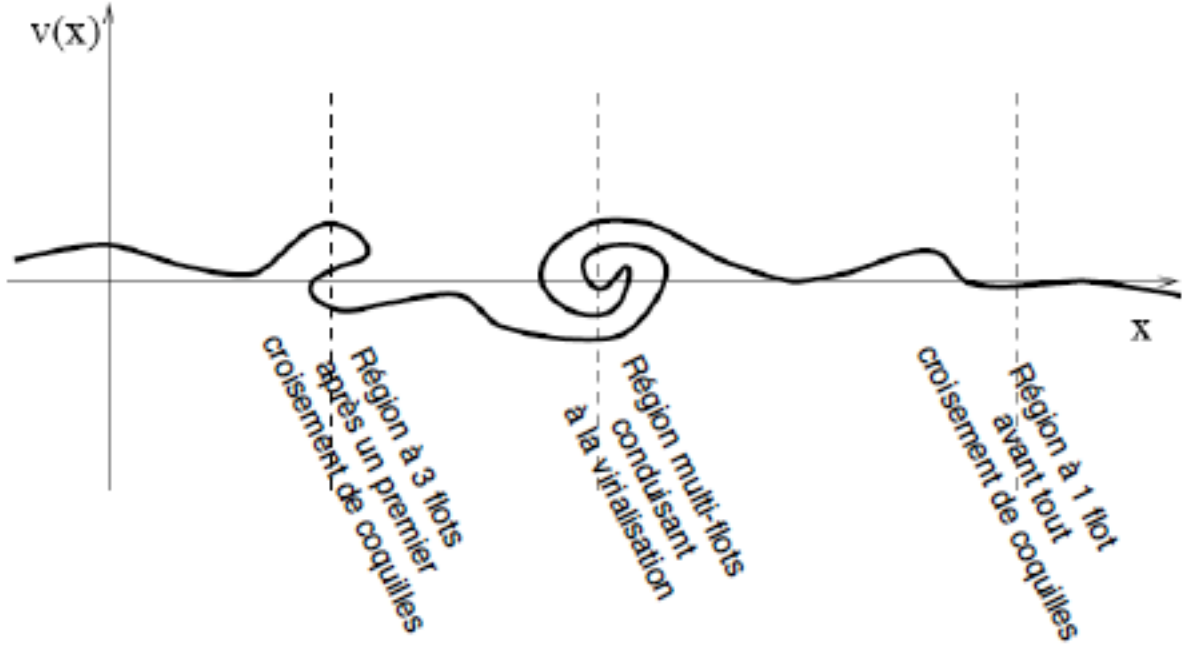


FIG. 4.1 – Description schématique de l'espace des phases après les premiers croisements de coquilles et apparition de régions multiflots. Le schéma correspond à une dynamique 1D.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\delta(\mathbf{x},t) + \frac{1}{a}\nabla_i.\left[(1+\delta(\mathbf{x},t))\mathbf{u}_i(\mathbf{x},t)\right] &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}_i(\mathbf{x},t) + \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{u}_i(\mathbf{x},t) + \frac{1}{a}\mathbf{u}_j(\mathbf{x},t)\,\mathbf{u}_{i,j}(\mathbf{x},t) &= -\frac{1}{a}\nabla_i\Phi(\mathbf{x},t) \\
\nabla^2\Phi(\mathbf{x},t) - 4\pi G\overline{\rho}(t)a^2\,\delta(\mathbf{x},t) &= 0.
\end{aligned}
$$

Solutions à l'ordre linéaire

La linéarisation des équations conduit à,

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + H\theta = 0, \tag{4.25}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + 2H\theta + \frac{\dot{H}}{H}\theta = -4\pi G\,\overline{\rho}\,\frac{\delta}{H} \tag{4.26}$$

après avoir pris la divergence de l'équation d'Euler. On peut bien sûr éliminer θ dans ce système d'équations pour obtenir,

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2\,\frac{\dot{a}}{a}\frac{\partial \delta}{\partial t} = 4\,\pi\,G\,\overline{\rho}\,\delta. \quad \Longrightarrow \quad \delta(\mathbf{x},t) = D_+(t)\delta_+(\mathbf{x}) + D_-(t)\delta_-(\mathbf{x}),$$

Il n'existe pas de solution générale à (4.28) qui soit valable pour tout modèle cosmlogique. Cependant si on admet que le contenu de l'univers à bas redshift correspond à un mélange de matière, d'une énergie du vide correspondant à une simple constante cosmologique, en présence éventuellement d'un terme de courbure, alors la constante de Hubble prend la forme,

$$H = H_0\sqrt{\Omega_{\rm m}^{(0)}a^{-3} + (1-\Omega_{\rm m}^{(0)} - \Omega_\Lambda^{(0)})a^{-2} + \Omega_\Lambda}, \tag{4.30}$$

et est solution de (4.28). C'est la solution décroissante. La solution croissante peut facilement être obtenue par méthode de variation des constantes. On obtient ainsi, sous les hypothèses mentionnées plus haut,

$$D_-(t) \propto H(t), \quad D_+(t) \propto H(t)\int \frac{{\rm d}t}{(aH)^2}. \tag{4.31}$$

Au delà du régime linéaire

4.4.2 Les équations du mouvement en représentation de Fourier

L'avantage de travailler en représentation de Fourier est qu'à l'ordre linéaire les modes de Fourier évoluent de manière indépendante. C'est la conséquence du fait que les opérateurs qui agissent sur les champs restent locaux (les dérivées spatiales deviennent de simples multiplications) ; par contre les multiplications de champs vont devenir des convolutions.

Rappelons la convention adoptée pour les modes de Fourier pour un champ $A(\mathbf{x})$,

$$A(\mathbf{k}) = \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{x}}{(2\pi)^{3/2}} \exp(-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\; A(\mathbf{x}). \tag{4.76}$$

En représentation de Fourier, la réécriture des équations (4.74-4.75) devient,

$$\begin{aligned} a\frac{\partial\delta(\mathbf{k},a)}{\partial a} + \theta(\mathbf{k},a) &= -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \mathrm{d}^3\mathbf{k}_1\mathrm{d}^3\mathbf{k}_2\,\delta_D(\mathbf{k}-\mathbf{k}_{12}) \\ &\times \quad \alpha(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)\theta(\mathbf{k}_1,a)\delta(\mathbf{k}_2,a) \qquad (4.77) \\ a\frac{\partial\theta(\mathbf{k},a)}{\partial a} + \frac{1}{2}\theta(\mathbf{k},a) + \frac{3}{2}\delta(\mathbf{k},a) &= -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \mathrm{d}^3\mathbf{k}_1\mathrm{d}^3\mathbf{k}_2\,\delta_D(\mathbf{k}-\mathbf{k}_{12}) \\ &\times \quad \beta(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)\theta(\mathbf{k}_1,a)\theta(\mathbf{k}_2,a), \qquad (4.78) \end{aligned}$$

$$\alpha(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2) \equiv \frac{\mathbf{k}_{12}\cdot\mathbf{k}_1}{k_1^2}, \qquad \beta(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2) \equiv \frac{k_{12}^2(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}_2)}{2k_1^2k_2^2}.$$

4.4.3 Le développement perturbatif aux grands ordres

L'hypothèse fondamentale de la théorie des perturbations est de supposer que les champs qui interviennent dans ces équations puissent être développés à tout ordre en fonction du champ de densité initiale[5]. On suppose donc que l'on peut écrire la densité - et la divergence - comme une série de la forme,

$$\delta(\mathbf{x},t) = \sum_n \delta^{(n)}(\mathbf{x},t), \quad \theta(\mathbf{x},t) = \sum_n \theta^{(n)}(\mathbf{x},t). \tag{4.80}$$

Ce développement s'étend bien évidemment aux modes de Fourier.

A partir de (4.77-4.78) il est très facile de montrer que la dépendance en temps des modes croissants de chaque terme d'ordre n du développement perturbatif se comporte comme a^n et donc que l'on peut écrire,

$$\delta^{(n)}(\mathbf{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}_1}{(2\pi)^{3/2}}\delta(\mathbf{k}_1)\ldots\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}_n}{(2\pi)^{3/2}}\delta(\mathbf{k}_n)\, a^n\, F_n(\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n), \tag{4.81}$$

$$\theta^{(n)}(\mathbf{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}_1}{(2\pi)^{3/2}}\delta(\mathbf{k}_1)\ldots\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}_n}{(2\pi)^{3/2}}\delta(\mathbf{k}_n)\, a^n\, G_n(\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n). \tag{4.82}$$

Une conséquence importante de ces propriétés est que les solutions perturbatives, obtenues formellement à partir de développements par rapport à la densité initiale, sont en fait des développements par rapport à la *solution linéaire*.

Les fonctions F_n et G_n sont toutes les deux construites à partir des noyaux α et β. Elles sont en fait liées par des relations de récursivité qui découlent directement du système (4.77-4.78),

$$\begin{aligned} F_n(\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_n) &= \sum_{m=1}^{n-1} \frac{G_m(\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_m)}{(2n+3)(n-1)}\Big[-(2n+1)\alpha(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)F_{n-m}(\mathbf{q}_{m+1},\ldots,\mathbf{q}_n) \\ &\quad +2\beta(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)G_{n-m}(\mathbf{q}_{m+1},\ldots,\mathbf{q}_n)\Big], \end{aligned} \tag{4.83}$$

$$\begin{aligned} G_n(\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_n) &= \sum_{m=1}^{n-1} \frac{G_m(\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_m)}{(2n+3)(n-1)}\Big[3\alpha(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)F_{n-m}(\mathbf{q}_{m+1},\ldots,\mathbf{q}_n) \\ &\quad -2n\beta(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)G_{n-m}(\mathbf{q}_{m+1},\ldots,\mathbf{q}_n)\Big], \end{aligned} \tag{4.84}$$

où $\mathbf{k}_1 \equiv \mathbf{q}_1 + \ldots + \mathbf{q}_m$, $\mathbf{k}_2 \equiv \mathbf{q}_{m+1} + \ldots + \mathbf{q}_n$, $\mathbf{k} \equiv \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$, et $F_1 = -G_1 \equiv 1$.

Ainsi par exemple, pour n=2,

$$F_2 = \frac{5}{7} + \frac{1}{2}\frac{\mathbf{k}_1.\mathbf{k}_2}{k_1^2} + \frac{1}{2}\frac{\mathbf{k}_1.\mathbf{k}_2}{k_2^2} + \frac{2}{7}\frac{(\mathbf{k}_1.\mathbf{k}_2)^2}{k_1^2\,k_2^2}, \tag{4.85}$$

$$G_2 = -\left[\frac{3}{7} + \frac{1}{2}\frac{\mathbf{k}_1.\mathbf{k}_2}{k_1^2} + \frac{1}{2}\frac{\mathbf{k}_1.\mathbf{k}_2}{k_2^2} + \frac{4}{7}\frac{(\mathbf{k}_1.\mathbf{k}_2)^2}{k_1^2\,k_2^2}\right], \tag{4.86}$$

Conséquences observationnelles : le bispectre

On rappelle que le bispectre $B(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ est défini par,

$$\langle \delta(\mathbf{k}_1)\delta(\mathbf{k}_2)\delta(\mathbf{k}_3, \tau)\rangle_c = \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)\ B(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2),$$

compte tenue de l'invariance par translation des propriétés statistiques des champs. De la relation (4.89) et de l'expression de la densité en espace de Fourier il vient naturellement,

$$B(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = 2F_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)P(k_1)P(k_2) + \text{cyc.}. \tag{4.91}$$

Il est alors intéressant de définir le bispectre réduit par [105, 103]

$$Q \equiv \frac{B(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)}{P(k_1)P(k_2) + P(k_2)P(k_3) + P(k_3)P(k_1)}, \tag{4.92}$$

De manière équivalente on peut définir la fonction de corrélation à trois points dans l'espace réel. Elle se déduit directement du résultat obtenu en espace de Fourier mais prend une forme fonctionnelle plus complexe à cause de l'apparition d'opérateurs de différentiation

$$\begin{aligned}\xi_3(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) &= \Big[\frac{10}{7}\xi(x_{13})\xi(x_{23}) + \nabla\xi(x_{13})\cdot\nabla^{-1}\xi(x_{23}) \\ &+\nabla\xi(x_{23})\cdot\nabla^{-1}\xi(x_{13}) + \frac{4}{7}\Big(\nabla_a\nabla_b^{-1}\xi(x_{13})\Big)\Big(\nabla_a\nabla_b^{-1}\xi(x_{23})\Big)\Big] + \text{cyc.},\end{aligned} \tag{4.93}$$

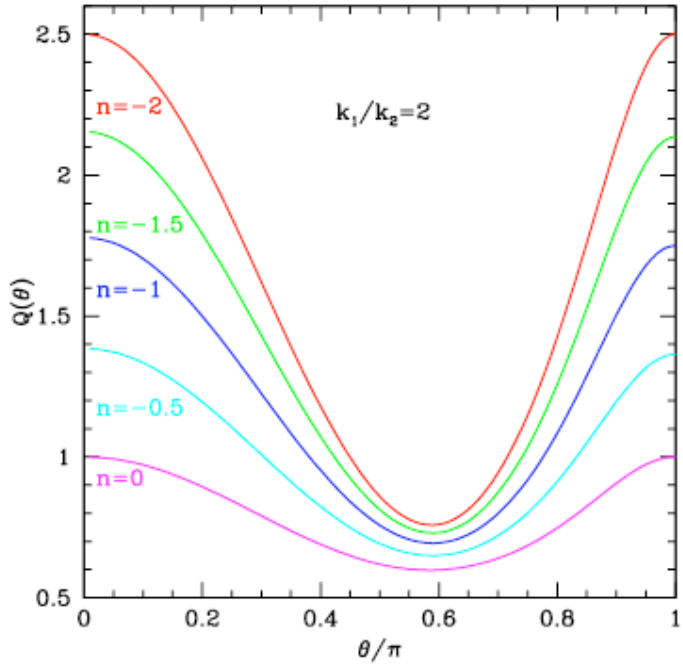


FIG. 4.8 – Bispectre réduit à l'ordre des arbres pour des configuration avec $k_1/k_2 = 2$ en fonction de l'angle θ ($\hat{k}_1 \cdot \hat{k}_2 = \cos\theta$). Les différentes courbes correspondent aux indices spectraux $n = -2, -1.5, -1, -0.5, 0$, de haut en bas. Figure tirée de [34].

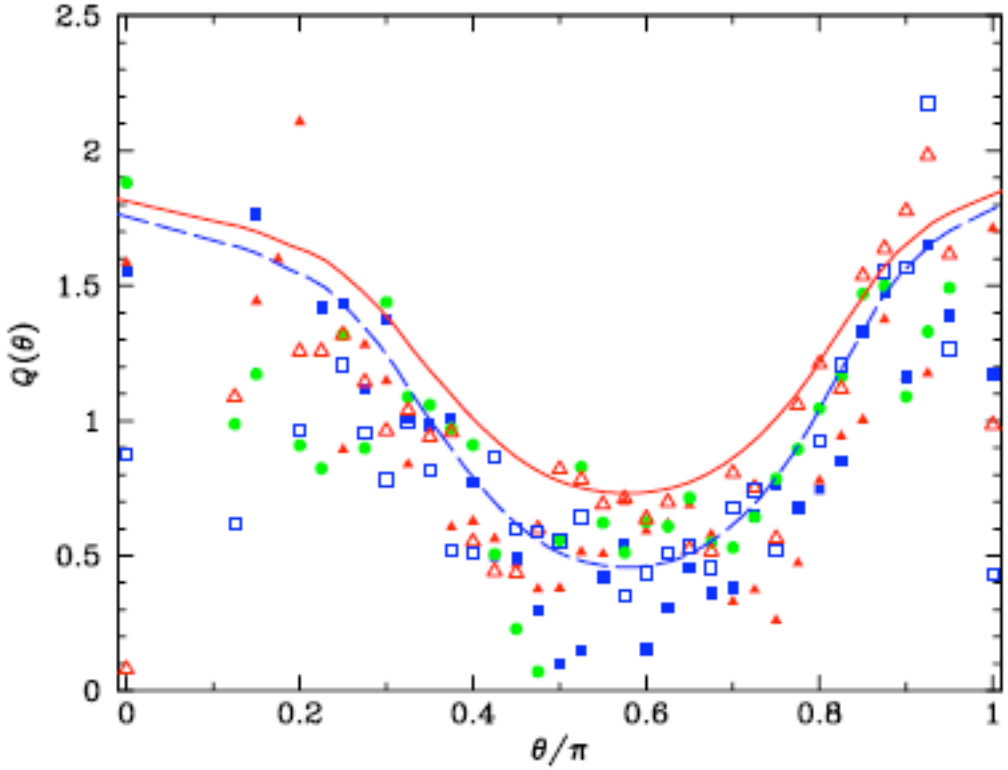


FIG. 5.13 – Le bispectre du catalogue PSCz pour des triangles avec $0.2 \leq k_1 \leq 0.4$ h/Mpc et avec deux cotés de rapport de longueur $k_2/k_1 = 0.4 - 0.6$ et séparés par un angle θ. Voir [95].

Couplages de modes dans l'univers primordial

NG primordiales en inflation standard

Maldacena 2002

La forme générale de l'action est la suivante (pour un couplage minimal)

$$S = \frac{1}{2}\int \sqrt{g}[R - (\nabla\phi)^2 - 2V(\phi)]$$

In order to proceed it is convenient to work in the ADM formalism. We write the metric as

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + h_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt) \tag{2.5}$$

and the action (2.1) becomes

$$S = \frac{1}{2}\int \sqrt{h}\left[NR^{(3)} - 2NV + N^{-1}(E_{ij}E^{ij} - E^2) + N^{-1}(\dot{\phi} - N^i\partial_i\phi)^2 - Nh^{ij}\partial_i\phi\partial_j\phi\right] \tag{2.6}$$

Where

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \frac{1}{2}(\dot{h}_{ij} - \nabla_i N_j - \nabla_j N_i) \\ E &= E^i_i \end{aligned} \tag{2.7}$$

Choix de jauge

$$\delta\phi = 0 \ , \qquad h_{ij} = e^{2\rho}[(1+2\zeta)\delta_{ij} + \gamma_{ij}] \ , \qquad \partial_i \gamma_{ij} = 0 \ , \qquad \gamma_{ii} = 0$$

The equation of motion for N^i and N are the the momentum and hamiltonian constraints

$$\begin{aligned} &\nabla_i[N^{-1}(E^i_j - \delta^i_j E)] = 0 \\ &R^{(3)} - 2V - N^{-2}(E_{ij}E^{ij} - E^2) - N^{-2}\dot{\phi}^2 = 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$N_1 = \frac{\dot{\zeta}}{\dot{\rho}} \ , \qquad N^i_T = 0 \ , \qquad \psi = -e^{-2\rho}\frac{\zeta}{\dot{\rho}} + \chi \ , \qquad \partial^2\chi = \frac{\dot{\phi}^2}{2\dot{\rho}^2}\dot{\zeta}$$

Action à l'ordre 2

$$S = \frac{1}{2}\int dt d^3x \frac{\dot{\phi}^2}{\dot{\rho}^2}[e^{3\rho}\dot{\zeta}^2 - e^{\rho}(\partial\zeta)^2]$$

Action à l'ordre 3

$$S_3 = \int e^{3\rho} \left(-\frac{\dot\phi}{4\dot\rho}\varphi\dot\varphi^2 - e^{-2\rho}\frac{\dot\phi}{4\dot\rho}\varphi(\partial\varphi)^2 - \dot\varphi\partial_i\chi\partial_i\varphi + \right.$$
$$+ \frac{3\dot\phi^3}{8\dot\rho}\varphi^3 - \frac{\dot\phi^5}{16\dot\rho^3}\varphi^3 - \frac{\dot\phi V''}{4\dot\rho}\varphi^3 - \frac{V'''}{6}\varphi^3 + \frac{\dot\phi^3}{4\dot\rho^2}\varphi^2\dot\varphi + \frac{\dot\phi^2}{4\dot\rho}\varphi^2\partial^2\chi$$
$$\left. + \frac{\dot\phi}{4\dot\rho}(-\varphi\partial_i\partial_j\chi\partial_i\partial_j\chi + \varphi\partial^2\chi\partial^2\chi) \right)$$

ou encore...

$$S_3 = \int \frac{1}{4}\frac{\dot\phi^4}{\dot\rho^4}[e^{3\rho}\dot\zeta^2\zeta + e^{\rho}(\partial\zeta)^2\zeta] - \frac{\dot\phi^2}{\dot\rho^2}e^{3\rho}\dot\zeta\partial_i\chi\partial_i\zeta +$$
$$- \frac{1}{16}\frac{\dot\phi^6}{\dot\rho^6}e^{3\rho}\dot\zeta^2\zeta + \frac{\dot\phi^2}{\dot\rho^2}e^{3\rho}\dot\zeta\zeta^2\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\frac{\ddot\phi}{\dot\phi\dot\rho} + \frac{1}{4}\frac{\dot\phi^2}{\dot\rho^2}\right] + \frac{1}{4}\frac{\dot\phi^2}{\dot\rho^2}e^{3\rho}\partial_i\partial_j\chi\partial_i\partial_j\chi\zeta$$
$$+ f(\zeta)\left.\frac{\delta L}{\delta\zeta}\right|_1$$

$$\epsilon \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{M_{pl}V'}{V}\right)^2 \sim \frac{1}{2}\frac{\dot\phi^2}{\dot\rho^2}\frac{1}{M_{pl}^2} \qquad \partial^2\chi = \frac{\dot\phi^2}{2\dot\rho^2}\dot\zeta$$

La fonction à trois points résultante

After adding the contribution of the field redefinitions we get the final result for the three point function

$$\langle \zeta_{\vec{k}_1} \zeta_{\vec{k}_2} \zeta_{\vec{k}_3} \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\sum \vec{k}_i) \frac{\dot{\rho}_*^4}{\dot{\phi}_*^4} \frac{H_*^4}{M_{pl}^4} \frac{1}{\prod_i (2k_i^3)} \mathcal{A}_* \tag{4.5}$$

where the star indicates evaluation at horizon crossing and

$$\mathcal{A} = 2\frac{\ddot{\phi}_*}{\dot{\phi}_* \dot{\rho}_*} \sum_i k_i^3 + \frac{\dot{\phi}_*^2}{\dot{\rho}_*^2} \left[\frac{1}{2} \sum_i k_i^3 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} k_i k_j^2 + 4 \frac{\sum_{i>j} k_i^2 k_j^2}{k_t} \right] \tag{4.6}$$

$$\epsilon \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{M_{pl} V'}{V} \right)^2 \sim \frac{1}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{\dot{\rho}^2} \frac{1}{M_{pl}^2} \qquad \eta \equiv \frac{M_{pl}^2 V''}{V} \sim -\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\rho}\dot{\phi}} + \frac{1}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{\dot{\rho}^2} \frac{1}{M_{pl}^2}$$

Note $\langle \zeta_{\vec{k}}(t) \zeta_{\vec{k}'}(t) \rangle \sim (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} + \vec{k}') \frac{1}{2k^3} \frac{\dot{\rho}_*^2}{M_{pl}^2} \frac{\dot{\rho}_*^2}{\dot{\phi}_*^2}$

$$\Longrightarrow \quad \zeta_{\vec{k}}^{(2)} \sim \epsilon \, \zeta_{\vec{k}_1}^{(1)} \zeta_{\vec{k}_2}^{(1)}$$

Conséquences :

- Non-Gaussianités attendues en inflation standard sont très faibles
- Il est nécessaire de faire le calcul complet des NG pendant la phase de recombinaison
- Amplitude des NG attendues : $\Phi \sim \Phi^2$ au moins

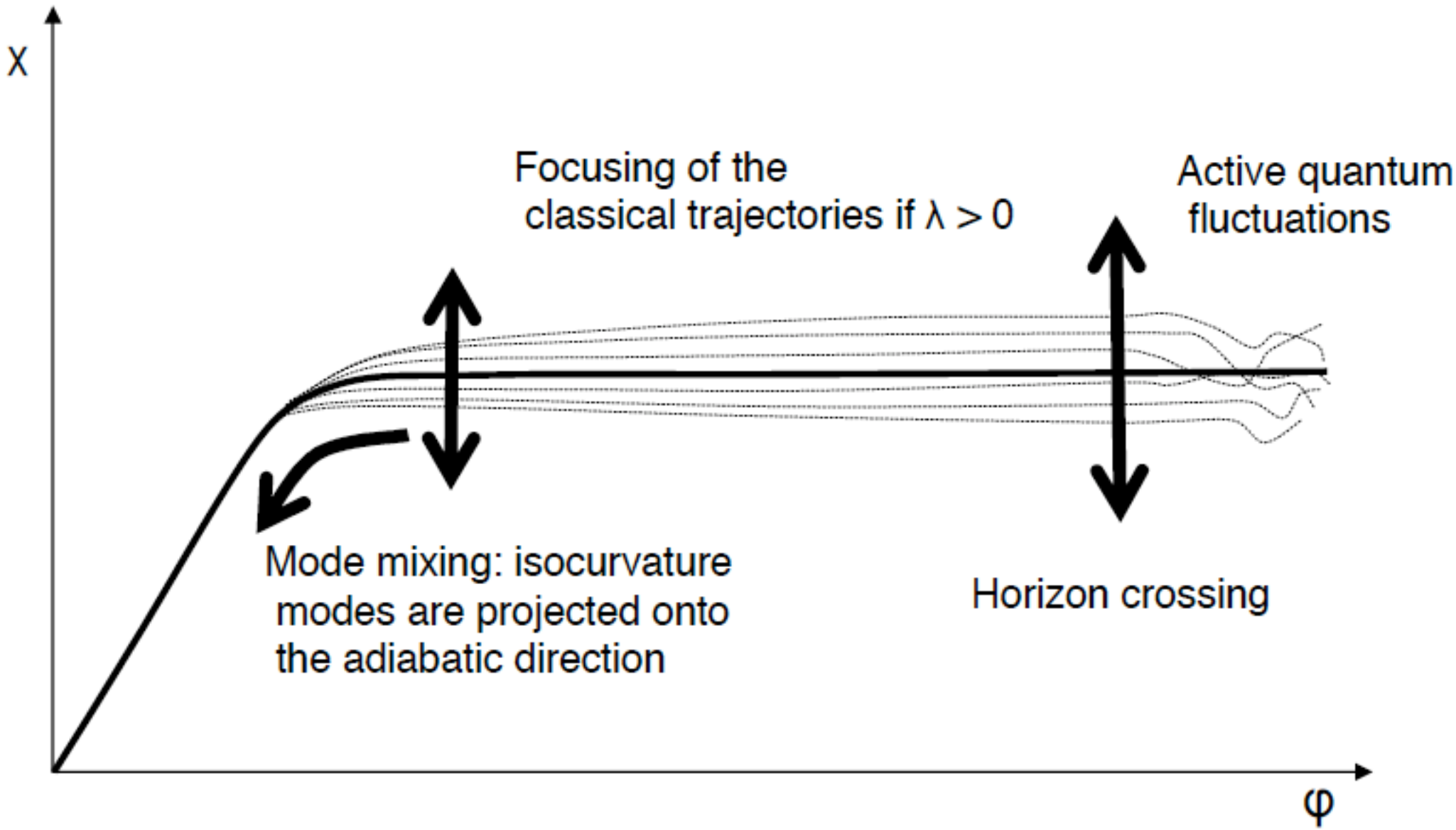
Inflations multi-champ

conséquences possibles de l'existence de fluctuations isocourbes

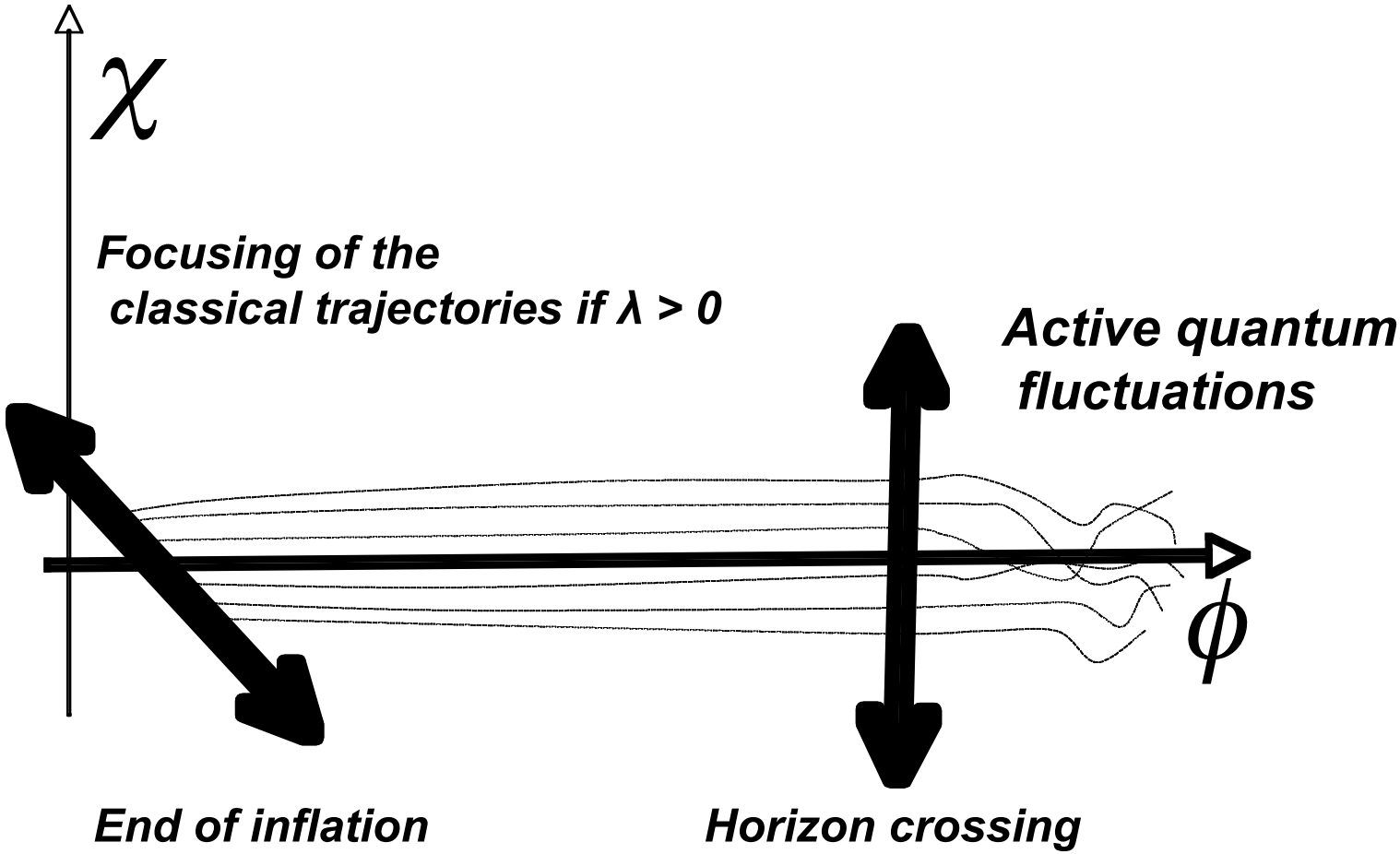
Transfert de modes ?

- pendant la phase inflationnaire
- à la fin de la phase inflationnaire
- après la phase inflationnaire

Transfert de modes pendant la phase inflationnaire : image des univers séparés



ou encore à la fin de
l'inflation...



Après la phase inflationnaire : le curvaton

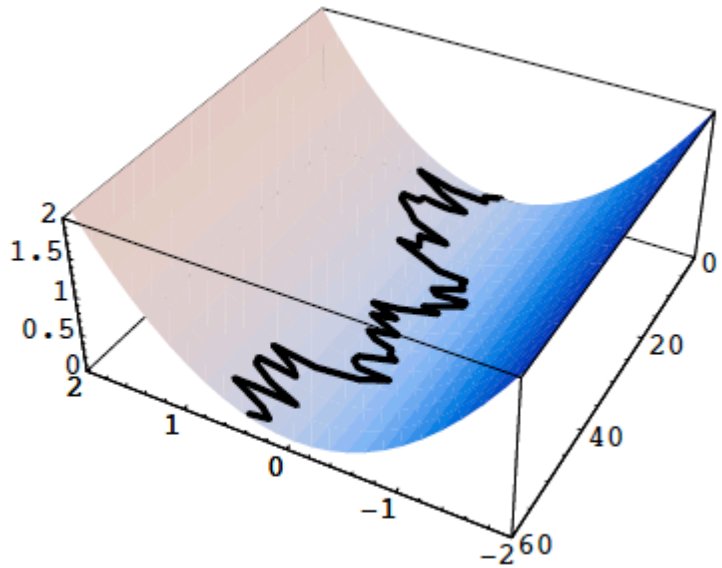
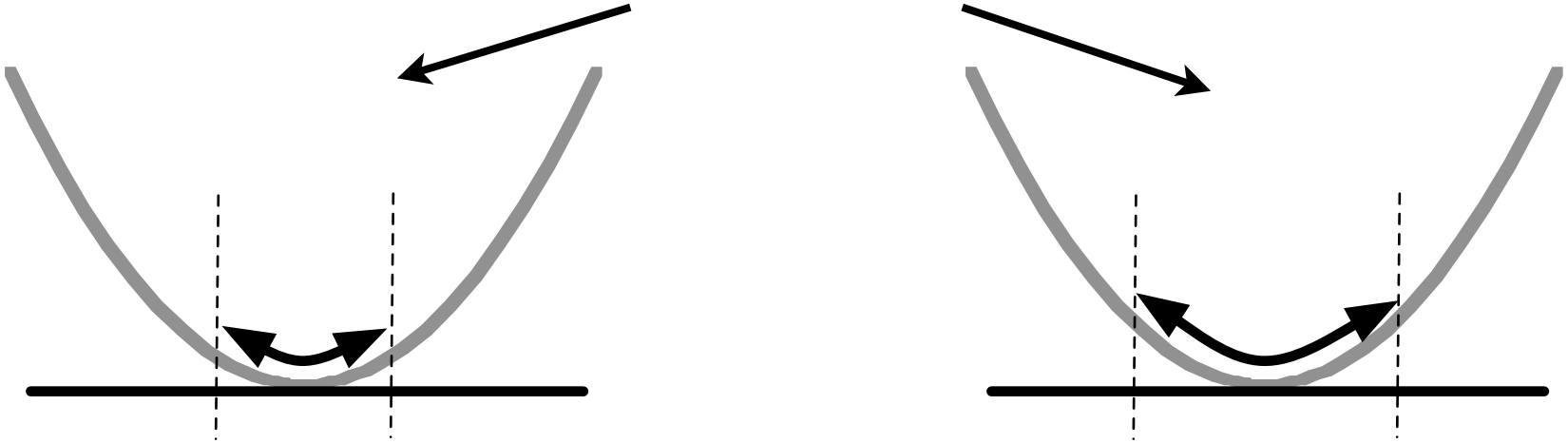


FIG. 8.14 – Illustration du comportement de χ_H suivant l'équation de Langevin (8.145). La valeur du champ se comporte comme une marche aléatoire, avec pas indépendants, mais dont les excursions sont limitées par le potentiel au fond duquel évolue le marcheur. Pour un champ de masse nul, les excursions ne sont pas bornées et la largeur de la distribution des excursions croît indéfiniment.

Univers séparés



Un modèle explicite d'inflation multichamp

Brunier, FB '07

Inflation with global susy : F- and D-term hybrid models

- SUSY model from F-term (Dvali, Shafi Schaefer '94)

Superpotential: $$W = -\lambda \mu^2 S + \lambda S \Phi_+ \Phi_-$$

mass parameter

Dimensionless parameter

Chiral superfields

- SUSY model from D-term with nonzero g and ξ (Binétruy et Dvali '96)

Superpotential: $$W = \lambda S \Phi_+ \Phi_-$$

Dimensionless parameter

Chiral superfield with no charge

Superfields with charges +1 and -1

More fields in the superpotential…

- What is happening if field content is extended ?

$$W = -\mu_i^2 S_i + \nu_i S_i^3 + \lambda_j \left(\alpha_i S_i\right)\left(\overline{\Phi}_j \Phi_j\right)$$

with only cubic terms

- Interesting cases are (in context of D-term inflation)
  - $W = \lambda S \overline{\Phi} \Phi + \mu^2 C$ curvaton model
  - $W = \nu_i S_i^3 + \lambda \left(\alpha_i S_i\right) \overline{\Phi} \Phi$ multiple-field inflation

The resulting effective potential

- Model: 2-field inflation,

  $\nu_1 \approx 0$, $\nu_2 \ll 1$ (and $\nu_2 \gg \lambda^2$)

- the effective potential is then the following,

$$V = V_{\text{1-loop}} + \nu_2^2 |\mathcal{S}_2|^4 + \lambda^2 \left|\cos\theta \mathcal{S}_1 + \sin\theta \mathcal{S}_2\right|^2 |\overline{\phi}|^2 + \frac{g^2}{2}\left(-|\overline{\phi}|^2 + \xi\right)^2$$

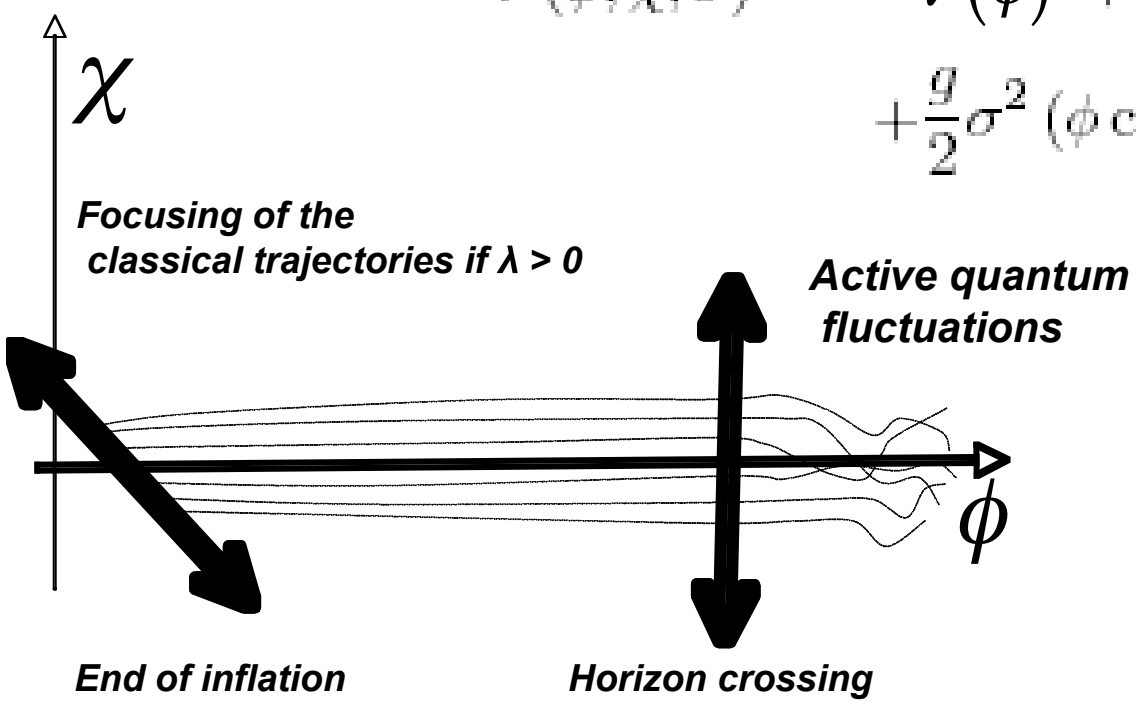
We are left with a model of the form *(FB & Uzan '03)*

The inflaton

A light transverse field

A massive transverse field that eventually undergoes a phase transition

$$V(\phi,\chi,\sigma) = V(\phi) + \frac{\lambda}{4!}\chi^4 + \frac{\mu}{2}\left(\sigma^2 - \sigma_0^2\right)^2 + \frac{g}{2}\sigma^2\left(\phi\cos\alpha + \chi\sin\alpha\right)^2$$



Inflationary period stops at a time that depends on both the φ and χ values

Mode transfers, δN formalism

- At linear order:

$$\delta N = -\left.\frac{3H^2}{V_{,\varphi}}\right|_{\text{Horizon crossing}} \delta\varphi + \left.\frac{3H^2}{V_{,\varphi}}\right|_{\text{end of inflation}} \tan\theta\, \delta\chi_1$$

Standard adiabatic fluctuations

Transfer of isocurvature modes

evolution of statistical properties of these modes ?

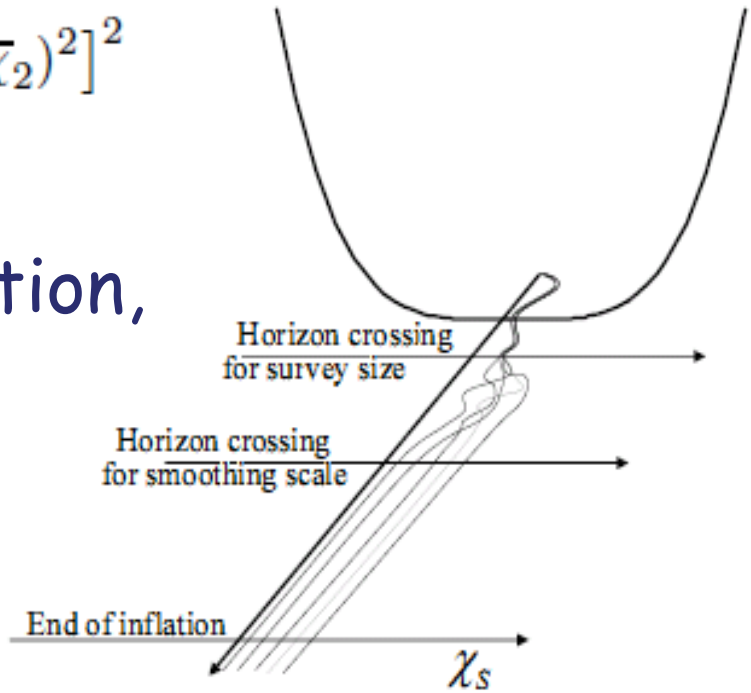
Finite volume effect: an effective potential

- Super-Hubble modes cannot be observed = extra parameters

$$V(\chi_1, \chi_2) = \frac{\nu^2}{4}\left[(\chi_1 + \overline{\chi}_1)^2 + (\chi_2 + \overline{\chi}_2)^2\right]^2$$

- From Fokker-Planck equation,

$$\mathcal{P}(\overline{\chi}_1, \overline{\chi}_2) = \frac{\sqrt{2}\nu}{H^2\sqrt{3\pi}} \exp\left[-\frac{2\pi^2\nu^2\left(\overline{\chi}_1^2 + \overline{\chi}_2^2\right)^2}{3H^4}\right]$$



The three- and four-point functions

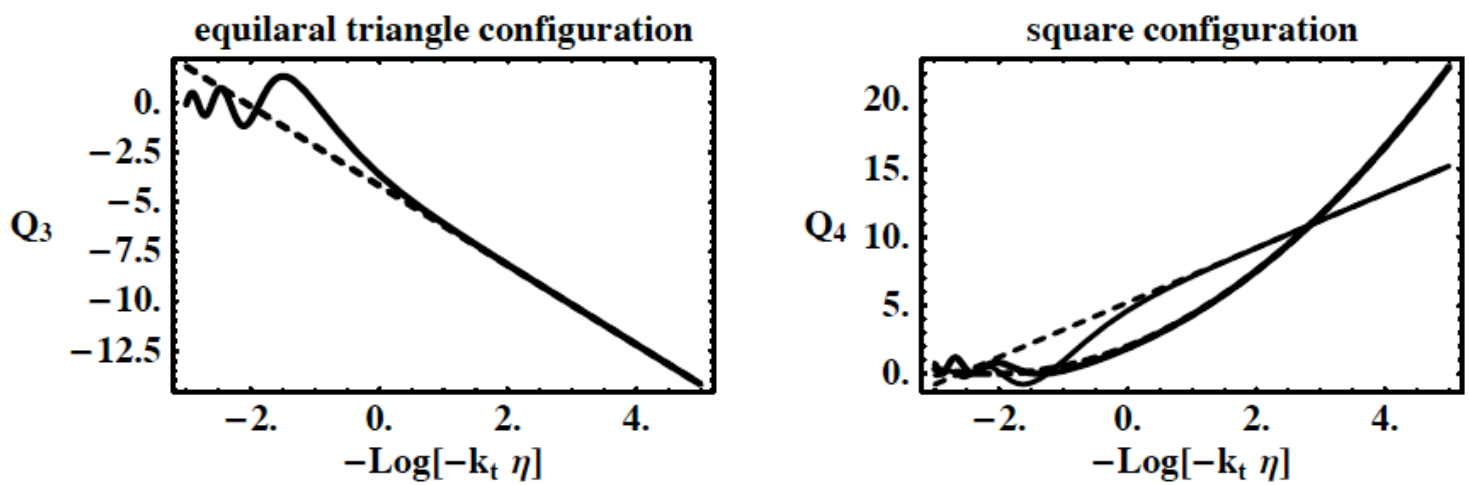


FIG. 5: Behavior of the reduced correlateors, Q_3 and Q_4 of the field χ_1, as a function of $N_e \equiv \log(k_t\eta)$. The function Q_3 (left panel) is to be multiplied by $\nu^2\overline{\chi}_1/H^2$; the function $Q_4^{\rm star}$ (thick lines of right panel) is to be multiplied by $-\nu^2/H^2$ and the function $Q_4^{\rm line}$ (thin lines) is to be multiplied by $2\nu^4(9\overline{\chi}_1^2+\overline{\chi}_2^2)/H^4$. The dashed lines correspond to the corresponding asymptotic behahiors.

Consequences : Bispectrum and trispectrum

- Definition : $\langle \sigma(\mathbf{k}_1) \ldots \sigma(\mathbf{k}_n) \rangle_c \;=\; \delta_{\mathrm{Dirac}}(\mathbf{k}_1 + \cdots + \mathbf{k}_n) P_n^{\sigma}$

- $P_3^{\delta N}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = 2 f_{\mathrm{NL}} \left[P(k_1) P(k_2) + \mathrm{sym.} \right]$

$$f_{\mathrm{NL}} = -\nu^2 N_e \frac{\overline{\chi}_1}{H} \frac{\sin^3\theta}{2\mathcal{P}_0}$$

$\sim 10^{-4}$

This is to be contrasted with generic inflation : f_{NL} is of order unity

- $$P_4^{\delta N}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_4) = 4 f_{\mathrm{NL}}^2 \left(\frac{9\overline{\chi}_1^2 + \overline{\chi}_2^2}{9\overline{\chi}_1^2 \sin^2\theta} \right) \left[P(k_1) P(|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|) P(k_3) + \mathrm{sym.} \right] + 6 g_{\mathrm{NL}} \left[P(k_1) P(k_2) P(k_3) + \mathrm{sym.} \right]$$

$$g_{\mathrm{NL}} = -\nu^2 N_e \frac{\sin^4\theta}{12\mathcal{P}_0^2}$$

Conséquences observationnelles

$$B_{\ell_1\ell_2\ell_3} = \sum_{m_1,m_2,m_3} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} a_{\ell_1 m_1} a_{\ell_2 m_2} a_{\ell_3 m_3}$$

$$\langle B_{\ell_1\ell_2\ell_3} \rangle_c = \sqrt{\frac{(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)(2\ell_3+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} b_{\ell_1\ell_2\ell_3}$$

$$\tilde{b}_{\ell_1,\ell_2,\ell_3} = \nu_2^{-1} \frac{b_{\ell_1,\ell_2,\ell_3}}{C_{\ell_1}C_{\ell_2} + C_{\ell_2}C_{\ell_3} + C_{\ell_3}C_{\ell_1}}$$

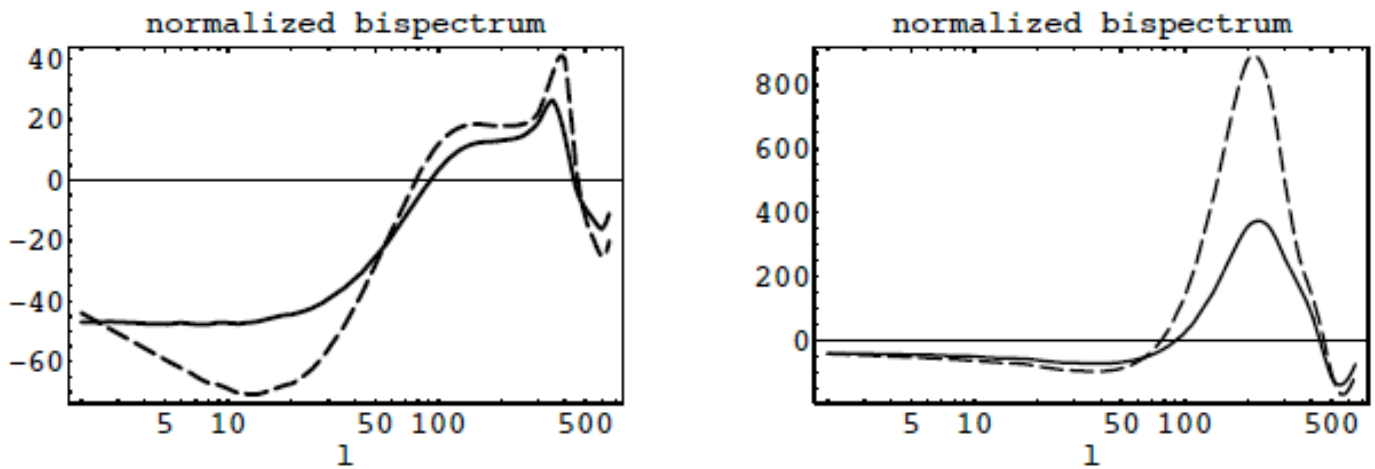


FIG. 4: Left panel: normalized bispectrum for an equilateral configuration $\tilde{b}_{\ell,\ell,\ell}$ in a ΛCDM model (dashed line) and a sCDM model (solid line). The integrated Sachs Wolfe effect prevents the formation of a plateau at low ℓ in a ΛCDM model. Both curves exhibit acoustic oscillations of roughly the same amplitude although acoutic pics seem to be larger in a ΛCDM model. Right panel: $\ell^2(\ell+1)^2 b_{\ell,\ell,\ell}$ in a ΛCDM model (dashed line) and a sCDM model (solid line). The amplitude of the bispectrum is greater in a ΛCDM model. Comparison between the two plots shows that the second peak ($\ell \sim 300$) in $\tilde{b}_{\ell,\ell,\ell}$ is only due to the minimum of the C_ℓ's.

Contraintes observationnelles

Exclusion diagrams (FB, Brunier '07)

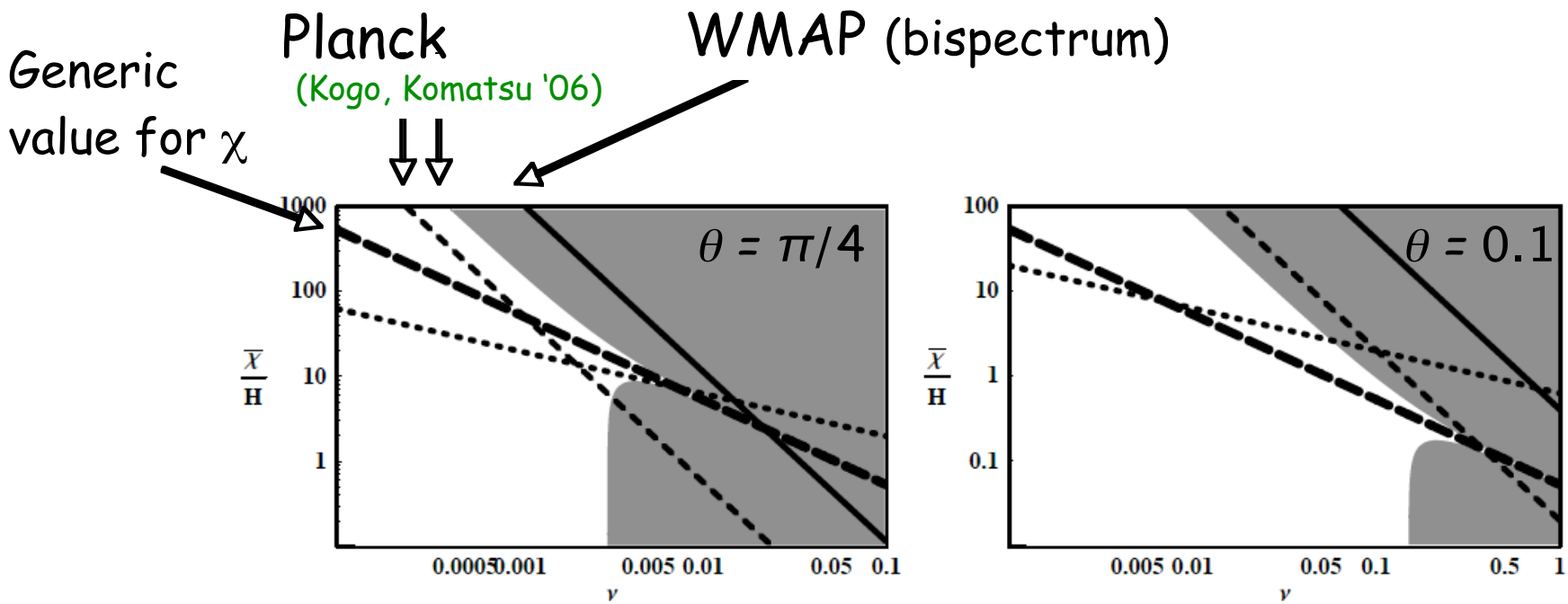


FIG. 3: Exclusion diagrams for parameters ν and $\overline{\chi}$ for $\theta = \pi/4$ (left panel) and for $\theta = 0.1$ (right panel). The locations of the dotted lines where $\overline{\chi}$ is equal to its expected one σ fluctuation. The gray areas and solid or short dashed lines correspond to the exclusion zones, obtained by WMAP (solid line) or expected by Planck (short dashed for bispectrum, gray areas for tri-spectrum). The bispectrum constraint corresponds to a straight line (of slope -2); the trispectrum is more complicated due to two competing terms in the trispectrum. The long dashed is the location where the terms cancel. We adopted the results of [29] on the upperbounds the Planck mission is expected to provide, $f_{\rm NL} = 5$ and $\tau_{\rm NL} = 560$.