

# Introduction à la théorie statistique des champs et au groupe de renormalisation

François David

Service de Physique Théorique\* - CEA-Saclay  
91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France

13 novembre 2006

## Résumé

Notes de cours pour la deuxième école de physique théorique de Jijel 2006, «Théorie quantique des champs : méthodes et applications», 28 mai - 01 juin 2006, Université de Jijel, Algérie.

Ce cours est une introduction à la théorie du groupe de renormalisation en physique statistique et à ses relations avec les théories quantiques des champs. Après un rappel sur les phénomènes critiques et la théorie de Landau, l'accent est mis sur la formulation de Wilson du groupe de renormalisation, et le lien avec la théorie perturbative est illustré dans l'approximation du potentiel local.

## Abstract

Lecture notes of the second theoretical physics school "Jijel 2006", "*Quantum Field Theory: methods and applications*", May 28 - June 1, 2006, Jijel University, Algeria.

These lecture notes are an introduction to renormalization group theory in statistical physics and to its links with quantum field theories. After a short presentation of critical phenomena and Landau theory, we insist on the Wilson formulation of renormalization group. The relationship with perturbative field theory is illustrated using the example of the local potential approximation.

## 1 Introduction

### 1.1 Présentation du cours

Ce cours est une brève introduction à la théorie statistique des champs et au groupe de renormalisation. Le développement du concept du groupe de renormalisation en

---

\*Direction des Sciences de la Matière et URA 2306 CNRS

théorie quantique des champs et ses applications à la physique statistique à partir des années 70 ont profondément bouleversé la physique.

En physique des hautes énergies le groupe de renormalisation a permis de vraiment comprendre pourquoi le formalisme de la théorie quantique des champs était la bonne approche pour construire la théorie des interactions fondamentales (au moins en deçà de l'échelle de Planck). En particulier il a permis de comprendre qu'une théorie quantique dépend de l'échelle d'énergie (ou de la résolution spatiale et temporelle) des phénomènes qu'elle cherche à décrire, et pourquoi ce sont des théories renormalisables comme les théories de jauge qui doivent émerger comme théories quantique cohérentes. En outre le groupe de renormalisation a fourni un cadre pour formuler et étudier les théories quantiques des champs au delà de la théorie des perturbations. L'accent mis sur le rôle des transformations d'échelle était aussi un prélude au développement des théories conformes et des théories des cordes dans les décennies suivantes.

En physique statistique le groupe de renormalisation a fourni un nouveau cadre conceptuel pour appréhender de nombreux phénomènes dans de vastes classes de systèmes physiques. Outre la pleine compréhension des comportements critiques, des lois d'échelle et de leur universalité dans les transitions de phases continues, il fournit le bon langage pour caractériser un système physique et isoler les degrés de liberté physiquement relevant en fonction de l'échelle de distance ou d'énergie considérée, et il permet de comprendre comment des théories quantiques des champs émergent comme théories effectives à basse énergie. Ces idées se sont révélés rapidement fructueuses non seulement pour les transitions de phase en mécanique statistique, mais aussi en physique de la matière mal condensée (cristaux liquides, systèmes colloïdaux, polymères et membranes), en physique des systèmes désordonnés (systèmes avec désordre, verres structuraux, verres de spin, etc.), dans les systèmes où les effets quantiques sont importants (supraconducteurs et superfluides, chaînes de spins, fermions fortement corrélés, effet Hall quantique, etc.). Le groupe de renormalisation et les outils de théorie des champs sont aussi des ingrédients importants pour l'étude des systèmes hors d'équilibre, des systèmes dynamiques, de la turbulence, etc.

Ce cours ne prétend pas donner une vision complète, même au niveau introductif, du groupe de renormalisation. Je vais essayer d'introduire les idées essentielles à partir d'exemples classiques, et de calculs simples (en passant sur beaucoup de détails et sur la rigueur mathématique). En particulier, je vais surtout traiter le cas simple et classique du modèle d'Ising et de la théorie de champs associée, mais en insistant sur les aspects globaux et non-perturbatifs du groupe de renormalisation plutôt que sur les aspects techniques et la formulation perturbative de la théorie de la renormalisation. Ces aspects sont néanmoins très importants, à la fois pour vraiment comprendre le formalisme et d'un point de vue historique.

Je vais supposer que les auditeurs ont déjà une certaine connaissance de la formulation de la mécanique quantique par l'intégrale de chemin de Feynman et de la théorie des phénomènes critiques (je donne des bases au début de ces notes pour aller

assez rapidement au formalisme de la renormalisation).

Ces notes sont issues d'une partie du cours du Master deuxième année de Physique Théorique donné à l'Ecole Normale Supérieure à Paris.

Enfin je tiens à remercier les organisateurs de l'école *Jijel 2006* pour leur accueil très chaleureux et leur organisation exemplaire, et tous les participants pour leur curiosité et leurs questions, qui ont rendu cette école très vivante.

## 1.2 Bibliographie sommaire :

Il y a beaucoup de bons livres sur le sujet. Je donne ici quelques ouvrages plutôt introductifs sur le sujet du cours ou ses présupposés.

1. Livres en français
  - M. Le Bellac, *Des phénomènes critiques aux champs de jauge*, EDP-Sciences / Editions du CNRS.
  - C. Itzykson et J.-M. Drouffe, *Théorie statistique des champs*, EDP-Sciences / Editions du CNRS (Physique théorique / Savoirs Actuels).
  - J. Zinn-Justin, *Intégrale de chemin en mécanique quantique : introduction*, EDP-Science / CNRS-Editions.
2. Livres en anglais
  - J. Zinn-Justin, *Quantum field theory and critical phenomena*, Oxford Science Publications.
  - G. Parisi, *Statistical Field Theory* Perseus, Reading, MA, 1998.
  - J. Cardy, *Scaling and renormalization in statistical physics*, Cambridge Lecture Notes in Physics 96.
  - J.-M. Drouffe & C. Itzykson, *Statistical Field Theory*, Cambridge University Press (2 Volumes).
  - M. Le Bellac, *Quantum and Statistical Field Theory*, Oxford University Press.
  - L. P. Kadanoff, *Statistical Physics Statics, Dynamics and Renormalization*, World Scientific (2000).
  - P. Pfeuty and G. Toulouse, *Introduction to the Renormalisation Group of Critical Phenomena* Wiley (1977).
  - D. Amit, *Field theory, the renormalization group and critical phenomena*, World Scientific.
  - A. Zee, *QFT in a nutshell*, Princeton University Press (2003).
  - P. M. Chaikin & T. C. Lubensky, *Principles of Condensed Matter Physics*, Cambridge University Press (1995).
  - D. Nelson, *Defects and Geometry in Condensed Matter Physics*, Cambridge University Press (2002).
  - Alexei M. Tsvelik, *Quantum Field Theory in Condensed Matter Physics*, Cambridge University Press, 1995.
  - E. Fradkin, *Field Theories of Condensed Matter Systems*, Addison-Wesley (1991).

3. Et des articles de revue (intéressants aussi pour l'historique)
  - K. G. Wilson, *The Renormalization Group and the Critical Phenomena* (Nobel Address), Rev. Mod. Phys., 55, 583 (1983),
  - M. E. Fisher, *Renormalization group theory : Its basis and formulation in statistical physics*, Rev. Mod. Phys. 70, 653-681 (1998)

## 2 Brève introduction aux phénomènes critiques : exposants critiques, lois d'échelle et universalité

Un exemple classique de phénomène critique est la transition de phase ferromagnétique-paramagnétique au point de Curie dans les matériaux magnétiques. Je renvoie aux manuels de physique statistique et de physique de la matière condensée pour une présentation précise du sujet. Je ne vais considérer ici que des situations très idéalisées où l'on peut décrire la physique de la transition par des modèles simples, mais qui permettent d'appréhender l'essence de la physique sous-jacente.

### 2.1 Transition ferro-paramagnétique et point critique

Dans ces matériaux, à basse température il existe une aimantation spontanée globale  $\mathcal{M}_0$ , c'est à dire que dans des domaines de taille macroscopique (très grande devant la maille élémentaire du cristal) l'aimantation est homogène et non nulle. La physique des domaines d'aimantation et des parois de domaine est riche et complexe mais nous allons simplifier énormément les choses en nous intéressant à ce qui se passe dans un domaine. Nous allons de plus considérer un ferromagnétique uniaxe, c'est à dire un matériau très anisotrope tel que l'aimantation spontanée ne peut s'orienter que selon un axe.

Pour sélectionner l'aimantation spontanée  $\mathcal{M}_0$  on applique au matériau un champ magnétique externe  $B$ , auquel cas il apparaît une aimantation induite  $\mathcal{M}$  (du même signe que  $B$ ). A basse température (matériau ferromagnétique) lorsque l'on fait tendre  $B$  vers 0 l'aimantation tend vers  $\pm\mathcal{M}_0$  (l'aimantation spontanée) suivant le signe de  $B$ . A  $B = 0$ , l'aimantation est discontinue, puisqu'elle saute de  $+\mathcal{M}_0$  à  $-\mathcal{M}_0$  (transition du premier ordre). Par contre à haute température le matériau devient paramagnétique : l'aimantation spontanée en champ nul est nulle et l'aimantation  $\mathcal{M}$  varie continument avec  $B$  quand  $B$  change de signe.

Dans les cas qui nous intéressent la transition entre la phase ferromagnétique (basse température) et la phase paramagnétique (haute température) est une transition de phase continue (transition du deuxième ordre). A la température critique (température de Curie)  $T_c$  l'aimantation spontanée  $\mathcal{M}$  s'annule continument.

Les diagramme de phase Température-Aimantation et Température-Champ magnétique ont l'allure suivante

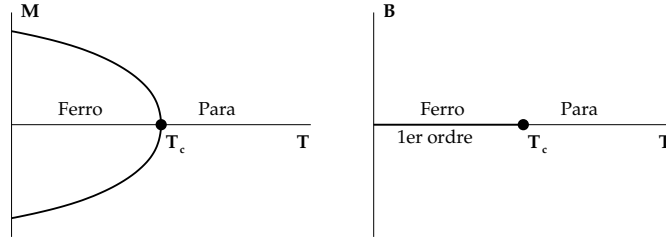


FIG. 1 – Diagramme de phase température/aimantation (a) et température/champ (b).

## 2.2 Paramètre d'ordre et brisure de symétrie

La caractéristique principale du point critique est qu'il sépare deux phases thermodynamiques où la symétrie du matériau est réalisée d'une façon différente. Dans un magnétique uniaxe le matériau doit être au niveau microscopique invariant sous un changement de signe de l'aimantation.

Dans la phase paramagnétique ( $T > T_c$ ) cette symétrie est satisfaite. En effet le système est dans une seule phase thermodynamiquement stable, telle que sous une réflexion l'aimantation spontanée reste inchangée puisque  $\mathcal{M} \rightarrow -\mathcal{M} = 0 = \mathcal{M}$ . Par contre dans la phase ferromagnétique ( $T < T_c$ ) cette symétrie est dite *spontanément brisée*. En effet le système possède maintenant deux phases thermodynamiques stables distinctes : celle d'aimantation positive  $\mathcal{M}$  et celle d'aimantation opposée  $-\mathcal{M}$ . Sous une réflexion les deux phases s'interchangent. L'aimantation spontanée  $\mathcal{M}$  est le *paramètre d'ordre de la transition*.

## 2.3 Singularités au point critique et exposants critiques

La première caractéristique d'une transition continue est que les quantités thermodynamiques du système se comportent de façon continue mais singulière à la transition. Le point critique apparaît mathématiquement comme une singularité dans le diagramme de phase, caractérisée par des exposants critiques.

Pour notre système les deux quantités thermodynamiques sont l'*énergie interne par unité de volume*  $E_v$  et l'*aimantation moyenne*  $\mathcal{M}$ . Ces deux quantités s'obtiennent à partir de l'énergie libre  $F$ , fonction de la température  $T$  et du champ magnétique appliqué  $B$ , comme

$$E_v = \frac{E}{\mathcal{V}} = -\frac{T^2}{\mathcal{V}} \frac{\partial F}{\partial T} \frac{1}{T}, \quad \mathcal{M} = \frac{1}{\mathcal{V}} \frac{\partial F}{\partial B}, \quad (1)$$

où  $\mathcal{V}$  est le volume du système. Si la transition est continue et de deuxième ordre  $E_v$  et  $\mathcal{M}$  sont continues au point critique  $(T, B) = (T_c, 0)$ . Par contre on constate expérimentalement que leurs dérivés, la *chaleur spécifique par unité de volume*  $C_v$  et

la susceptibilité magnétique  $\chi$

$$C_v = \frac{\partial E_v}{\partial T} \quad , \quad \chi = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial B} \quad , \quad (2)$$

divergent au point critique. La divergence de ces quantités est algébrique, c'est à dire

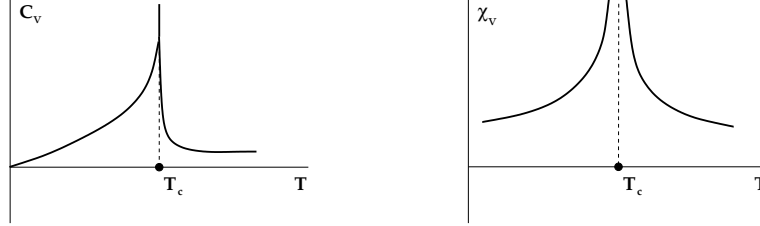


FIG. 2 – Divergences de la chaleur spécifique  $C_v$  et de la susceptibilité magnétique  $\chi$  au point critique

donnée par des lois de puissance caractérisées par des *exposants critiques* (appelés aussi indices critiques). Les singularités de  $C_v$  et  $\chi$  définissent quatre exposants critiques, notés dans la littérature  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$ . Les trois premiers se réfèrent au comportement du système en champ nul ( $B = 0$ ) quand  $T \rightarrow T_c$ .

$$C_v(T) \propto |T - T_c|^{-\alpha} \quad (3)$$

$$\mathcal{M}(T) \propto |T - T_c|^\beta \quad (4)$$

$$\chi(T) \propto |T - T_c|^{-\gamma} \quad (5)$$

L'exposant  $\delta$  se réfère au comportement de l'aimantation en fonction du champ à la température critique

$$\mathcal{M}(T_c, B) \propto |B|^{\frac{1}{\delta}} \quad (6)$$

En anticipant sur la suite, la théorie simple du champ moléculaire (Curie-Weiss) ou du champ moyen prédit pour ces exposants les valeurs

$$\alpha = 0 \quad , \quad \beta = 1/2 \quad , \quad \gamma = 1 \quad , \quad \delta = 3 \quad (7)$$

## 2.4 Corrélations et fluctuations au point critique, longueur de corrélation et exposants associés

La seconde caractéristique très importante d'une transition continue est qu'il existe dans le système des fluctuations thermodynamiques très importantes et sur de grandes échelles spatiale et temporelle. L'existence de singularités dans les quantités thermodynamique est en fait la conséquence de ces *fluctuations critiques*.

**Corrélations :** Pour mesurer ces fluctuations il faut considérer les corrélations entre quantités thermodynamiques locales du système. On définit donc l'aimantation locale  $m(x)$  au point  $x$  comme la moyenne spatiale de l'aimantation sur un petit domaine autour de  $x$ , domaine très petit devant la taille de l'échantillon, mais qui est bien sûr plus grand que la distance interatomique. L'aimantation globale par unité de volume  $\mathcal{M}$  est donnée par la valeur moyenne de la moyenne spatiale de  $m(x)$

$$\mathcal{M} = \frac{1}{V} \langle \int dx m(x) \rangle = \langle m \rangle \quad (8)$$

où  $\langle \dots \rangle$  désigne la moyenne thermodynamique (voir plus loin les rappels de mécanique statistique).

L'aimantation locale  $m$  fluctue localement autour de sa valeur moyenne  $\langle m \rangle$ . La fonction de corrélation spatiale de l'écart  $\Delta m(x) = m(x) - \mathcal{M} = m(x) - \langle m(x) \rangle$  en deux points différents

$$G(x, y) = \langle \Delta m(x) \Delta m(y) \rangle = \langle m(x) m(y) \rangle - \langle m(x) \rangle \langle m(y) \rangle \quad (9)$$

est la fonction de corrélation connexe<sup>1</sup> à deux points.  $G(x, x)$  mesure l'amplitude des fluctuations de  $m$  autour de sa valeur moyenne au point  $x$ .  $G(x, y)$  mesure les corrélations entre les fluctuations de  $m$  aux points  $x$  et  $y$ . En pratique dans des matériaux magnétiques cette fonction de corrélation est accessible par des expériences de diffusion de neutrons ou de rayons X.

**Longueur de corrélation :** De façon générale à grande distance cette fonction de corrélation décroît exponentiellement à grande distance comme

$$G(x - y) \propto \exp(-|x - y|/\xi) \quad \text{quand} \quad |x - y| \rightarrow \infty \quad (10)$$

où  $\xi$  est la *longueur de corrélation* pour les fluctuations d'aimantation ( $\xi$  dépend légèrement de l'orientation du vecteur  $\vec{x}\vec{y}$  par rapport aux axes cristallographiques, mais on va négliger cet effet). Cette longueur définit la distance sur laquelle les fluctuations des aimantations locales sont corrélées. Dans la phase paramagnétique où l'aimantation moyenne est nulle, mais où il peut exister localement des petits domaines d'aimantation positive et négative,  $\xi$  est également la taille typique de ces domaines microscopiques.

Loin du point critique  $\xi$  est petite et typiquement de l'ordre de la portée des forces d'échange entre moments magnétiques (quelques mailles au plus). Ce qui est intéressant est que près du point critique la longueur de corrélation devient très grande et quelle devient infinie au point critique. Cette divergence reflète la présence des fluctuations critiques. Le système devient *invariant d'échelle* au point critique.

<sup>1</sup>La dénomination *connexe* est utilisée parce que dans une représentation diagrammatique seuls les diagrammes connexes contribuent à  $G(x, y)$ , tandis que des diagrammes non-connexes contribuent à la fonction de corrélation simple  $\langle m(x) m(y) \rangle$ .

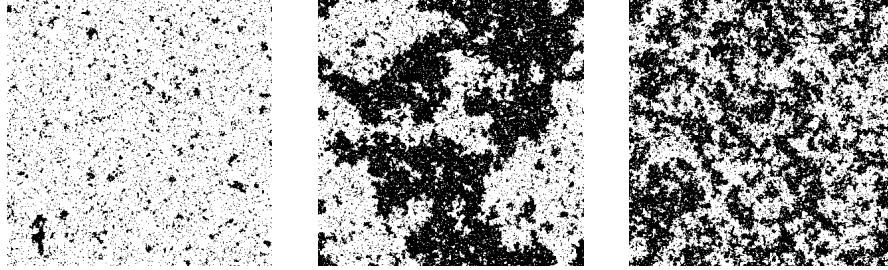


FIG. 3 – Configurations microscopiques «typiques» d'un système magnétique (modèle d'Ising en 2 dimensions) pour  $T < T_c$ ,  $T = T_c$  et  $T > T_c$ . Le noir représente les domaines d'aimantation  $m > 0$ , le blanc les domaines  $m < 0$ .

**Exposants  $\nu$  et  $\eta$  :** A cette divergence sont aussi associées deux exposants critiques, notés  $\nu$  et  $\eta$ . Quand  $T \rightarrow T_c$  (à champ nul)  $\xi$  diverge en effet en suivant une loi de puissance

$$\xi \propto |T - T_c|^{-\nu} \quad (11)$$

qui définit l'exposant  $\nu$  de la longueur de corrélation. Puisque à  $T = T_c$ ,  $\xi = \infty$  la fonction de corrélation à deux points  $G(x, y)$  décroît à grande distance moins vite qu'une exponentielle ; en fait elle décroît algébriquement

$$G(x, y) \propto |x - y|^{2-D-\eta} \quad , \quad \text{quand} \quad |x - y| \rightarrow \infty \quad (12)$$

où  $D$  est la dimensionnalité du système. Cette définition de  $\eta$  vient du fait qu'on considère généralement la transformée de Fourier  $\hat{G}(k)$  de  $G$  dans l'espace réciproque, et que le comportement algébrique pour  $G$  devient une divergence algébrique à petit vecteur d'onde pour  $\hat{G}$

$$\hat{G}(k) \propto \frac{1}{|k|^{2-\eta}} \quad , \quad \text{quand} \quad |k| \rightarrow 0 \quad (13)$$

En anticipant encore sur la suite, la théorie simple du champ moyen prédit pour ces exposants les valeurs

$$\nu = 1/2 \quad , \quad \eta = 0 \quad (14)$$

## 2.5 Universalité et lois d'échelle

Les phénomènes critiques sont donc intéressants car ils posent des questions fondamentales sur la physique des systèmes avec un grand nombre de degrés de libertés.



### 2.5.1 Lois et relations d'échelle

- A un point critique, les fluctuations thermodynamiques sont présentes à toutes les échelles de distance (et aussi les échelles de temps quand on étudie la dynamique des fluctuations, c'est le phénomène du ralentissement critique).
- Il faut donc comprendre pourquoi, qu'est ce qui régit ce phénomène et quelles en sont les conséquences.
- Il y a apparition de comportements d'échelle, c'est à dire de lois de puissance non-triviale en fonction de l'échelle (par exemple caractère «fractal» des configurations) au point critique.
- On constate aussi que près du point critique les fonctions de corrélations (les observables) prennent des forme *universelles* qui ne dépendent que des rapports distances/longueur de corrélation. Par exemple la fonction à deux points se comporte comme

$$G(x, y; T) \propto H(|x - y|/\xi(T)) \quad (15)$$

ou  $H$  est une *fonction d'échelle* universelle.

- Ceci entraîne que certains rapports entre quantités physiques sont aussi universels au voisinage d'un point critique. Par exemple, si la longueur de corrélation diverge en  $T_c$  comme

$$\xi = \begin{cases} X_+(T - T_c)^{-\nu} & \text{quand } T > T_c \\ X_-(T - T_c)^{-\nu} & \text{quand } T < T_c. \end{cases} \quad (16)$$

le rapport  $X_+/X_-$  est une quantité universelle. De telles quantités sont appelés *rapports d'amplitudes critiques*.

- Les exposants critiques ne sont pas donnés par la théorie simple du champ moyen (voir plus bas), mais ne sont pas totalement indépendants. Il existe des *relations d'échelle* reliant les quatre exposants  $\alpha - \delta$  aux deux exposants  $\nu$  et  $\eta$

$$\alpha = 2 - \nu D \quad (\text{hyperscaling}) \quad (17)$$

$$\beta = \frac{1}{2}\nu(D - 2 - \eta) \quad (18)$$

$$\gamma = \nu(2 - \eta) \quad (19)$$

$$\delta = \frac{D + 2 - \eta}{D - 2 + \eta} \quad (20)$$

Certaines de ces relations découlent déjà de l'hypothèse que les fonctions de corrélations sont données par des fonctions d'échelle dans le domaine critique (Widom), mais la démonstration complète de ces relations nécessite la théorie du groupe de renormalisation.

### 2.5.2 Universalité

Les exposants critiques sont déjà les mêmes dans la phase paramagnétique et la phase ferromagnétique. Différents systèmes magnétiques du même type (ferromagnétique uni-axe) et des modèles simples comme le modèle d'Ising (voir plus loin) ont le même comportement critique : mêmes exposants critiques, mêmes fonctions d'échelle pour les fonctions de corrélations près du point critique, mêmes rapports d'amplitudes.

De plus, des systèmes physiques complètement différents peuvent avoir le même comportement critique. Par exemple, le comportement critique des *fluides binaires* est le même que celui des systèmes magnétiques uni-axes ! La *température*  $T$  et la *fraction relative*  $x$  des deux constituants remplacent les variables température  $T$  et aimantation moyenne  $M$ . A priori le point critique d'un fluide comme l'eau est du

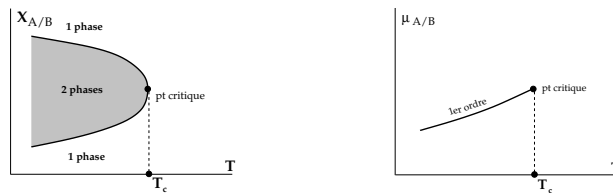


FIG. 4 – Diagramme de phase et point critique pour les fluides binaires en température/fraction relative et en température/potentiel chimique relatif

même type, mais il y a des interactions à longue portée (van der Waals) dans l'eau qu'il n'y a pas dans les mélanges binaires simples non polaires.

### 2.5.3 Autres systèmes et classes d'universalité

La nature du paramètre d'ordre et la dimensionalité du système influent sur le comportement critique. Les ferromagnétiques bi-axes (l'aimantation est dans un plan) ou habituels (l'aimantation peut prendre toutes les orientations) ont des comportements critiques différents. Des systèmes magnétiques peuvent avoir des paramètres d'ordre plus complexes (systèmes magnétiques frustrés) ou d'autres interactions interviennent (désordre par exemple). Il existe donc plusieurs classes d'universalité caractérisées par leurs exposants critiques. Mais les relations d'échelle sont toujours satisfaites.

Le tableau suivant donne des exemples pour les modèles d'Ising (système magnétique avec  $N = 1$  composante), XY ( $N = 2$ ), Heisenberg ( $N = 3$ ), et les polymères en bon solvant (SAW = self avoiding walk), qui peuvent être vus comme un système magnétique avec  $N = 0$  composantes.

	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	$\nu$	$\eta$
Champ moyen	0	1/2	1	3	1/2	0
Ising $D = 3$	0.1	0.31	1.25	5.0	0.64	0.04
Ising $D = 2$	0	1/8	7/4	15.0	1	1/4
XY $D = 3$	0.0	0.34	1.31		0.67	0.03
O(3) $D = 3$	-0.1	0.36	1.38		0.70	0.03
SAW $D = 3$	0.23	0.30	1.16		0.58	0.03
SAW $D = 2$	1/2	15/192	43/32	91/5	3/4	5/24

Les comportements critiques sont donc *universels*, des systèmes physique différents ont en général le même comportement critique si la symétrie du paramètre d'ordre et le schéma de brisure au point critique sont les mêmes.

### 2.5.4 Invariance d'échelle en physique

L'apparition de fluctuations spatiales et temporelles sur de grandes games d'échelle et l'invariance d'échelle se manifestent dans de nombreux domaines, pas seulement la physique des points critiques dans les systèmes magnétique et les fluides simples. Citons quelques exemples.

- Matière molle : polymères, cristaux liquides
- Systèmes hors d'équilibre : croissance, agrégation, fractures, coalescence
- Systèmes critiques auto-organisés, turbulence, fractales
- Systèmes dynamiques «complexes» : économie, biologie, astrophysique

L'émergence de propriétés d'échelle et de l'universalité peut-elle être décrite et comprise par des mécanismes simples ?

## 3 Le modèle d'Ising et l'approximation du champ moyen

### 3.1 Le modèle d'Ising

#### 3.1.1 Définition

Le modèle d'Ising est un modèle simple de spin classique à deux états sur réseau. On considère ici un *réseau hypercubique*  $\Lambda$  de maille  $a = 1$  ; pour le système infini  $\Lambda = \mathbb{Z}^D$  ; pour un système fini, pour simplifier on considérera un réseau de taille  $L = Na$  ( $N$  entier) avec des conditions aux limites périodique, c.a.d. un tore  $\Lambda = (\mathbb{Z}_N)^D$ . La coordinance (nombre de voisins) d'un site est  $C = 2D$ . Les sites  $i$  sont caractérisés par un vecteur entier  $i = (i_1, \dots, i_D) \in \mathbb{Z}^D$ . On peut aussi considérer des réseaux triangulaires, anisotropes, des conditions aux limites plus compliquées, etc. A chaque site  $i$  est attaché un spin classique  $S_i$  qui prend la valeur  $\pm 1$ .

$$S_i = \pm 1$$

Enfin il y a un *couplage ferromagnétique*  $J$  entre spins sur les sites qui sont des *plus proches voisins*, c'est à dire s'ils sont sur des sites  $i$  et  $j$  appartenant à un lien  $\langle ij \rangle$  du réseau. De façon compacte on notera  $\mathbf{S}$  une configuration  $\mathbf{S} = \{S_i; i \in \Lambda\}$  des spins sur le réseau  $\Lambda$ . L'énergie d'une configuration  $\mathbf{S} = \{S_i\}$  est donnée par le Hamiltonien de Ising-Lenz

$$\mathcal{H}[\mathbf{S}] = -J \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j - B \sum_i S_i \quad , \quad J > 0 \quad (21)$$

$B$  est un champ magnétique externe. L'énergie est minimale quand tous les spins sont alignés.

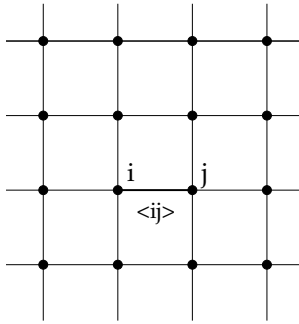


FIG. 5 – Le réseau carré 2D

### 3.1.2 Ensemble canonique, fonction de partition

L'ensemble canonique décrit un système en équilibre avec un thermostat à température  $T$ . Le poids de Boltzmann d'une configuration est

$$w[\mathbf{S}] = e^{-\beta \mathcal{H}[\mathbf{S}]} = \exp \left( \beta \left[ J \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j + B \sum_i S_i \right] \right) \quad , \quad \beta = \frac{1}{T} \quad (22)$$

Pour simplifier on a normalisé  $k_B = 1$ . La fonction de partition  $Z$  du système à température  $T$  et les valeurs moyenne des observables  $A[\mathbf{S}]$  sont données par la somme sur toutes configurations

$$Z = \sum_{\mathbf{S}} w[\mathbf{S}] = \sum_{\mathbf{S}} e^{-\frac{1}{T} \mathcal{H}[\mathbf{S}]} \quad , \quad \langle A \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\mathbf{S}} A[\mathbf{S}] w[\mathbf{S}] \quad (23)$$

L'énergie libre  $F$  et l'énergie interne  $E$  sont

$$F = -T \log Z \quad , \quad E = \langle \mathcal{H}[\mathbf{S}] \rangle \quad (24)$$

La magnétisation totale  $\mathcal{M}$  et la magnétisation moyenne par site  $m$  sont

$$\mathcal{M} = \left\langle \sum_i S_i \right\rangle, \quad m = \mathcal{M}/V; \quad V \text{ volume du système} \quad (25)$$

### 3.1.3 Observables et fonctions de corrélation

La susceptibilité magnétique est

$$\chi = \frac{\partial m}{\partial B} = \frac{1}{V} \sum_{ij} (\langle S_i S_j \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle) \quad (26)$$

On voit apparaître la *fonction de corrélation connexe de deux spins*

$$G_{ij} = \langle S_i S_j \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle$$

et la relation entre  $\chi$  et  $G_{ij}$  est une relation de type *fluctuation-dissipation* reliant ici la susceptibilité magnétique, une quantité caractérisant la *réponse* du système à une perturbation à une quantité mesurant les *fluctuations à l'équilibre* du système

$$\chi = \sum_j G_{ij} = \sum_j \langle S_i S_j \rangle^{\text{connexe}} \quad (27)$$

La chaleur spécifique totale est

$$C = \frac{\partial E}{\partial T} = T^2 \left( \langle H[\mathbf{S}] H[\mathbf{S}] \rangle - \langle H[\mathbf{S}] \rangle \langle H[\mathbf{S}] \rangle \right) \quad (28)$$

et la chaleur spécifique par unité de volume est  $C_v = C/V$ . De la même façon la chaleur spécifique (réponse du système à une perturbation de température) est reliée (à  $B = 0$ ) à la fonction de corrélation de l'*opérateur d'énergie*  $E_i$  défini comme

$$E_i = -\frac{J}{2} \sum_{j \text{ voisin de } i} S_i S_j, \quad C_v = T^2 \sum_j \langle E_i E_j \rangle^{\text{connexe}} \quad (29)$$

## 3.2 Potentiel thermodynamique et transformation de Legendre

Une quantité importante est le *potentiel thermodynamique* (le *potentiel de Gibbs* ou *potentiel effectif*) du système. On est intéressé aux propriétés d'un système magnétique en fonction de son aimantation (spontanée ou induite)  $\mathcal{M}$  plutôt que du champ appliqué  $B$ . De la même façon qu'en thermodynamique on passe des propriétés d'un gaz en fonction du volume  $V$ , décrite par son énergie interne  $E$ , à celle du gaz en fonction de la pression  $p$ , décrite par son enthalpie  $H$ , par une transformée de Legendre de  $E$  par rapport à  $V$ , on va effectuer une transformée de Legendre de l'énergie libre par rapport à l'aimantation.

### 3.2.1 Source externe et aimantation locale

Pour cela couplons chaque spin  $S_i$  à un *champ externe* (appelé aussi *source externe*)  $h_i$ . Chaque source  $h_i$  est une variable indépendante. Comme pour les  $S_i$  nous noterons  $\mathbf{h}$  une configuration de champ externe

$$\mathbf{h} = \{h_i; i \in \Lambda\} \quad (30)$$

Le Hamiltonien total du système couplé à la source est donc

$$H_h[\mathbf{S}] = H[\mathbf{S}] - \sum_i h_i S_i = H[\mathbf{S}] - \mathbf{h} \mathbf{S} \quad (31)$$

Sa fonction de partition  $Z$  et son énergie libre  $F$  sont maintenant des fonctions de la source  $\{h_i\}$

$$Z[\mathbf{h}] = \sum_{\{S_i\}} e^{-\frac{1}{T}(H[\mathbf{S}] - \mathbf{h} \mathbf{S})} \quad , \quad F[\mathbf{h}] = -T \log Z[\mathbf{h}] \quad (32)$$

(on a toujours normalisé  $k_B = 1$ ). Le logarithme de la fonction de partition donne la fonction génératrice connexe<sup>2</sup>  $W$  du système.

$$W[\mathbf{h}] = T \log Z[\mathbf{h}] = -F[\mathbf{h}] \quad (33)$$

L'aimantation locale  $m_i$  du site  $i$  est la dérivée partielle de  $W$  par rapport à  $h_i$

$$m_i = \langle S_i \rangle = \left. \frac{\partial W[\mathbf{h}]}{\partial h_i} \right|_{\mathbf{h}=0} \quad (34)$$

De même, la fonction de corrélation connexe à deux spins est donnée par les dérivées secondes de  $W$

$$G_{ij} = \langle S_i S_j \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle = T \left. \frac{\partial^2 W[\mathbf{h}]}{\partial h_i \partial h_j} \right|_{\mathbf{h}=0} \quad (35)$$

### 3.2.2 Définition du potentiel effectif $\Gamma[\mathbf{m}]$

Maintenant au lieu de considérer que les  $m_i$  dépendent des champs externes  $h_i$ , inversons les variables et considérons que les  $h_i$  sont fonctions des  $m_i$ .

$$m_i = m_i[\mathbf{h}] \quad \rightarrow \quad h_i = h_i[\mathbf{m}]$$

Le potentiel effectif  $\Gamma$  est la transformée de Legendre de  $F$  par rapport à  $h_i$ , c'est à dire la fonction des  $m_i$  définie comme

$$\Gamma[\mathbf{m}] = \sum_j m_j h_j - W[\mathbf{h}] \quad ; \quad m_i[\mathbf{h}] = \frac{\partial W[\mathbf{h}]}{\partial h_i} \quad (36)$$

---

<sup>2</sup> Elle s'exprime en fonction des diagrammes connexes dans un développement de basse température.

### 3.2.3 Propriétés du potentiel effectif :

Les propriétés du potentiel découlent des propriétés standard de la transformée de Legendre. Les plus importantes sont les suivantes :

**Relation champ / aimantation :** Le champ externe au site  $i$ ,  $h_i$ , est la dérivé partielle du potentiel par rapport à l'aimantation  $m_i$  au site  $i$

$$h_i = \frac{\partial \Gamma[\mathbf{m}]}{\partial m_i} \quad (37)$$

**Extrema de  $\Gamma$  :** Ceci implique que, si on connaît le potentiel  $\Gamma$ , les aimantations moyennes des sites  $i$  dans le champ externe  $h$  sont données par les solutions de l'équation précédente. En particulier, l'aimantation en champ nul  $m_i(h = 0)$  est donnée par le zéro de la dérivée de  $\Gamma$ , c'est à dire par le point où le potentiel est extrémal (en fait minimal par des arguments de convexité).

$$m_0 = \text{aimantation en champ nul} \quad \Leftrightarrow \quad m_0 \text{ minimum de } \Gamma[\mathbf{m}]$$

C'est donc le potentiel  $\Gamma$  qu'il faut minimiser pour obtenir l'état thermodynamique d'équilibre du système.

**Corrélations à 2 spins et dérivée seconde de  $\Gamma$  :** Il existe aussi une relation importante entre la matrice des dérivés secondes du potentiel effectif par rapport aux aimantations

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial m_i \partial m_j} \quad (38)$$

et les fonctions de corrélations connexe à deux spins, définies comme au dessus par

$$G_{ij} = \langle S_i S_j \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle$$

(pour un système fini avec  $N$  sites,  $H_{ij}$  et  $G_{ij}$  définissent des matrices  $N \times N$ ). Ces deux matrices sont l'inverse l'une de l'autre (à la température près)

$$\sum_k G_{ik} H_{kj} = T \delta_{ij} \quad \text{autrement dit} \quad \mathbf{G} = T \mathbf{H}^{-1}$$

**Le potentiel effectif comme énergie libre avec contrainte :**  $\Gamma$  peut s'écrire aussi comme

$$\Gamma[\mathbf{m}] = \langle H[\mathbf{S}] \rangle_{\mathbf{h}} - T \mathcal{S}[\mathbf{h}] \quad \text{où } \mathbf{h} \text{ est tel que } \langle \mathbf{S} \rangle_{\mathbf{h}} = \mathbf{m} \quad (39)$$

$\mathcal{S}[\mathbf{h}]$  est l'entropie totale du système couplé au champ externe  $\mathbf{h}$ , et  $\langle H \rangle_{\mathbf{h}}$  est la valeur moyenne de  $H$  calculée pour le système couplé au champ externe  $\mathbf{h}$  ( $H$  est le Hamiltonien «interne» du système de spins, sans tenir compte du couplage au champ externe  $\mathbf{h}$ ). Enfin  $\mathbf{h}$  est ajusté pour que  $\langle S_i \rangle_{\mathbf{h}} = m_i$ .

### 3.3 Le modèle d'Ising dans l'approximation du champ moyen

#### 3.3.1 Le champ moyen : version simple

Partons du modèle d'Ising sur réseau. On néglige les corrélations entre fluctuations des spins voisins et on suppose que le spin du site  $i$  «voit» la moyenne des spins de ses  $C = 2D$  voisins. Cette moyenne vaut  $e$  et elle est déterminée de façon auto-cohérente.

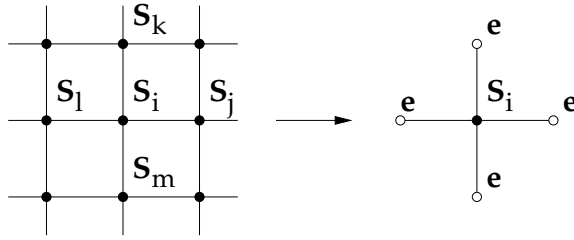


FIG. 6 – Principe de l'approximation du champ moyen

L'énergie du spin  $S$  au site  $i$  dans le champ moyen de ses voisins est donc (en remplaçant les  $S_j$  par  $e$  pour les voisins de  $i$  dans le Hamiltonien de Ising)

$$H_e(S) = -(2DJe + B)S \quad , \quad S = \pm 1 \quad (40)$$

(la température est absorbée dans  $J$  et  $B$ , si bien que  $T = 1$ ). Les valeur moyenne de l'aimantation  $S$  et de l'énergie par site  $\mathcal{E}$  sont

$$\langle S \rangle = \tanh(2DJe + B) \quad , \quad \mathcal{E} = (DJe + B)\langle S \rangle \quad (41)$$

Noter le facteur  $D$  au lieu de  $2D$  qui vient du fait que l'énergie  $-JS_iS_j$  d'un lien est partagée entre les sites  $i$  et  $j$ . La condition d'auto-cohérence est que l'aimantation moyenne  $m$  soit égale à  $e$

$$m = \langle S \rangle = e \quad \Rightarrow \quad m = \tanh(2Dm + B) \quad (42)$$

En champ nul  $B = 0$ , cette équation admet une seule solution  $m = 0$  si

$$2DJ < 1 \quad \Rightarrow \quad m = 0 \quad \text{phase paramagnétique} \quad (43)$$

Si le couplage  $J$  est plus grand que la valeur critique

$$J_c = 1/2D \quad (44)$$

L'équation admet deux solutions non nulles supplémentaires

$$2DJ > 1 \quad \Rightarrow \quad m = \pm m_0 \quad \text{phase ferromagnétique} \quad (45)$$



Au voisinage du point critique  $J_c$  il suffit de développer  $\tanh((2DJm + B))$  à l'ordre trois pour obtenir l'équation d'état approchée

$$m = 2DJm - \frac{1}{3}m^3 + B + \dots \quad (46)$$

On en déduit les quatre exposants.

$$\alpha = 0 \quad , \quad \beta = 1/2 \quad , \quad \gamma = 1 \quad , \quad \delta = 3 \quad (47)$$

La chaleur spécifique par unité de volume  $C_v$  est discontinue à  $J_c$ .

### 3.3.2 Le champ moyen comme approximation variationnelle

En fait l'approximation du champ moyen est un exemple d'approximation variationnelle. C'est une méthode plus générale qui permet de résoudre le modèle en champ non homogène, de calculer le potentiel effectif et les fonctions de corrélations, et qui permet en outre de suggérer des améliorations au champ moyen. Dans ces notes je ne la détaille pas mais je donne juste le résultat pour le potentiel effectif.

Le potentiel effectif dans l'approximation du champ moyen est simplement

$$\Gamma_{\text{var}}[m] = H_{\text{Ising}}[m_i] - \sum_i s(m_i) \quad (48)$$

$H_{\text{Ising}}$  est le Hamiltonien d'Ising pour des spins "continus"  $m_i \in ]-1, 1[$  (et non plus les spins d'ising entiers)

$$H_{\text{Ising}}[m_i] = -J \sum_{\langle ij \rangle} m_i m_j - \sum_i B m_i \quad (49)$$

$s(m_i)$  est l'entropie d'un spin local en fonction de son aimantation moyenne  $m_i$ .

$$s(m) = -[p_+(m) \log(p_+(m)) + p_-(m) \log(p_-(m))]$$

où  $p_{\pm}$  sont les probabilités  $p_{\pm}$  pour un spin d'être égal à  $\pm 1$  si son aimantation moyenne est  $m$

$$p_{\pm}(m) = \frac{1 \pm m}{2} \quad (50)$$

La minimisation de  $\Gamma_{\text{var}}[m]$  par rapport aux  $m_i$  redonne l'équation d'état pour les aimantations locales (42). On réécrit le potentiel comme

$$\Gamma_{\text{var}}[m] = \frac{J}{2} \sum_{\langle ij \rangle} (m_i - m_j)^2 + \sum_i V(m_i) \quad , \quad V(m) = -DJm^2 - Bm - s(m) \quad (51)$$

Le potentiel local  $V(m)$  est bien sûr défini pour les valeurs physique de l'aimantation locale  $-1 < m < 1$ . Son développement autour de  $m = 0$  est

$$V(m) = -Bm + \frac{J_c - J}{2J_c} m^2 + \frac{1}{12} m^4 + \mathcal{O}(m^6) \quad , \quad J_c = 1/2D \quad (52)$$

### 3.3.3 La dérivée seconde du potentiel thermodynamique

La fonction de corrélation connexe à deux spin est l'inverse de la dérivée seconde (Hessien) du potentiel  $\Gamma$ .

$$H_{ij} = J(-\Delta_{ij} + M^2 \delta_{ij}) \quad , \quad V''(m_0) = J M^2 \quad (53)$$

où  $\Delta_{ij}$  est l'opérateur Laplacien aux différences finies sur le réseau

$$\Delta_{ij} = C_{ij} - C \delta_{ij} \quad , \quad C_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ et } j \text{ voisins ,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (54)$$

et avec  $C = 2D$  le nombre de coordination pour chaque site pour le réseau carré.  $C_{ij}$  est la matrice de connexion du réseau. On note  $M$  la racine carrée de la dérivée seconde du potentiel local.  $M$  joue le rôle d'une «masse», et s'annule au point critique  $J = J_c$  comme

$$M^2 \simeq \begin{cases} C \left| \frac{J_c - J}{J_c} \right| & \text{si } J < J_c, \\ 2C \left[ \frac{J - J_c}{J_c} \right] & \text{si } J > J_c. \end{cases} \quad (55)$$

### 3.3.4 La fonction à deux points dans l'espace réel et l'espace réciproque

La fonction à deux points  $G_{ij} = \langle S_i S_j \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle$  est dans l'approximation du champ moyen

$$G_{ij} = (\mathbf{H}^{-1})_{ij} = \frac{1}{J} \left( \frac{1}{-\Delta + M^2 \mathbf{1}} \right)_{ij} \quad (56)$$

On doit donc calculer les éléments de matrice  $G_{ij}$  de l'opérateur  $G = H^{-1}$ , considéré comme opérateur agissant sur l'espace  $\mathcal{L}_2$  des fonctions sur le réseau carré  $\lambda = \mathbb{Z}^D$ . Pour cela il est beaucoup plus simple d'effectuer une transformation de Fourier et de se placer dans l'espace réciproque du réseau, c'est à dire dans la zone de Brillouin. On trouve

$$G_{ij} = \frac{1}{J} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^D \vec{k}}{(2\pi)^D} \frac{\exp(i\vec{k} \cdot \vec{i} - \vec{j})}{4 \sum_{\mu=1, D} \sin^2(k_\mu/2) + M^2} \quad (57)$$

### 3.3.5 Comportement à grande distance de la fonction de corrélation

Au voisinage du point critique  $M^2 \ll 1$  et on peut approximer cette intégrale par

$$G(x) = \int_{\mathbb{R}^D} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{e^{ikx}}{k^2 + M^2} \quad (58)$$

la fonction à deux points devient invariante par rotation, c'est à dire ne dépend que de  $x = |i - j| \gg 1$ , et elle décroît exponentiellement à grande distance comme

$$G(x) \propto e^{-M|x|} = e^{-|x|/\xi} \implies \xi = 1/M \quad (59)$$

Lorsque l'on est près du point critique, la longueur de corrélation  $\xi$  est très grande ( $\xi \gg 1$ ) et diverge au point critique comme

$$\xi \propto |J - J_c|^{-1/2} \implies \nu = \frac{1}{2} \quad (60)$$

Au point critique ( $M = 0$ ) la fonction de corrélation se comporte comme

$$G(x) \propto |x|^{2-D} \implies \eta = 0 \quad (61)$$

On retrouve cette fonction de corrélation  $G(x)$  dans le contexte de la théorie des champs, où elle porte le nom de *fonction de Green* ou de *propagateur de Feynman*. Elle satisfait l'équation aux dérivées partielles

$$(-\Delta + M^2) G(x) = \delta(x) \quad (62)$$

où  $\Delta$  est le Laplacien sur  $\mathbb{R}^D$ .

### 3.3.6 Limite continue pour le potentiel effectif :

De la même façon, si on s'intéresse à la réponse du système à des fluctuations de grande longueur d'onde et de faible amplitude de la magnétisation (qui sont celles qui dominent près du point critique), on peut considérer une magnétisation  $m_i$  qui varie «continuellement» et lentement avec la position. On peut donc remplacer  $m_i$  par un champ continu  $m(x)$  tel que

$$m_i \rightarrow m(x) \quad : \quad |m| \ll 1 \quad , \quad |\nabla_x m| \ll 1 \quad (63)$$

Si on revient à la forme 51 pour le potentiel effectif dans l'approximation du champ moyen et qu'on absorbe  $J$  dans la définition de  $m$  on identifie le premier terme au carré du gradient

$$\sum_{\langle ij \rangle} (m_i - m_j)^2 \rightarrow \int d^D x (\vec{\nabla} m(x))^2$$

et on peut ne garder que les termes d'ordre  $m$ ,  $m^2$  et  $m^4$  dans le développement de  $V(m)$  donné par 52. On obtient un potentiel effectif de la forme simple

$$\Gamma[m_i] \rightarrow \mathcal{H}[m] = \int d^D x \left[ \frac{1}{2} (\vec{\nabla} m(x))^2 + \frac{t}{2} m^2(x) - h m(x) + \frac{u}{12} m^4(x) \right] \quad (64)$$

où on a identifié

$$t = \frac{J_c - J}{J_c^2} \quad , \quad h = \frac{B}{\sqrt{J_c}} \quad , \quad u = \frac{1}{J_c^2} \quad (65)$$

Ce potentiel effectif, qui est à priori une approximation du potentiel effectif dans l'approximation variationnelle, a une forme en fait plus générale et joue un rôle très important dans la théorie des phénomènes critiques, puisqu'il est à la base de la théorie de Landau.

## 4 La théorie de Landau

### 4.1 Principe de l'approximation de Landau

Le principe de la théorie de Landau des phénomènes critiques est le suivant.

1. On identifie tout d'abord un paramètre d'ordre  $\mathbf{m}$  macroscopique local du système, qui décrit les degrés de libertés importants au point critique. En général des considérations de symétrie vont nous guider dans la recherche de ce paramètre d'ordre. Ici c'est l'aimantation locale  $m(x)$  et c'est un scalaire. On s'intéresse aux propriétés macroscopiques du système en fonction du paramètre d'ordre macroscopique, donc les coordonnées d'espace  $x$  sont maintenant continues.
2. On construit ensuite une fonctionnelle énergie libre effective  $\mathcal{H}_L[\mathbf{m}]$  en supposant que les fluctuations thermodynamiques du paramètre d'ordre sont petites, et que les variations spatiales de ces fluctuations sont également petites (à priori c'est une bonne approximation au voisinage du point critique, au moins dans l'approximation du champ moyen). On ne va donc garder que les termes de plus bas degrés dans un développement en puissance de  $\mathbf{m}$  et de ses dérivés spatiales  $\nabla\mathbf{m}$ ,  $\nabla\nabla\mathbf{m}$ , etc.
3. Enfin  $\mathcal{H}_L[\mathbf{m}]$  doit respecter les symétries microscopiques du système.
4. On a supposé que les fluctuations thermiques sont petites, donc qu'il est suffisant de minimiser l'énergie libre  $\mathcal{H}_L[\mathbf{m}]$  pour trouver la configuration  $m_0(x)$  caractérisant le fondamental. L'énergie libre du système sera donc

$$\mathcal{F}_0 = \mathcal{H}_L[\mathbf{m}_0] \quad \mathbf{m}_0 = \text{minimum de } \mathcal{H}_L[\mathbf{m}] \quad (66)$$

5. Enfin on suppose que les paramètres de ce Hamiltonien effectif vont dépendre de façon «régulière» des paramètres microscopiques du système considéré (dans notre cas  $J$ ,  $T$ ,  $B$ , les détails du réseau et des couplages entre les spins, etc.) et du champ extérieur appliqué. En faisant varier ces paramètres effectifs et en regardant comment le paramètre d'ordre et l'énergie interne du système varient on obtient le diagramme de phase de système et l'existence éventuelle de transitions de phase (qu'il conviendra ensuite de relier aux paramètres physiques (température, champ appliqué) ou microscopiques du système.

L'énergie libre effective  $\mathcal{H}_L[\mathbf{m}]$  est le Hamiltonien de Ginzburg-Landau.

## 4.2 Théorie de Landau pour le modèle d'Ising

### 4.2.1 Hamiltonien de Ginzburg-Landau pour le modèle d'Ising

Pour le modèle d'Ising, le paramètre d'ordre est naturellement l'aimantation moyenne  $m(x)$  et  $c$  est un champ scalaire. Les symétries sont la symétrie interne  $\mathbb{Z}_2 : m \rightarrow -m$  de renversement des spins (en l'absence de champ magnétique externe) et la symétrie d'espace du réseau (ici cubique).

En l'absence de champ externe, les arguments précédents conduisent à la même forme générale que celle obtenue pour le potentiel thermodynamique  $\Gamma[m]$  dans l'approximation du champ moyen au voisinage du point critique. La forme générale pour  $\mathcal{H}_L[m]$  sera pour  $B = 0$

$$\mathcal{H}_L[m] = \int d^D x \left[ \frac{z}{2} (\vec{\nabla} m(x))^2 + \frac{a}{2} m^2(x) + \frac{c}{4!} m^4(x) \right] \quad (67)$$

$z$ ,  $a$  et  $c$  sont des paramètres effectifs dépendant de façon "régulière" des paramètres microscopiques (ici  $J/T$ ). On a négligé les termes avec plus de deux dérivées spatiales ( $(\nabla m)^2$ ,  $(\nabla \nabla m)^2$ , etc.) et ceux avec plus de puissance de  $m$  ( $m^6$ ,  $m^8$ , etc.). On va justifier cette approximation plus bas. Pour que  $\mathcal{H}_L[m]$  soit borné inférieurement (stabilité) il faut évidemment que  $z$  et  $c$  soient positifs. On peut donc normaliser le paramètre d'ordre  $m$  pour que le coefficient  $z$  de  $(\nabla m)^2$  soit égal à 1.

En présence d'un champ magnétique externe  $H$  la symétrie  $m \rightarrow -m$  est explicitement brisée et on doit introduire des termes impairs en  $m(x)$  dans  $\mathcal{H}[m]$ . Le Hamiltonien doit donc maintenant être invariant sous la transformation  $m \rightarrow -m$  et  $h \rightarrow -h$ . Toujours inspiré par le calcul de champ moyen, on peut montrer qu'il suffit d'ajouter un terme en  $h(x) m(x)$  pour traiter le couplage entre le paramètre d'ordre et le champ externe.

$$\mathcal{H}[m] = \int d^D x \left[ \frac{z}{2} (\vec{\nabla} m(x))^2 + \frac{a}{2} m^2(x) + \frac{c}{4!} m^4(x) - h(x) m(x) \right] \quad (68)$$

Un terme en  $hm^3$  est permis par la symétrie mais on va voir qu'il est sous-dominant dimensionnellement. Les coefficients  $z$ ,  $a$ ,  $c$  peuvent aussi dépendre de  $h$  mais au voisinage du point critique ces corrections sont sous-dominantes.

### 4.2.2 Diagramme de phase, point critique et exposants critiques

Comme on l'a vu dans la discussion de la solution de champ moyen,  $c$  est le signe du paramètre  $a$  qui est crucial. On suppose que  $a$  dépend de façon régulière et monotone de la température  $T$ , au moins au voisinage du point critique. La température

critique  $T_c$  est donc telle que  $a(T_c) = 0$ . On va développer  $a(T)$  en fonction de l'écart à la température critique  $t$  (ou température réduite), défini comme

$$t = \frac{T - T_c}{T_c} ; \quad a(T) = a_1 t + \mathcal{O}(t^2) \quad a_1 > 0 \quad (69)$$

Au voisinage du point critique  $|t| \ll 1$ , les autres paramètres  $z(T)$  et  $c(T)$  peuvent être considérés comme constants

$$z(T) = z_0 + \mathcal{O}(t) , \quad z_0 > 0 , \quad c(T) = c_0 + \mathcal{O}(t) , \quad c_0 > 0 \quad (70)$$

**Diagramme de phase :** En l'absence de champ externe ( $h(x) = 0$ ) la minimisation de  $\mathcal{H}_L[m]$  conduit donc à une aimantation homogène telle que

$$m(x) = m_0 , \quad a_1 t m_0 + c_0 m_0^3/6 = 0$$

avec une phase désordonnée (para) pour  $t > 0$  et deux phases ordonnées (ferro) pour  $t < 0$  (brisure spontanée de la symétrie  $\mathbb{Z}_2$ ).

$$m_0 = \begin{cases} 0 & \text{si } t > 0 , \\ \pm \sqrt{6a_1/c_0} |t|^{1/2} & \text{si } t < 0 . \end{cases} \quad \implies \quad \beta = 1/2 \quad (71)$$

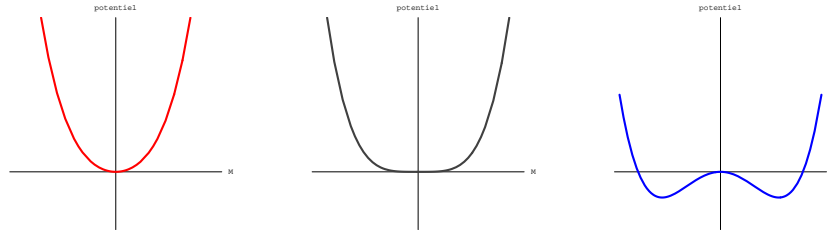


FIG. 7 – Le potentiel de Landau  $V(m)$  pour  $t > 0$ ,  $t = 0$  et  $t < 0$  ( $h = 0$ ).

**Equation d'état :** En présence d'un champ externe  $h(x)$  la minimisation de  $\mathcal{H}_L[m]$  donne l'équation d'état générale

$$- z_0 \Delta_x m(x) + t a_1 m(x) + c_0 m^3(x)/6 = h(x) \quad (72)$$

En champ homogène  $h(x) = h$  on retrouve l'équation d'état du champ moyen

$$a_1 t m_0 + c_0 m_0^3/6 = h \quad (73)$$

La susceptibilité magnétique (par unité de volume) diverge en  $t = 0$  comme

$$\chi_v = \left. \frac{\partial m_0}{\partial h} \right|_{h=0} = \begin{cases} (a_1 t)^{-1} & \text{si } t > 0, \\ (2a_1 |t|)^{-1} & \text{si } t < 0; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \gamma = 1 \quad (74)$$

Au point critique  $t = 0$  l'aimantation s'annule avec le champ  $h$  comme

$$m \propto h^{\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad \delta = 3$$

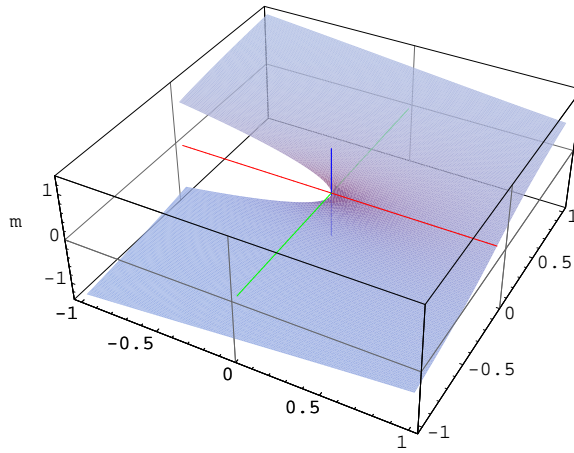


FIG. 8 – Aimantation spontanée  $m$  en fonction de la température réduite  $t$  (axe rouge) et du champ externe  $h$  (axe vert) dans la théorie de Landau

**Chaleur spécifique :** La chaleur spécifique  $c_v$  est (au moins sa partie singulière au point critique) proportionnelle à

$$c_v = -\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \quad f = a_1 m_0^2/2 + c_0 m_0^4/4! - h m_0 \quad \text{densité d'énergie libre} \quad (75)$$

En champ nul  $h = 0$  on trouve donc

$$c_v = \begin{cases} 0 & \text{pour } t > 0, \\ 3a_1^2/c_0 & \text{pour } t < 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0 \quad (76)$$

**Longueur de corrélation :** Enfin la fonction de corrélation à deux spins est donnée par

$$G(x, y) = \frac{\partial m(x)}{\partial h(y)} \quad , \quad (-z_0 \Delta_x + a_1 t + c_0 m^2/6) G(x - y) = \delta(x - y) \quad (77)$$

C'est donc le propagateur (fonction de Green scalaire) de masse  $m$ ,

$$G(x) \propto \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{e^{ikx}}{k^2 + m^2} \quad , \quad m = \sqrt{a_1 t + c_0 m_0^2/6} \quad (78)$$

et la longueur de corrélation  $\xi$  diverge en  $t = 0$  comme

$$\xi = m^{-1} = \begin{cases} (a_1 t)^{-1/2} & \text{si } t > 0, \\ (2a_1 |t|)^{-1/2} & \text{si } t < 0. \end{cases} \quad \implies \quad \nu = 1/2 \quad (79)$$

Enfin au point critique  $t = 0$

$$G(x) \propto |x|^{2-D} \quad \implies \quad \eta = 0 \quad (80)$$

**Les exposants critiques :** On a donc redérivé tous les exposants critiques du champ moyen avec la théorie de Landau.

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1/2, \quad \gamma = 1, \quad \delta = 3, \quad \nu = 1/2, \quad \eta = 0 \quad (81)$$

### 4.2.3 Justification du comptage dimensionnel

On va maintenant justifier plus précisément pourquoi on a négligé les termes de dimensionalité supérieure dans  $\mathcal{H}_L$  (point 2). La théorie de Landau décrit le voisinage du point critique, donc  $t$  et  $h$  sont petits. Plus précisément, au vu de l'équation d'état 73, elle s'applique si  $|t|$  est petit et si les trois termes dans 73 sont du même ordre, donc si le champ  $h$  et l'aimantation  $m$  du système sont d'ordre

$$|t| \ll 1, \quad |h| \ll 1 \quad , \quad h \sim t^{3/2}, \quad m \sim t^{1/2} \quad (82)$$

De plus on a trouvé que la longueur de corrélation  $\xi$  se comporte comme  $|t|^{-1/2}$ , donc les configurations d'aimantation à considérer sont celles qui varient lentement en  $x$ , avec une échelle de variation  $\ell$  d'ordre  $\xi$ . Les gradients sont donc aussi petit, d'ordre

$$\nabla_x \sim \xi^{-1} \sim t^{1/2} \quad (83)$$

Dans le régime critique, où  $\xi \gg 1$ , on voit que les 4 termes qu'on a conservés dans  $\mathcal{H}_L$  sont d'ordre  $t^2$

$$(\nabla m)^2 \sim t m^2 \sim m^4 \sim h m \sim t^2 \sim \xi^{-4} \quad (84)$$



Par contre, tous les autres termes de plus haut degré en  $\nabla$ ,  $m$  ou  $h$  et autorisés par la symétrie ( $m \leftrightarrow -m$ ,  $h \leftrightarrow -h$ ) du système sont d'ordre plus élevé en  $t$

$$\begin{aligned} (\nabla m)^4, (\nabla^2 m)^2, m^2(\nabla m)^2, m^6, h m^3 &\sim t^3 \sim \xi^{-6} \\ (\nabla m)^6, \dots, m^8, h m^5, h^3 m &\sim t^4 \sim \xi^{-8} \end{aligned} \quad (85)$$

Ils sont donc bien négligeables au voisinage du point critique.

### 4.3 Fluctuations critiques, critère de Ginzburg, domaine critique et dimension critique supérieure

Discutons maintenant la validité de la théorie de Landau pour décrire le point critique. On a vu que la théorie de Landau est une théorie effective pour le paramètre d'ordre macroscopique  $\mathbf{m}(x)$  donnée par un Hamiltonien effectif. Elle suppose que

1. On est proche du point critique,  $t$  et  $h \ll 1$  de façon à ce que le paramètre d'ordre  $m$  soit petit et la longueur de corrélation  $\xi$  grande, et qu'on puisse bien négliger les termes de plus haut degré en  $m$  et en  $\nabla$  dans  $\mathcal{H}_L[m]$ .
2. Les fluctuations thermodynamiques du paramètre d'ordre (autour de sa valeur moyenne  $m_0$ ) sont petites, de façon à ce qu'on puisse approximer l'énergie libre du système par sa valeur au minimum  $m_0$  de  $\mathcal{H}_L[m]$ .

En fait cette deuxième hypothèse n'est valable que si la dimensionnalité du système  $D$  est plus grande que  $D_{uc}$ , la dimension critique supérieure du modèle.

#### 4.3.1 Estimation des fluctuations au voisinage du point critique

On va faire une estimation basée sur l'analyse dimensionnelle de l'amplitude des fluctuations du paramètre d'ordre  $m$  autour de sa valeur moyenne  $m_0$  calculée dans la théorie de Landau.

$$m(x) = m_0 + \Delta m(x) \quad (86)$$

L'amplitude des fluctuations va dépendre de leur extension spatiale (vecteur d'onde)  $\ell$ . Au voisinage du point critique  $t \ll 1$  la longueur de corrélation  $\xi$  est grande et les fluctuations sont découplées au delà de cette échelle de longueur. L'échelle  $\ell$  naturelle pour estimer l'amplitude des fluctuations est donc simplement la longueur de corrélation elle-même

$$\ell \simeq \xi \quad (87)$$

Pour estimer l'amplitude  $\Delta m$  d'une fluctuation de taille  $\ell$  il faut considérer les contributions des deux termes – linéaires et non linéaires – dans  $\mathcal{H}_L[m_0 + \Delta m]$ . Le premier terme vaut

$$\Delta \mathcal{H}_{lin} = \int z_0 (\nabla m)^2 / 2 + a_1 t m^2 / 2 \sim \ell^{D-2} a_0 t (\Delta m)^2 = z_0 \ell^{D-2} (\Delta m)^2 \quad (88)$$

Le deuxième vaut

$$\Delta\mathcal{H}_{n.lin} = \int c_0 m^4 / 4! \sim \ell^D c_0 (\Delta m)^4 \quad (89)$$

On a absorbé la température dans les coefficients effectifs  $z_0$  et  $c_0$  de  $\mathcal{H}_L$  donc l'amplitude des fluctuations est majorée par

$$\text{Max}(\Delta\mathcal{H}_{lin}, \Delta\mathcal{H}_{n.lin}) \leq 1 \quad (90)$$

donc les fluctuations de  $m$  sont d'ordre

$$\Delta m^2 \sim \text{Min}\left(z_0^{-1} \ell^{2-D}, c_0^{-1/2} \ell^{-D/2}\right) \quad (91)$$

On voit qu'il y a deux cas très différents quand  $\ell \gg 1$

1. Si  $D > 4$  c'est le terme linéaire qui contrôle l'amplitude des fluctuations, et ces fluctuations sont beaucoup plus petites que le paramètre d'ordre lui-même (dès que  $h \neq 0$  ou que  $t < 0$ ).

$$D > 4 \quad \implies \quad (\Delta m)^2 \sim z_0^{-1} \ell^{2-D} \ll m^2 \sim z_0/c_0 \ell^{-2} \quad (92)$$

Les hypothèses à la base de la théorie de Landau sont donc vérifiées, et ce d'autant mieux qu'on est près du point critique !

2. Si  $D < 4$ , c'est le terme non linéaire qui contrôle l'amplitude des fluctuations, mais ces fluctuations sont alors beaucoup plus grandes que le paramètre d'ordre lui-même

$$D < 4 \quad \implies \quad (\Delta m)^2 \sim c_0^{-1/2} \ell^{-D/2} \gg m^2 \sim z_0/c_0 \ell^{-2} \quad (93)$$

La théorie de Landau n'est valable que dans le domaine où la longueur de corrélation  $\xi$  est grande devant les longueurs microscopiques du système mais petite devant la longueur «critique»  $\ell_c$

$$1 \ll \xi \ll \ell_c = (z_0^2/c_0)^{\frac{1}{4-D}} \quad (94)$$

Dans le cas contraire  $\xi \gg \ell_c$ , c'est à dire si on est dans le **domaine critique**

$$|t| < t_c \sim \frac{1}{a_1} \left[ \frac{c_0^2}{z_0^D} \right]^{\frac{1}{4-D}} \quad (95)$$

où la température réduite  $t$  est suffisamment petite pour que les fluctuations soient plus importantes que les valeurs moyennes du paramètre d'ordre et que la théorie de Landau ne soit plus valable. C'est bien ce que les expériences et les calculs théoriques indiquent : les exposants critiques pour des systèmes 2D et 3D sont différents de ceux prédits par le champ moyen et la théorie de Landau.

3. Le cas  $D = 4$  est dit marginal, les termes linéaires et non-linéaires sont toujours du même ordre et une analyse plus fine sera nécessaire. En fait la théorie du groupe de renormalisation et les analyses numériques indiquent que la théorie de Landau est invalidée (plus faiblement) par des corrections logarithmiques (en puissances de  $\log(|t|)$ ).

### 4.3.2 Critère de Ginzburg et dimension critique supérieure

Ce critère de validité de la théorie de Landau est appelé **critère de Ginzburg**

$$(\Delta m)^2 \ll m^2$$

La dimension  $D = 4$  est la **dimension critique supérieure**  $D_{uc}$  (u.c.=upper critical) pour le problème

$$D_{uc} = 4 .$$

et on a

$D > D_{uc} \implies$  théorie de Landau valable dès que  $|t| \ll 1$

$D < D_{uc} \implies$  th. de Landau valable hors du domaine critique  $t_c \ll |t| \ll 1$

Il est facile de voir que ces arguments sont tout à fait généraux, et s'appliquent à tous les problèmes dont la théorie de Landau met en jeu un Hamiltonien de la forme 67 avec un paramètre d'ordre à plusieurs composante et des couplages dépendant de la physique et des symétries du problème. En particulier

1. Pour des Hamiltonien de cette forme, la dimension critique supérieure sera toujours  $D_{uc} = 4$ .
2. Ceci est donc indépendant du caractère discret ou continu de la symétrie du paramètre d'ordre.
3. Ceci sera toujours lié à la dimension  $D - 4$  des couplage non-linéaire pour les termes en  $m^4$  dans le Hamiltonien de Landau-Ginzburg
4. Dans des calculs de corrections au champ moyen ce sera toujours lié à la divergence IR de l'intégrale de  $\int_k 1/(k^2 + m^2)^2$  qu'il faut considérer en fin de compte puisque près du point critique on peut prendre une limite continue et  $m = 0$ .

Par contre dans certains systèmes les points critiques (points multicritiques, points de Lifchitz, systèmes désordonnés) ne sont pas décrits par un Hamiltonien de Landau en  $(\nabla m)^2 + m^4$  et leur dimension critique supérieure peut être différente de 4 !

## 5 La théorie de Wilson du groupe de renormalisation dans l'espace réel

Dans cette section je présente la formulation groupe de renormalisation de K. Wilson pour analyser le point critique d'un système magnétique. La présentation suit les ouvrages classiques comme celle du livre de M. Le Bellac.

## 5.1 Principe : transformation d'échelle et Hamiltonien renormalisé

Je commence par donner une définition formelle des transformations du groupe de renormalisation dans l'espace réel. Nous verrons des exemples et on fera des calculs plus explicites après. Pour simplifier je considère un système avec un paramètre d'ordre (champ) continu  $\phi$  et des transformations d'échelle linéaires dans les champs.

### 5.1.1 Modèle et Hamiltonien microscopique :

Nous partons d'un modèle défini sur réseau carré  $\Lambda$  (en dimension  $D$ ), avec une maille de réseau  $a$  (qui fixe l'échelle minimale de distance). D'autres réseaux sont évidemment possible. Les degrés de liberté sont des variables classiques (champs)  $\phi_i$  attachées aux sites  $i$  du réseau  $\Lambda$ . Génériquement je considère que les  $\phi_i$  sont des variables continues réelles, avec une mesure  $\mathcal{D}[\phi] = \prod_i d\phi_i$ . Les contraintes sur ces variables (par exemple  $|\phi_i| = 1$  pour Ising) sont incorporées dans le Hamiltonien microscopique  $\mathcal{H}$ <sup>3</sup>. Les  $\phi_i$  peuvent avoir plusieurs composantes, c.a.d. porter des indices  $a$  ( $\phi = \{\phi^a\}$ , degrés de libertés supplémentaires) que je n'explicite pas à ce stade.

La dynamique du système est donnée par un Hamiltonien microscopique (énergie)  $\mathcal{H}[\phi]$  local, qu'on peut écrire comme une somme d'observables  $O_\alpha$  locale des  $\phi$  au site  $i$ , c'est à dire une fonction de  $\phi$  et de ses dérivés  $\nabla\phi$ ,  $\nabla^2\phi$ , etc. évaluées au site  $i$  (sur réseau les dérivées  $\nabla$  sont bien sûr remplacées par des différences finies).

$$\mathcal{H}[\phi] = \int d^D x \sum_{\alpha} \kappa^{\alpha} O_{\alpha} = a^D \sum_{i \in \Lambda} \kappa^{\alpha} O_{\alpha}[\phi_i, \nabla\phi_i, \dots] \quad (96)$$

Les coefficients  $\kappa^{\alpha}$  sont les paramètres, ou constantes de couplages, du modèle. Les paramètres physiques comme la température sont contenus dans ces paramètres de  $\mathcal{H}$ . La fonction de partition  $Z$  du modèle sur réseau est

$$Z = \sum e^{-\mathcal{H}[\phi]} = \int \prod_{i \in \Lambda} d\phi_i e^{-\mathcal{H}[\phi]} \quad (97)$$

On suppose qu'on est suffisamment proche d'un point critique pour que la longueur de corrélation  $\xi$  soit grande.

$$\xi \gg a \quad (98)$$

Alors il est naturel de s'intéresser au système à des échelles intermédiaires  $a \ll \ell \ll \xi$ . C'est ce que permettent de faire les transformations de groupe de renormalisation.

<sup>3</sup> Un terme en  $A \sum_i (\phi_i^1 - 1)^2$ ,  $A \rightarrow \infty$  fait l'affaire

### 5.1.2 Décimation et transformations d'échelle

**1 - Décimation – variables de bloc :** On s'intéresse à la dynamique moyenne des spins dans une région de taille finie. Pour cela on divise le réseau en blocs  $b$  de taille  $B$ , (carrés de  $B^D$  sites). On définit le champ moyenné sur le bloc  $b$  par la moyenne  $\tilde{\phi}_b$  des spins sur le bloc  $b$

$$\tilde{\phi}_b = \frac{1}{B^D} \sum_{i \in b} \phi_i \quad (99)$$

$B$  est le facteur d'échelle de la procédure de décimation<sup>4</sup>.

**2 - Hamiltonien effectif pour les variables de bloc :** On moyenne sur les fluctuations des spins à l'intérieur des blocs pour arriver à un Hamiltonien effectif  $\mathcal{H}_{\text{eff}}[\tilde{\phi}_b]$  pour les variables de bloc  $\tilde{\phi}_b$  attachées aux site du réseau  $\tilde{\Lambda}$  de maille  $\tilde{a} = Ba$ .

$$e^{-\mathcal{H}_{\text{eff}}[\tilde{\phi}_b]} = \int \prod_{i \in \Lambda} d\phi_i \prod_{b \in \tilde{\Lambda}} \delta \left( \tilde{\phi}_b - \frac{1}{B^D} \sum_{i \in b} \phi_i \right) e^{-\mathcal{H}[\phi_i]} \quad (100)$$

On a bien sûr

$$Z = \int \prod_{b \in \tilde{\Lambda}} d\tilde{\phi}_b e^{-\mathcal{H}_{\text{eff}}[\tilde{\phi}_b]} \quad (101)$$

**Attention !** Génériquement ce Hamiltonien effectif n'est plus ultraloca, c'est à dire que même si  $H$  ne contient que des termes d'interactions entre spins à distance finie  $|i - i'| \leq d_{\text{max}}$ ,  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$  contiendra des termes d'interaction entre blocs à des distances  $|b - b'|$  arbitrairement grandes. Cependant, on peut s'assurer que ces interactions restent locales, c'est à dire décroissent exponentiellement avec la distance entre blocs (voir plus loin).

**3 - Changements d'échelle :** La troisième étape consiste à comparer ce Hamiltonien effectif (qui décrit la dynamique à l'échelle  $\tilde{a} = Ba$  des blocs) avec le Hamiltonien de départ (qui décrit la dynamique à l'échelle  $a$  du réseau initial), en changeant d'échelles pour obtenir des quantités rénormalisées.

**3.a - Changement d'échelle dans l'espace :** Pour ce faire, on rescale d'abord les distances

$$x \rightarrow x' = x/B \quad (102)$$

si bien que le réseau  $\tilde{\Lambda}$  de maille  $\tilde{a} = Ba$  redevient le réseau  $\Lambda$  de maille  $a$

$$\tilde{\Lambda} \rightarrow \Lambda' = \Lambda \quad , \quad b \in \tilde{\Lambda} \rightarrow i' \in \Lambda' = \Lambda \quad (103)$$

<sup>4</sup> stricto sensu il faudrait que  $B = (10/9)^{1/D}$  pour que ce soit une décimation ;-)

**3.b - Changement d'échelle sur les champs  $\phi$  :** Simultanément on fait un changement d'échelle adéquat sur les champs, de la forme

$$\phi_b = B^{-\Delta} \phi'_{i'} \quad (104)$$

avec  $\Delta$  un facteur à ajuster de façon à ce que après ce rescaling le *Hamiltonien renormalisé* pour les  $\phi'_{i'}$ ,  $\mathcal{H}'[\phi'_{i'}]$ , défini par

$$d\tilde{\phi}_b e^{-\mathcal{H}_{\text{eff}}[\tilde{\phi}_b]} = d\phi'_{i'} e^{-\mathcal{H}'[\phi'_{i'}]} \quad (105)$$

ressemble «le plus possible» au Hamiltonien initial  $\mathcal{H}[\phi_i]$ . Nous verrons plus tard sur des exemples ce que celà signifie et pourquoi ce rescaling de  $\phi$  est nécessaire. Naturellement le choix de  $\Delta$  dépend en général de  $\mathcal{H}$  (c.a.d.  $\Delta = \Delta[\mathcal{H}]$ ).

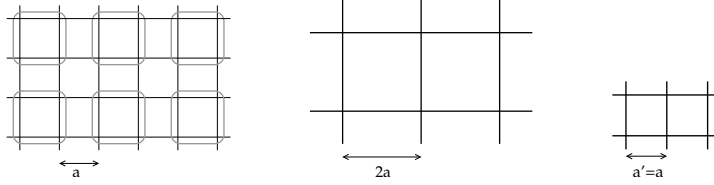


FIG. 9 – Les 3 étapes d'une transformation élémentaire du groupe de renormalisation : 1) définition de variables de bloc de spin à partir du réseau initial ; 2) calcul du Hamiltonien effectif pour les variables de bloc ; 3) rescaling de  $x$  et des champs pour obtenir un modèle renormalisé.

### 5.1.3 Hamiltonien et observables renormalisés

On a obtenu ainsi le *Hamiltonien renormalisé*  $\mathcal{H}'[\phi']$  qui décrit la dynamique du système en terme des variables de blocs, après qu'on ait intégré sur les degrés de liberté à l'intérieur des blocs de taille  $B$  et qu'on ait fait une transformation d'échelle par le facteur  $B^{-1}$ . Si on a été capable de faire exactement cette transformation, on a évidemment pas changé la physique du système. On a donc des relations simples entre les observables du système initial et celle du modèle décrit par  $\mathcal{H}'$ .

**Fonction de partition :** Les fonctions de partition des deux systèmes sont évidemment égales

$$Z = \int d\phi e^{-\mathcal{H}[\phi]} = \int d\phi' e^{-\mathcal{H}'[\phi']} \quad (106)$$

et de façon plus précise, pour un système de taille finie  $L$  (disons avec  $L \gg a$  et des conditions aux limites périodiques pour éviter de discuter les effets de bord)

$$Z_{\mathcal{H}}(L) = Z_{\mathcal{H}'}(L/B) \quad (107)$$

**Fonctions de corrélations :** Je note les coordonnées de façon continue  $x = x_i = a i$ , donc  $\phi(x) = \phi_i$ . On a des relations simples entre les fonctions de corrélation du modèle initial et celle de la théorie renormalisée. Pour la fonction à un point

$$\langle \phi(x) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \phi_i \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \tilde{\phi}_b \rangle_{\mathcal{H}_{\text{eff}}} = B^{-\Delta} \langle \phi(x/B) \rangle_{\mathcal{H}'} \quad (108)$$

Pour la fonction à deux points, tant que  $|i_1 - i_2| \gg B$ ,  $i \in b$ ,  $i_2 \in b_2$ , on a aussi

$$\langle \phi_{i_1} \phi_{i_2} \rangle_{\mathcal{H}} \simeq \langle \tilde{\phi}_{b_1} \tilde{\phi}_{b_2} \rangle_{\mathcal{H}_{\text{eff}}}$$

et donc

$$\langle \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle_{\mathcal{H}} \simeq B^{-2\Delta} \langle \phi(x_1/B) \phi(x_2/B) \rangle_{\mathcal{H}'} \quad (109)$$

et idem pour les fonctions à K points.

#### 5.1.4 Transformations non-linéaires dans les champs :

Ici j'ai considéré une opération de moyennage des  $\phi$  dans un bloc ( $\phi_i \rightarrow \tilde{\phi}_b$ ) qui est linéaire. D'autres procédures de renormalisation, par exemple Migdal-Kadanoff pour le modèle d'Ising, sont non-linéaire. Ceci n'obère pas la suite de l'analyse, qui considère les transformations du groupe de renormalisation dans l'espace des couplages. Par contre pour considérer l'effet des transformations du groupe de renormalisation sur les fonctions de corrélations il faut regarder proprement la renormalisation du champ externe  $h$  (voir plus loin).

## 5.2 Les flots du groupe de renormalisation dans l'espace des Hamiltoniens effectifs

### 5.2.1 Itération de la transformation de renormalisation et flots

Pour déterminer les propriétés du système à grande distance (typiquement la longueur de corrélation), on itère la procédure. Pour arriver à l'échelle  $\ell$  en partant de l'échelle microscopique  $a$ , il faut faire une transformation d'échelle par un facteur  $S = \ell/a$ , donc l'itérer  $N$  fois avec  $N = \log S / \log B$  pour arriver à un Hamiltonien renormalisé  $\mathcal{H}_S$ . Si ce Hamiltonien n'est pas trop compliqué, la détermination des propriétés aux grandes échelles  $x \sim \ell$  du système initial sur réseau de maille  $a$  est équivalente à déterminer les propriétés à courte distance  $x' \sim a = \ell/S$  du système renormalisé, problème à priori plus simple.

On pourrait évidemment faire une seule transformation de renormalisation avec  $B = S$  pour passer de  $a$  à  $\ell$ , mais c'est un problème difficile, équivalent à calculer directement le potentiel effectif  $\Gamma[\phi]$  à partir du Hamiltonien microscopique  $\mathcal{H}[\phi]$ . Comme on va le voir, décomposer une grosse transformation d'échelle en beaucoup de petites offre plusieurs avantages.

### 5.2.2 Hamiltoniens et champs renormalisés

Les transformations itérées donnent donc un «flot» (en fait ici une transformation itérée ou mapping) dans l'espace des Hamiltoniens

$$\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}'' \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{H}^{(N-1)} \rightarrow \mathcal{H}^{(N)} = \mathcal{H}_S \quad (110)$$

du Hamiltonien initial  $\mathcal{H}$  au Hamiltonien renormalisé  $\mathcal{H}_S$ , en fonction du facteur d'échelle  $S = B^N$ . Simultanément on a une série de changements d'échelle des champs

$$\phi(x) = B^{-\Delta} \phi'(x') = B^{-\Delta-\Delta'} \phi''(x'') = \dots = B^{-(\Delta+\Delta'+\dots+\Delta^{(N-1)})} \phi^{(N)} \quad (111)$$

qui conduit à définir un *champ renormalisé*  $\phi_s$  relié au champ initial  $\phi$  par un facteur (multiplicatif) de renormalisation  $Z(S)$

$$\phi_s(x_s) = \phi^{(N)}(x_s) = Z_s \phi(x); \quad x_s = x/S; \quad Z(S) = Z_s = B^{\Delta+\Delta'+\dots+\Delta^{(N-1)}} \quad (112)$$

### 5.2.3 Le groupe de renormalisation

Je note  $\mathcal{R}_S$  la transformation sur les  $\mathcal{H}$  correspondant au facteur d'échelle  $S$

$$\mathcal{H} \xrightarrow{\mathcal{R}_S} \mathcal{H}_S, \quad S \text{ facteur d'échelle} \quad (113)$$

Ces transformations forment un (semi-)groupe

$$\mathcal{R}_{S_2} \circ \mathcal{R}_{S_1} = \mathcal{R}_{S_2 S_1} \quad (114)$$

multiplicatif dans le facteur d'échelle  $S$ , donc additif dans son logarithme, qui joue le rôle d'un «temps» discret pour les transformations d'échelle,

$$s = \log(S) = N\Delta_s, \quad \text{d'incrément } \Delta_s = \log(B) \quad (115)$$

L'ensemble de ces transformations dans l'espace des Hamiltoniens du système forme le *groupe de renormalisation*.

### 5.2.4 Action du groupe de renormalisation sur les observables

On a les mêmes relation que pour une transformation de décimation. Si  $Z_H(L)$  désigne la fonction de partition pour le système initial de taille finie  $L$  on a

$$Z_{\mathcal{H}}(SL) = Z_{\mathcal{H}_S}(L) \quad (116)$$

Pour les fonctions de corrélation en volume infini on a la relation

$$\langle \phi(Sx_1) \cdots \phi(Sx_K) \rangle_{\mathcal{H}} \simeq Z(S)^{-K} \langle \phi_s(x_1) \cdots \phi_s(x_K) \rangle_{\mathcal{H}_S} \quad (117)$$



où  $Z(S)$  est le facteur de renormalisation de  $\phi$  défini par 112. La même relation s'applique évidemment aux fonctions de corrélations connexes  $\langle \phi \cdots \phi \rangle_{\mathcal{H}}^{\text{conn}}$ . Il en découle la relation très importante entre les longueurs de corrélation  $\xi$  du système initial et du système renormalisé.

$$\xi_{\mathcal{H}} = S \xi_{\mathcal{H}_S} \quad (118)$$

### 5.2.5 Hamiltoniens, opérateurs et flot dans l'espace des couplages

Pour l'instant ces définitions restent totalement formelles. Pour les rendre un peu plus précise, je considère des Hamiltoniens de la forme

$$\mathcal{H}[\phi] = \sum_{i \in \Lambda} \sum_{\alpha} \kappa^{\alpha} O_{\alpha}[\phi_i] \quad (119)$$

où les  $O_{\alpha}$  sont des *opérateurs* locaux dans les champs, de la forme générale

$$O_{\alpha}[\phi_i] = \nabla^{n_1} \phi_i \nabla^{n_2} \phi_i \cdots \nabla^{n_k} \phi_i \quad (120)$$

$\nabla$  désignant l'opérateur de différence finie sur le réseau.

$$\nabla_{\mu} \phi_i = \phi_{i+e^{\mu}} - \phi_i \quad (121)$$

Par exemple

$$O_{\alpha}[\phi_i] = 1, \phi^2, \phi^4, \phi^6, (\nabla\phi)^2, (\nabla\phi)^4, (\Delta\phi)^2 \quad (122)$$

Les  $\kappa^{\alpha}$  sont les *constantes de couplages*, parfois appelées aussi *champs* (externes) associées aux opérateurs. Ce sont les coordonnées dans l'espace (mal défini) des Hamiltoniens. Un Hamiltonien  $\mathcal{H}$  est défini par ses coordonnées (couplages)  $\kappa = \{\kappa^{\alpha}\}$ . Le groupe de renormalisation agit donc dans l'espace des couplages comme

$$\kappa \xrightarrow{\mathcal{R}_S} \kappa(S) = \mathbf{K}(\kappa, s = \log S) \quad (123)$$

Ces transformations  $\kappa \rightarrow \kappa(S) = \mathbf{K}(\kappa, s)$  sont continues dans les couplages  $\kappa$ . Puisqu'elles forment un (semi)-groupe additif  $s = \log S$  on a  $\mathbf{K}(\mathbf{K}(\kappa, s_1), s_2) = \mathbf{K}(\kappa, s_1 + s_2)$ .

### 5.2.6 Réduction à un nombre fini de couplages

En pratique on doit tronquer l'espace (mal défini) des Hamiltoniens à un sous espace (bien défini) de Hamiltoniens ne dépendant que d'un nombre fini de paramètres (couplages), dans certains cas une sous famille infinie des couplages possibles. Les transformations du groupe de renormalisation sont approchées (projetées) en fixant un nombre fini de conditions de normalisation (autant que de couplages). On va voir des exemples explicites dans la suite. Pour des bons choix les caractéristiques globales des transformations du groupe de renormalisation sont préservées, voire dans les bons cas les caractéristiques quantitatives ; exposants critiques, etc...

### 5.2.7 Des flots discrets aux flots continus, fonctions de Wilson

Quand le nombre d'itérations est grand  $N \gg 1$  on va considérer le paramètre d'échelle  $S$  comme un paramètre continu et non plus discret. En fait c'est justifié au voisinage des points fixes du groupe de renormalisation, où la vitesse du flot est petite, donc où  $\kappa(S) - \kappa$  est petit. On peut donc faire un grand nombre d'itérations en restant dans un domaine fini de couplages. On le vérifiera explicitement sur des exemples dans la suite. Une autre justification est donnée par les modèles définis avec un régulateur dans l'espace des moments  $k$  au lieu de l'espace des positions  $x$  (réseau). Dans ces cas on peut définir rigoureusement des transformations de renormalisation dépendant d'un paramètre continu  $S$ .

Dans ce cas les itérations du groupe de renormalisation prennent la formes d'équations de flot engendrée par un champ de vecteur dans l'espace des couplages. En effet, comme les transformations sont additives en  $s = \log S$ , si on définit les fonctions de Wilson  $W^\alpha(\kappa)$  comme les dérivées logarithmiques des constantes renormalisées  $\kappa^\alpha$  per rapport au facteur d'échelle  $S$ , les transformation du groupe de renormalisation s'écrivent sous forme différentielle

$$S \frac{\partial}{\partial S} \kappa^\alpha(S) = W^\alpha(\kappa(S)) \quad (124)$$

avec les fonctions de Wilson

$$W^\alpha(\kappa) = \frac{\kappa^{\alpha'} - \kappa^\alpha}{\log B} = \frac{K^\alpha(\kappa, \Delta s) - \kappa}{\Delta s} = \lim_{S \rightarrow 1} \frac{\kappa_S^\alpha - \kappa^\alpha}{\log S} \quad (125)$$

**Equations de flot :** Autrement dit, les transformations prennent la forme

$$\frac{\partial}{\partial s} \kappa(S) = S \frac{\partial}{\partial S} \kappa(S) = \mathbf{W}(\kappa(S)) \quad (126)$$

Les *fonctions de Wilson*  $W^\alpha$  sont les composantes d'un champ de vecteur  $\mathbf{W}$  dans l'espace des couplages qui engendre les flots du groupe de renormalisation.

**Dimension du champ :** De la même façon, le facteur  $Z(S)$  de renormalisation des champs présent dans les fonctions de corrélation obéit à l'équation

$$S \frac{\partial}{\partial S} \log[Z(S)] = \Delta(\kappa(S)) \quad (127)$$

La fonction  $\Delta(\kappa)$  sera appelée la *dimension d'échelle* du champ  $\phi$ , et notée  $\Delta_\phi$  (et dépend des couplages  $\kappa$  en général).

**Covariance des équations de flot :** Le fait que les transformations du groupe de renormalisation dérivent d'un flot implique que lors d'une redéfinition des couplages (c'est à dire d'un changement de système de coordonnées dans l'espace des Hamiltoniens),  $\kappa \rightarrow \tilde{\kappa}$  les fonctions de Wilson changent comme des vecteurs contravariant  $W \rightarrow \tilde{W}$

$$\kappa^\alpha \rightarrow \tilde{\kappa}^\alpha, \quad W^\alpha \rightarrow \tilde{W}^\alpha \quad \text{avec} \quad \tilde{W}^\alpha(\tilde{\kappa}) = \frac{\partial \tilde{\kappa}^\alpha}{\partial \kappa^\beta} W^\beta(\kappa) \quad (128)$$

La dimension du champ  $\Delta_\phi$  se transforme comme un scalaire

$$\Delta_\phi \rightarrow \tilde{\Delta}_\phi = \Delta_\phi \quad (129)$$

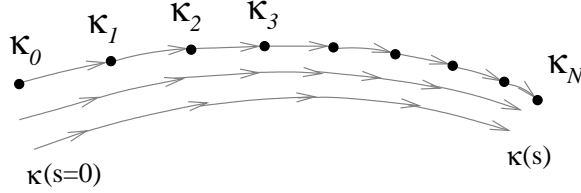


FIG. 10 – Les itérations des transformations du groupe de renormalisation peuvent être remplacées par un flot continu dans l'espace des couplages.

### 5.2.8 Renormalisation du champ $\phi$ et du champ externe $h$ :

Le traitement du champ  $\phi$  (la variable sur laquelle on intègre) semble différent de celui des couplages  $\kappa$ . En fait, le champ  $\phi$  est un opérateur associé au couplage  $h$  (champ externe) que l'on peut rajouter au Hamiltonien microscopique

$$\mathcal{H}[\phi] \rightarrow \mathcal{H}[\phi] - \delta\mathcal{H}[\phi], \quad \delta\mathcal{H}[\phi] = h \int d^D x \phi(x) = a^D \sum_{i \in \Lambda} h \phi_i \quad (130)$$

Dans une étape élémentaire de la procédure de renormalisation, ce terme se transforme comme

$$\sum_{i \in \Lambda} h \phi_i = \sum_{b \in \tilde{\Lambda}} h B^D \tilde{\phi}_b = \sum_{i' \in \Lambda} h B^{D-\Delta} \phi'_{i'} \quad (131)$$

donc le couplage  $h$  est renormalisé comme

$$h \rightarrow h' = B^{D-\Delta} h$$

En itérant pour obtenir un rescaling par un facteur d'échelle  $S$  le couplage  $h$  se transforme donc en

$$h \rightarrow h(S) = S^D Z(S)^{-1} h \quad (132)$$

et la fonction de Wilson associé à  $h$  est simplement

$$W^h(\kappa) = S \frac{\partial}{\partial S} h(S) = (D - \Delta(\kappa)) h \quad (133)$$

La dimension  $\Delta_\phi$  du champ  $\phi$ , qui nous dit comment le champ  $\phi$  est rescalé par les transformations du groupe de renormalisation, est donc simplement reliée au flot de la constante de couplage  $h$  (le champ externe) par

$$W^h = (D - \Delta_\phi) h \quad (134)$$

**NB :** Cet argument est général et permet de définir la dimension d'échelle  $\Delta$  pour le champ  $\phi$  à partir du flot pour  $h$  dans le cas de transformations d'échelle non-linéaires dans le champ, en particulier les transformations de bloc de spin ou de décimation à la Migdal-Kadanoff (voir plus bas).

### 5.3 Exemples simples :

#### 5.3.1 Théorie de Landau et analyse dimensionnelle

On considère d'abord un exemple trivial. Si on part du modèle défini par le Hamiltonien de Landau

$$\mathcal{H}[\phi] = \int d^D x \left[ \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{r_0}{2} \phi^2 + \frac{u_0}{4!} \phi^4 - h_0 \phi \right] \quad (135)$$

( $r_0 = t$  la température réduite) et qu'on reste dans le cadre de la théorie de Landau, c'est à dire qu'on néglige les fluctuations, le programme du groupe de renormalisation se réduit à faire de l'analyse dimensionnelle. En effet les deux premières étapes (décimation + calcul du Hamiltonien effectif) sont triviales (le champ  $\phi$  ne fluctue pas dans un bloc) et donc

$$\tilde{\phi}(x) = \phi(x) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_{\text{eff}}[\tilde{\phi}] = \mathcal{H}[\phi] \quad (136)$$

Ensuite le changement d'échelle

$$x = B x' \quad , \quad \tilde{\phi} = B^{-\Delta} \phi' \quad (137)$$

donne le Hamiltonien renormalisé

$$\mathcal{H}'[\phi] = \int d^D x' \left[ \frac{B^{D-2-2\Delta}}{2} (\nabla \phi')^2 + \frac{B^{D-2\Delta} r_0}{2} \phi'^2 + \frac{B^{D-4\Delta} u_0}{4!} \phi'^4 - B^{D-\Delta} h_0 \phi' \right] \quad (138)$$

Pour retomber sur un Hamiltonien  $H$  de la même forme que celui de départ la dimension du champ  $\Delta$  doit être

$$\Delta = \frac{D-2}{2} \quad , \quad \text{dimension canonique de } \phi \quad (139)$$

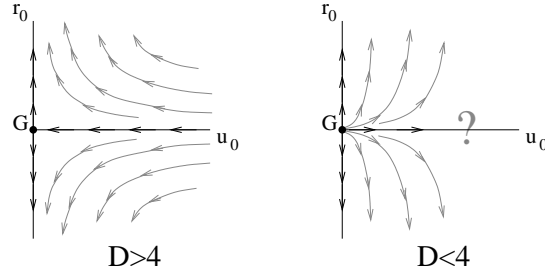


FIG. 11 – Les flots en  $u$  et  $r$  pour la théorie de Landau pour  $D > 4$  et  $D < 4$

Ceci implique que le comportement à courte distance de la fonction à deux points est inchangé ( $\hat{G}(p) \simeq 1/p^2$ ). Les flots du groupe de renormalisation dans l'espace des couplages sont

$$r_0 \rightarrow r_S = S^2 r_0 \quad ; \quad u_0 \rightarrow u_S = S^{4-D} u_0 \quad ; \quad h_0 \rightarrow h_S = S^{\frac{2+D}{2}} h_0 \quad ; \quad (140)$$

correspondant aux dimensions canoniques du champ et des couplages.

$$[\phi] = \frac{D-2}{2} \quad ; \quad [r] = 2 \quad ; \quad [u] = 4-D \quad ; \quad [h] = \frac{D+2}{2} \quad ; \quad (141)$$

L'interprétation physique des flots est simple. On retrouve évidemment les résultat du champ moyen pour le comportement de la longueur de corrélation avec  $r$

$r \neq 0$  : On est en dehors du point critique, quand  $r_S \rightarrow \infty$ , la masse diverge, c'est à dire de la longueur de corrélation  $\xi$  qui est finie décroît avec l'échelle  $\ell$ .  $r$  est un couplage *relevant* ou *pertinent*.

$r = 0$  : On est au point critique,  $r_S = 0$ , c'est à dire que la longueur de corrélation est infinie (à toute les échelles).

Le comportement du couplage non-linéaire  $u$  avec l'échelle permet de retrouver le résultat de l'analyse de Ginzburg

- Si  $D > 4$  le couplage non-linéaire  $u$  effectif décroît avec l'échelle  $S$ . Les termes non linéaires deviennent inimportants (*inessentiels* ou *non pertinents*) aux grandes distances, la théorie du champ moyen est une bonne approximation.

- Si  $D < 4$  le couplage non-linéaire  $u$  effectif décroît avec l'échelle  $S$ . Les termes non linéaires deviennent importants (*essentiels* ou *pertinents*) aux grandes distances, la théorie du champ moyen n'est plus une bonne approximation. La physique aux grandes échelles est contrôlée par quelque chose d'autre, à déterminer.

- si  $D = 4$  le couplage  $u$  est dit *marginal*. Dans la description du champ moyen il joue le même rôle à toutes les échelles. La théorie est *invariante d'échelle*.

**Autres opérateurs :** Même analyse pour les opérateurs avec  $n \geq 2$  champs et  $k \geq 2$  dérivées. Leur dimension est  $n \frac{D-2}{2} + k$  donc le couplage associé a dimension  $(2 - n) \frac{D-2}{2} + 2 - k$  qui est  $< 0$ , donc irrelevant. Les opérateurs avec une seule dérivé sont des dérivées totales, donc n'influent pas sur la physique dans le volume.

**Point fixe Gaussien :** Le point

$$r_0 = u_0 = h_0 = 0 \quad (142)$$

est un point fixe des transformations d'échelle, le point fixe Gaussien.

$$\mathcal{H}_G^*[\phi] = \int \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 \quad (143)$$

On va voir qu'il reste un point fixe quand on tient compte des fluctuations.

### 5.3.2 Ising 2D sur réseau triangulaire - transformation de «bloc de spin»

On donne ici un premier exemple non trivial et physiquement intéressant de calcul de groupe de renormalisation. On considère le modèle d'Ising sur le réseau triangulaire 2D (voir dessin) avec le Hamiltonien microscopique

$$\mathcal{H}[S] = - \left( J_0 \mathcal{N}_{\text{sites}} + J_1 \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j + J_2 \sum_i S_i \right) \quad (144)$$

$J_0$  est juste une constante de normalisation,  $J_1$  le couplage ferromagnétique,  $J_2$  le champ externe. On définit la procédure de décimation avec les blocs de 3 spins comme sur la figure. Le réseau  $\tilde{\Lambda}$  des blocs est encore un réseau triangulaire, le facteur d'échelle est

$$B = \sqrt{3} \quad (145)$$

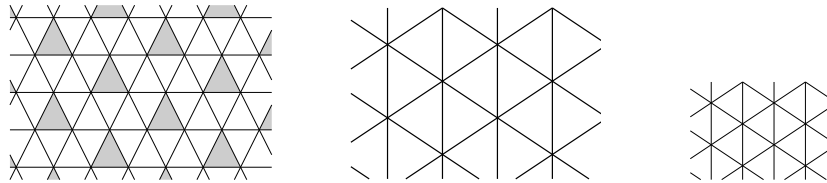


FIG. 12 – Transformation de «bloc de spin» sur le réseau triangulaire

Le spin effectif d'un bloc  $b = \{i, j, k\}$ ,  $\tilde{S}_b$ , est le signe de la somme de trois spins (attention, c'est une transformation non-linéaire)

$$\tilde{S}_b = \text{Signe}(S_i + S_j + S_k) \quad (146)$$

$$(+++)(++-)(+-+)(-++) \rightarrow (+) \quad ; \quad (---)(--)(+--)(----) \rightarrow (-)$$

Enfin on rescale le réseau, on n'a pas besoin de rescaler  $S$  puisque les spins sont toujours des spin d'Ising ( $\tilde{S} = S'$ ).

Pour calculer  $\mathcal{H}'$ , on va traiter exactement les couplages dans les blocs, et par une approximation de champ moyen les couplages entre blocs. Avec cette approximation  $\mathcal{H}'$  reste de la même forme que le Hamiltonien d'Ising initial  $\mathcal{H}$ .

**Détails du calcul :** On sépare les termes de couplage de spins en deux contributions, celle des liens dans un bloc, et celle des liens entre blocs voisins

$$\sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j = \sum_b \sum_{ij \in b} S_i S_j + \sum_{\langle bb' \rangle} \sum_{i \in b, j \in b'} S_i S_j .$$

On va traiter exactement les couplages dans les blocs, et par une approximation de champ moyen les couplages entre blocs. Le Hamiltonien renormalisé  $\mathcal{H}'$  peut s'écrire

$$e^{-\mathcal{H}'[S_b]} = \sum_{S_i \rightarrow S_b} e^{-\mathcal{H}[S_i]} = \prod_b Z_{\text{bloc}}[S_b] \left\langle e^{J_2 \sum_{\langle bb' \rangle} \sum_{i \in b} \sum_{j \in b'} S_i S_j} \right\rangle_{\{S_b\}}$$

$Z_{\text{bloc}}$  étant la somme des termes à l'intérieur du bloc  $b$

$$Z_{\text{bloc}}[S_b] = \sum_{S_{1,2,3} \rightarrow S_b} e^{3J_0 + J_1(S_1 S_2 + S_2 S_3 + S_3 S_1) + J_2(S_1 + S_2 + S_3)}$$

$$Z_{\text{bloc}}[\pm 1] = e^{3J_0} \left( e^{3J_1 \pm 3J_2} + 3e^{-J_1 \pm J_2} \right)$$

C'est le deuxième terme qui est compliqué et qui donner des termes d'interactions à  $N > 2$  spins et des termes non-locaux dans  $\mathcal{H}'$ . On fait une approximation de type champ moyen pour estimer ce terme

$$\left\langle \exp \left[ J_2 \sum_{\langle bb' \rangle} \sum_{i \in b} \sum_{j \in b'} S_i S_j \right] \right\rangle_{\{S_b\}} \simeq \exp \left[ \left\langle J_2 \sum_{\langle bb' \rangle} \sum_{i \in b} \sum_{j \in b'} S_i S_j \right\rangle_{\{S_b\}} \right]$$

Comme les variables de bloc sont fixées, ça se sépare en

$$\left\langle J_2 \sum_{\langle bb' \rangle} \sum_{i \in b} \sum_{j \in b'} S_i S_j \right\rangle_{\{S_b\}} = J_2 \sum_{\langle bb' \rangle} \sum_{i \in b} \sum_{j \in b'} \langle S_i S_j \rangle_{\{S_b\}} = 9J_2 \sum_{\langle bb' \rangle} \langle S_i \rangle_{S_b} \langle S_j \rangle_{S_{b'}}$$

avec

$$\langle S_{\text{site}} \rangle_{\pm 1} = \pm \frac{e^{3J_1 \pm 3J_2} + e^{-J_1 \pm J_2}}{e^{3J_1 \pm 3J_2} + 3e^{-J_1 \pm J_2}}$$

et redonne donc une interaction entre blocs plus proches voisins seulement. En remettant tout ensemble, on vérifie que le Hamiltonien renormalisé  $\mathcal{H}'$  est toujours un Hamiltonien d'Ising,

Les couplages renormalisés sont

$$J'_1 = 2J_1 \left( \frac{e^{3J_1} + e^{-J_1}}{e^{3J_1} + 3e^{-J_1}} \right)^2, \quad J'_2 = 3J_2 \left( \frac{e^{3J_1} + e^{-J_1}}{e^{3J_1} + 3e^{-J_1}} \right) \quad (147)$$

On regarde d'abord le modèle en champ nul ( $J_2 \simeq B = 0$ ). La transformation  $J_1 \rightarrow J'_1$  a trois points fixes, deux points fixes attractifs triviaux  $J_1 = 0$  et  $+\infty$  et un point fixe répulsif non trivial

$$J_1^* = \frac{1}{4} \log(1 + 2\sqrt{2}) \simeq 0.3356... \quad (148)$$

(à comparer au point critique exact  $J_c^{\text{exact}} = \log(3)/4 = 0.2746...$ ) et on vérifie que si  $J_1 < J_1^*$ ,  $J'_1 < J_1$ , tandis que si  $J_1 > J_1^*$ ,  $J'_1 > J_1$ . Autrement dit si on itère la transformation, le couplage renormalisé tend respectivement vers le points fixe  $J_1 = 0$  (modèle d'Ising à température  $\infty$ ) ou vers le point fixe  $J_1 = \infty$  (modèle d'Ising à température nulle). On va voir dans la suite que le point fixe  $J_1^*$  s'identifie au point critique du modèle d'Ising, et que les deux domaines  $[0, J_1^*[$  et  $]J_1^*, \infty]$  correspondent aux deux phases du modèle (resp. désordonnée et ordonnée).

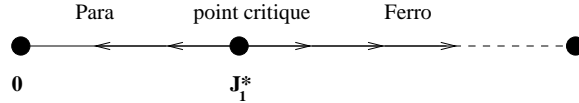


FIG. 13 – Les 3 points fixes de la transformation de renormalisation pour le couplage d'Ising et leur interprétation

## 5.4 Points fixes et variétés critiques

L'analyse du groupe de renormalisation consiste à regarder quelle est la géométrie des transformations du groupe de renormalisation dans l'espace des Hamiltoniens. Dans cette analyse un rôle essentiel est joué par les points fixes du groupe de renormalisation, c'est à dire les Hamiltoniens qui ne sont pas changés par les transformations, et par l'analyse de ce qui se passe au voisinage de ces points fixes.

### 5.4.1 Idée générale : topologie des flots et phases du système

On suppose donc valides les hypothèses suivantes (déjà discutées) :

1. Les flots  $\kappa \rightarrow \kappa(S)$  du groupe de renormalisation sont des fonctions régulières des couplages  $\kappa$ .



2. On peut les traiter comme des flots continus en  $s = \log(S)$ , engendrés par le champ de vecteur  $W$  donné par les fonctions de Wilson

$$\frac{\Delta\kappa}{\Delta s} = W(\kappa) \rightarrow \frac{d\kappa}{ds} = W(\kappa) \quad (149)$$

Alors la structure globale des flots sera décrite par les points fixes et les bassins d'attraction. De façon générale, on s'attend à ce que

1. Le bassin d'attraction  $A$  d'un point fixe stable  $\kappa_A$  correspond à une phase donnée du système. Pour toute valeur des couplages microscopiques  $\kappa \in A$ , les propriétés macroscopiques (grande distance) du système seront les mêmes, et sont décrites par celle du point fixe.

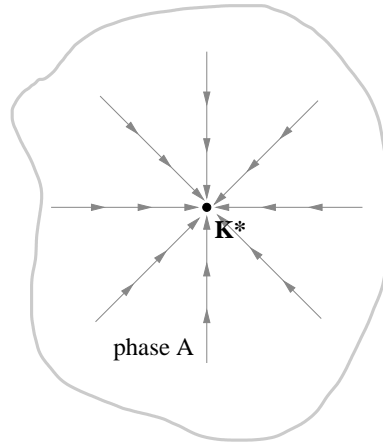


FIG. 14 – Un point fixe attractif des flots du groupe de renormalisation : le bassin d'attraction correspond à une phase du système

2. La frontière entre deux bassins d'attraction  $A$  et  $B$  est une variété  $S$  de codimension 1 dans l'espace des couplages. Elle correspond à la transition entre ces deux phase : si on fait varier continuellement un des paramètres, pas exemple la température, on se déplace dans l'espace des couplages et quand on traverse la surface  $S$ , les propriétés macroscopiques du système changent de  $A$  à  $B$ .  $S$  est donc la surface critique, ensemble des couplages correspondants à un point critique entre les phases  $A$  et  $B$ .
3. Cette variété critique est stable sous les flots du groupe de renormalisation et on s'attend donc à ce qu'elle contienne un point fixe  $\kappa^*$  des transformations du groupe de renormalisation, avec une seule direction instable. La variété critique est le bassin d'attraction de ce point fixe  $\kappa^*$ , qui va donc décrire les propriétés à grande distance du système au point critique.

On va donc étudier les propriétés des flots au voisinage d'un tel point fixe et leurs conséquences.

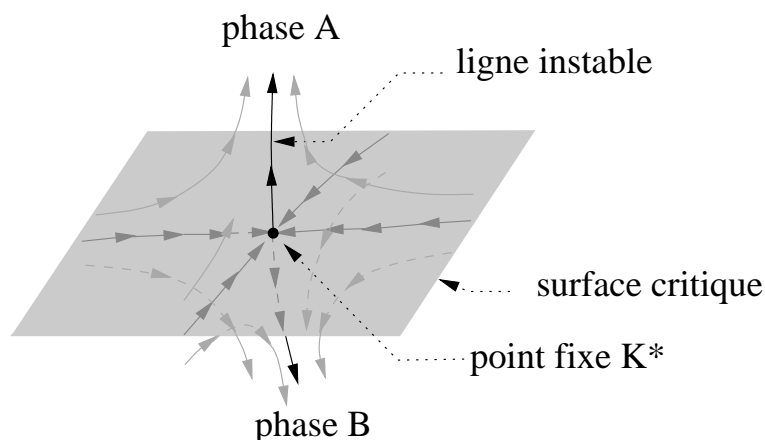


FIG. 15 – Les flots du groupe de renormalisation au voisinage d'un point fixe avec une direction instable : son bassin d'attraction est la surface critique qui sépare deux phases du système.

**NB :** En théorie les flots du groupe de renormalisation peuvent avoir des cycles limites, voire des comportements plus complexes (attracteurs étranges, chaos...). En pratique ce n'est pas le cas dans les modèles standards ; et il y a des raisons profondes pour ça : par exemple le théorème c (prouvé pour  $D = 2$ ) implique que les flots du groupe de renormalisation sont des gradients.

## 5.5 Linéarisation au voisinage d'un point fixe : champs et dimensions d'échelle

Les propriétés locales des flots du groupe de renormalisation au voisinage d'un point fixe suffisent déjà pour déterminer beaucoup de caractéristiques des points critiques, en particulier les propriétés d'universalités et des lois d'échelle.

### 5.5.1 Linéarisation des flots

Un point fixe est un zéro des fonctions de Wilson, donc au voisinage d'un point fixe  $\kappa^*$  on peut linéariser les flots

$$W^\alpha(\kappa) = W_\beta^\alpha(\kappa^\beta - \kappa^{*\beta}) + O(|\kappa - \kappa^*|^2) \quad (150)$$

$$W_{\beta}^{\alpha} = \left. \frac{\partial W^{\alpha}}{\partial \kappa^{\beta}} \right|_{\kappa^*} \quad (151)$$

Ensuite on suppose que la matrice  $W_{\beta}^{\alpha}$  est diagonalisable et que ses valeurs propres sont réelles<sup>5</sup>. Les vecteurs propres définissent un système de coordonnées locales  $\kappa \rightarrow g = \{g^{\alpha}\}$  tel que le point fixe soit à l'origine

$$g^* = 0 \quad (152)$$

et tel que (au moins au premier ordre) la matrice  $W_{\beta}^{\alpha}$  sont diagonale

$$W_{\beta}^{\alpha} = \lambda_{\alpha} \delta_{\beta}^{\alpha} \quad \text{c.a.d.} \quad W^{\alpha}(g) = \lambda_{\alpha} g^{\alpha} + \mathcal{O}(g^2) \quad (153)$$

### 5.5.2 Couplages et opérateurs d'échelle

Ceci equivaut à écrire le Hamiltonien  $\mathcal{H}$  comme une perturbation du Hamiltonien correspondant au point fixe  $\mathcal{H}^*$ , perturbation obtenue en ajoutant les opérateurs  $O_{\alpha}$ , avec leur couplage  $g^{\alpha}$

$$\mathcal{H}[\phi] = \mathcal{H}^*[\phi] + \int d^D x \sum_{\alpha} g^{\alpha} O_{\alpha}[\phi] \quad (154)$$

Les couplages  $g^{\alpha}$  sont appelés *couplages* ou *champs d'échelle* (*scaling fields*). Ils mesurent l'amplitude de la perturbation du Hamiltonien au point fixe par des opérateurs associés  $O_{\alpha}(\phi)$ , les *opérateurs d'échelle* (*scaling operators*). La dénomination *champ d'échelle* vient du fait qu'on peut voir les  $g^{\alpha}$  comme des champs externes couplés aux opérateurs  $O_{\alpha}$ . Ils se transforment simplement sous les transformations de renormalisation puisque

$$\frac{dg^{\alpha}}{ds} = \lambda_{\alpha} g^{\alpha} + \mathcal{O}(g^2) \quad \Rightarrow \quad g^{\alpha}(S) = S^{\lambda_{\alpha}} g^{\alpha} \quad (155)$$

### 5.5.3 Dimensions d'échelle

La valeur propre  $\lambda^{\alpha}$  de  $W_{\beta}^{\alpha}$  associée au couplage  $g^{\alpha}$  est appelée naturellement la *dimension d'échelle* (*scaling dimension*) de  $g^{\alpha}$ .

$$\lambda^{\alpha} = \dim[g^{\alpha}] = \Delta_{g^{\alpha}} \quad \text{dimension d'échelle de } g^{\alpha} \quad (156)$$

---

<sup>5</sup> Ceci est vérifié dans la plupart des cas. Ce fait est d'abord une observation «expérimentale». Dans un grand nombre de problèmes physiques on peut montrer que la matrice  $W$  est diagonalisable, soit sur la base de calculs explicites (développement en  $\epsilon$ ), soit par des arguments généraux. Les situations où les valeurs propres de  $W$  sont complexes (flots du groupe de renormalisation en spirale), ou bien où  $W$  n'est pas diagonalisable sont plus rares, mais se rencontrent par exemple dans certains systèmes désordonnés.

De même la dimension d'échelle de l'opérateur associé  $O_\alpha$  est

$$\Delta_{O_\alpha} = \dim[O_\alpha] = D - \lambda^\alpha \quad \text{dimension d'échelle de } O_\alpha \quad (157)$$

NB : c'est en accord avec les définitions déjà données pour le champ  $\phi$  et le terme source  $h$ .

$$\Delta = \Delta_\phi = \dim[\phi] \quad ; \quad \dim[h] = D - \Delta \quad (158)$$

## 5.6 Couplages essentiels, inessentiels et marginaux

Le signe de la dimension du couplage  $g$  détermine si le flot du groupe de renormalisation est attractif ou répulsif dans cette direction. Si le flot est répulsif le couplage est dit *pertinent* ou *essentiel* (*relevant* en [fr]anglais), si le flot est attractif le couplage est dit *non pertinent* ou *inessentiel* (*irrelevant* en [fr]anglais), si la dimension est nulle le couplage est dit *marginal*. Les mêmes dénominations s'appliquent à l'opérateur associé  $O$ .

couplage relevant	$\lambda > 0$	opérateur relevant	$\Delta < D$	(159)
couplage irrelevant	$\lambda < 0$	opérateur irrelevant	$\Delta > D$	
couplage marginal	$\lambda = 0$	opérateur marginal	$\Delta = D$	

En première approximation seuls les couplages essentiels jouent un rôle dans le comportement aux grandes échelles  $S \rightarrow \infty$ . En conséquence la connaissance de leur dimension d'échelle (et donc de celle des opérateurs correspondants) va déterminer les exposants critiques.

## 6 Exposants critiques, lois d'échelle et universalité

On considère le cas le plus simple : le point fixe ne possède qu'une seule direction instable, il y a donc un seul couplage relevant  $g_0$  tel que  $\lambda_0 > 0$ . Les autres couplages  $g_\alpha$  sont irrelevantes ( $0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots$ ). La surface critique (bassin d'attraction du point fixe) est donc de codimension 1, et sépare les deux phases  $g_0 > 0$  et  $g_0 < 0$ .

Ce cas s'applique au modèle d'Ising et au modèle de Landau Ginzburg si on traite séparément le champ externe  $h$ , qui est le couplage pour le paramètre d'ordre  $\phi$ . Le champ moyen indique que c'est un couplage essentiel, mais si on fixe  $h = 0$  pour se restreindre aux Hamiltoniens  $\mathcal{H}[\phi]$  invariants  $\mathbb{Z}_2$  ( $\phi \rightarrow -\phi$ ) la discussion suivante reste valable. Le couplage essentiel  $g_0$  est alors donné par l'écart à la température critique  $t = T - T_c/T_c$ , et l'opérateur associé  $O_0$  sera l'opérateur «énergie» qu'on notera  $\varepsilon$ .

## 6.1 Invariance d'échelle au point fixe, exposant $\eta$ :

On se place d'abord au point fixe  $\mathbf{g}^* = 0$ . En utilisant l'eq. 118 pour les fonctions de corrélations

$$\langle \phi(Sx_1) \cdots \phi(Sx_K) \rangle_{\mathbf{g}} = Z(S)^{-K} \langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_K) \rangle_{\mathbf{g}(S)}$$

puisqu'au point fixe  $\mathbf{g}^*$ , où  $\mathbf{g}(S) = \mathbf{g}^*$  et  $Z(S) = S^{\Delta(\mathbf{g}^*)}$  où  $\Delta(\mathbf{g}^*) = \Delta_\phi^*$  est la dimension d'échelle du champ  $\phi$  au point fixe, on obtient immédiatement

$$\langle \phi(Sx_1) \cdots \phi(Sx_K) \rangle_{\mathbf{g}^*} = S^{-K\Delta^*} \langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_K) \rangle_{\mathbf{g}^*} \quad (160)$$

Au point fixe les fonctions de corrélations sont donc invariantes d'échelle, et la longueur de corrélation est infinie. En particulier la fonction à deux points se comporte comme  $\langle \phi(x)\phi(y) \rangle \propto |x-y|^{-2\Delta^*}$  et vu la définition de l'exposant  $\eta$  on obtient

$$\eta = D + 2 - 2\Delta_h = 2 - D + 2\Delta^* \quad , \quad \Delta^* = \Delta_\phi(\kappa^*) \quad (161)$$

## 6.2 Longueur de corrélation et exposant $\nu$ :

On considère maintenant le système au voisinage du point fixe. Dans un premier temps on néglige les couplages inessentiels  $g_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots$ , et donc seul  $g_0 \neq 0$  (on est sur la ligne instable). Puisqu'on est en dehors de la surface critique, on est dans une phase massive et la longueur de corrélation  $\xi$  est maintenant grande mais finie. On ne connaît pas la valeur exacte  $\xi(g_0)$ , mais on sait que

$$\xi(g_0(S)) = \frac{1}{S} \xi(g_0) \quad \text{et} \quad g_0(S) = S^{\lambda_0} g_0 \quad (162)$$

On connaît donc la dépendance en  $g_0$  de  $\xi$

$$\xi(g_0) \propto |g_0|^{-\frac{1}{\lambda_0}} \quad (163)$$

et puisque  $\lambda_0 > 0$ , la longueur de corrélation  $\xi$  devient bien infinie au point fixe critique  $g_0 = 0$ .

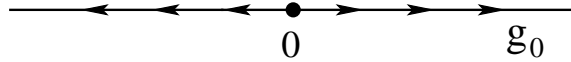


FIG. 16 – Flots du groupe de renormalisation au point fixe avec un seul couplage essentiel  $g_0$

Pour le modèle d'Ising ou le modèle de Landau-Ginsburg le couplage important  $\kappa$  est la température et le couplage (champ) d'échelle  $g_0$  est donc est relié à l'écart au point critique

$$g_0 \propto T - T_c \quad (164)$$

On a le résultat très important que l'exposant critique de la longueur de corrélation  $\nu$  est donné par l'inverse de la dimension du couplage le plus relevant au point fixe

$$\nu = \frac{1}{\lambda_0} = \frac{1}{\dim[g_0]} \quad (165)$$

Donc les deux exposants  $\eta$  et  $\nu$  sont directement reliés aux dimensions d'échelle du champ  $\phi$  et du couplage essentiel  $g_0$  au point fixe.

### 6.3 Universalité des lois d'échelle sur la surface critique

Il faut maintenant vérifier que la prise en compte des autres couplages inessentiels ne modifie pas ces résultats.

En général, pour un système donné (par exemple le modèle d'Ising avec couplages entre plus proches voisins) au point critique, c'est à dire à la température critique  $T_c$  on n'est jamais au point fixe mais seulement quelque part sur la surface critique (variété stable de codimension 1), à une distance finie du point fixe. Si on est sur la surface critique, mais pas exactement au point fixe (cas général), il faut tenir compte des couplages irrelevants et estimer si ils modifient ou non les comportements d'échelle.

Je considère ici pour simplifier un cas simple où il y a un seul opérateur irrelevant  $O_1$  avec le couplage  $g_1$  (de dimension  $\lambda_1 < 0$ ) et où on est toujours suffisamment près du point fixe pour pouvoir linéariser les flots du groupe de renormalisation (et donc considérer que la dimension du paramètre d'ordre  $\Delta_\phi = \Delta$  est constante).



FIG. 17 – Flots du groupe de renormalisation sur la surface critique avec un seul couplage inessential  $g_1$

Je suppose donc que je suis à un point critique, donc sur la surface critique  $g_0 = 0$ , mais à une distance finie du point fixe, donc  $g_1 \neq 0$ . La fonction à deux points se comporte toujours comme

$$\langle \phi(Sx_1)\phi(Sx_2) \rangle_{g_1} = S^{-2\Delta^*} \langle \phi(x_1)\phi(x_2) \rangle_{g_1(S)}$$

mais comme  $g_1(S) \propto S^{\lambda_1}$  est petit quand  $S \rightarrow \infty$ , puisque  $\lambda_1 < 0$  on peut développer au voisinage du point fixe

$$\begin{aligned} &= S^{-2\Delta^*} [\langle \phi(x_1)\phi(x_2) \rangle_{g_1=0} + \mathcal{O}(g_1(S))] \\ &= S^{-2\Delta^*} \langle \phi(x_1)\phi(x_2) \rangle_{g_1=0} + \mathcal{O}(S^{-2\Delta^*+\lambda_1}) \end{aligned}$$

donc on trouve finalement que le comportement à grande distance de la fonction à deux points est de la forme

$$\langle \phi(x)\phi(y) \rangle \propto |x-y|^{-2\Delta_h} (A + B|x-y|^{\lambda_1} + \dots) \quad (166)$$

Cet argument se généralise simplement à plusieurs couplages inessentiels, et aux fonctions à  $N$  points. On a donc montré deux choses.

1. **L'universalité du comportement d'échelle** à grande distance des fonctions de corrélations **sur la surface critique**.
2. En général il existe des corrections sous dominantes à ce comportement d'échelle. Ces corrections sont elles-mêmes des puissances de  $|x-y|$  universelles, données par les dimensions d'échelle des couplages inessentiels, l'amplitude de ces corrections n'est pas universelle mais dépend de la position sur la surface critique.

## 6.4 Universalité de l'approche au point critique, limite continue, fonctions d'échelles

Regardons maintenant ce qui se passe quand on s'approche d'un point critique général, c'est à dire qu'on s'approche de la surface critique en restant à une distance finie du point fixe. Pour simplifier on va d'abord considérer le cas où il y a le couplage essentiel  $g_0$  et un seul couplage inessential  $g_1$ , et où on peut linéariser les flots.

### 6.4.1 Longueur de corrélation

On se place d'un côté donné de la surface critique (par exemple  $g_0 > 0$ ), et on choisit un point de référence  $\mathbf{R}$  sur la ligne instable, c'est à dire un couplage  $g_0^r \neq 0$ . La longueur de corrélation  $\xi_0 = \xi(g_0^r, 0)$  est finie en ce point, et varie continuellement avec les couplages  $g_0$  et  $g_1$  au voisinage de ce point. On sait déjà que  $\xi_0 \propto |g_0^r|^{1/\lambda_0}$ .

On est intéressé en fait au comportement de  $\xi$  quand on s'approche d'un point critique  $\mathbf{c}$  sur la surface critique qui n'est pas le point fixe  $\mathbf{0}$  (voir la figure), c.a.d.

$$g_0 \rightarrow 0, \quad g_1 \neq 0 \text{ fixé} \quad (167)$$

Pour cela on va suivre les flots du groupe de renormalisation à partir d'un tel couplage microscopique jusqu'au voisinage du point  $R$ , et pour cela ajuster le facteur d'échelle  $S = S(g_0)$  pour que

$$g_0(S) = g_0^r \quad \Rightarrow \quad S(g_0) = [g_0/g_0^r]^{-\frac{1}{\lambda_0}} \quad (168)$$

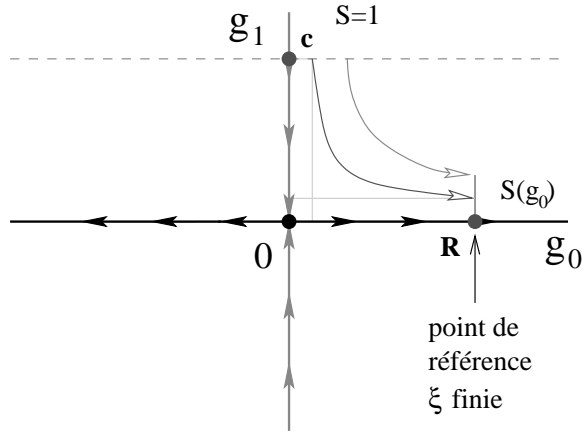


FIG. 18 – Flots du groupe de renormalisation au voisinage de la surface critique  $g_0 \rightarrow 0$  mais à distance finie du point fixe ( $g_1 \neq 0$ ).

Ce facteur d'échelle diverge quand on s'approche de la surface critique ( $S(g_0) \rightarrow +\infty$  quand  $g_0 \rightarrow 0$ ) et donc dans cette limite on s'approche de plus en plus du point  $\mathbf{R}$

$$g_1(S(g_0)) = S(g_0)^{\lambda_1} g_1 = [g_0/g_0^r]^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_0}} g_1 \rightarrow 0 \quad \text{puisque } \lambda_1 < 0 .$$

Autrement dit, le groupe de renormalisation envoie le voisinage de  $\mathbf{c}$  dans un voisinage de l'axe instable  $[\mathbf{0}, \mathbf{R}]$ . Mais la longueur de corrélation obéit à la relation d'échelle

$$\xi(g_0, g_1) = S \xi(g_0(S), g_1(S))$$

et elle est analytique dans les couplages au voisinage de  $\mathbf{R}$ , donc on peut développer  $\xi$  en  $g_1(S)$ . On obtient donc un développement en

$$\xi(g_0, g_1) = S \xi(g_0^r, g_1 S^{\lambda_1}) = [g_0/g_0^r]^{-\frac{1}{\lambda_0}} \left[ \xi_0 + [g_0/g_0^r]^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_0}} g_1 \partial_{g_1} \xi(g_0^r, 0) + \dots \right] \quad (169)$$

On voit que là aussi, si on ne traverse la surface critique en un point qui est à une distance finie du point fixe, on obtient juste des corrections sous dominantes à la divergence de la longueur de corrélation, corrections qui sont de la forme générale

$$\xi \underset{g_0 \rightarrow 0}{=} |g_0|^{-\frac{1}{\lambda_0}} \left[ a_0(g_1) + a_1(g_1) |g_0|^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_0}} + \dots \right]$$

où les coefficients  $a_0, a_1$  sont des fonctions régulières du couplage inessential  $g_1$ . Enfin, notons que bien que l'argument dépende du choix d'un point de référence  $\mathbf{R}$ , le résultat final n'en dépend pas.



Le même argument peut être répété de l'autre coté du point critique  $g_0 < 0$ . On obtient un développement de la même forme, mais avec des coefficients  $a_0, a_1$  différents puisqu'on doit utiliser un point de référence  $\mathbf{R}'$  différent.

### 6.4.2 Exposants de corrections aux lois d'échelle

Dans le cas du modèle d'Ising par exemple, ceci implique que la longueur de corrélation diverge au point critique comme

$$\xi(T) \underset{T \rightarrow T_c}{=} |T - T_c|^{-\nu} [A_{\pm} + B_{\pm} |T - T_c|^{\omega} + \dots] \quad (170)$$

L'exposant  $\nu$  est toujours donné par 165 et est bien universel. Les coefficients  $A, B$  etc. sont différents si  $T > T_c$  (cas + phase désordonnée) ou si  $T < T_c$  (cas - phase ordonnée). Les premières corrections aux lois d'échelle sont décrites par un autre exposant  $\omega > 0$ . Cet exposant est aussi obtenu par les valeurs propres des équations de flot linéarisées, et est donc un autre exposant critique universel

$$\omega = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \quad (171)$$

Donc on a bien vérifié l'universalité des lois d'échelle pour  $\xi$  à l'approche du point critique.

**NB :** Cet argument se généralise au cas de plusieurs couplages inessentiels  $g_{\alpha}$  et au delà de l'approximation des flots linéarisés, auquel cas des termes analytiques dans la température se rajoute. De façon générale les corrections au comportement d'échelle de  $\xi$  dans le domaine critique fait intervenir des puissances de  $|T - T_c|^{\bar{\omega}}$  avec les exposants  $\bar{\omega} = n_0 + \sum_{\alpha \geq 1} n_{\alpha} \omega_{\alpha}$ ,  $\omega_{\alpha} = -\lambda_{\alpha} / \lambda_0$ ,  $n_{\alpha} \in \mathbb{N}$ .

### 6.4.3 Limite continue des fonctions de corrélations et fonctions d'échelle

Ce raisonnement est général et s'applique aux fonctions de corrélations du système. Il conduit à la notion très importante de *fonctions d'échelle*, qui est cruciale pour dériver les relations d'échelle entre exposants critiques.

La procédure précédente consiste à s'approcher d'un point  $c$  sur la surface critique en faisant  $g_0 \rightarrow 0$  et à simultanément rescaler toutes les distances  $x \rightarrow x'$  de façon à ce qu'elles soient proportionnelles à la longueur de corrélation du système. En effet la procédure consiste à choisir un point de référence  $\mathbf{R}$  sur la ligne instable  $g_0^r$  caractérisé par une longueur de corrélation finie  $\xi(g_0^r, g_1 = \dots = 0) = \xi_0^r < \infty$  et à rescaler par le facteur

$$S = \xi / \xi_0 \quad (172)$$

Les fonctions de corrélations (par exemple à deux points) se comportent comme

$$\begin{aligned} \langle \phi(x_1)\phi(x_2) \rangle_{g_0, g_1 \dots} &= \left[ \frac{\xi}{\xi_0} \right]^{-2\Delta^*} \langle \phi(x_1/S)\phi(x_2/S) \rangle_{g_0^r, g_1(S)} \\ &= \left[ \frac{\xi}{\xi_0} \right]^{-2\Delta^*} \left[ \langle \phi(x_1/S)\phi(x_2/S) \rangle_{g_0^r} + O(g_0^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_0}}) \right] \end{aligned} \quad (173)$$

et ceci se généralise à la fonction connexe  $\langle \phi\phi \rangle^{\text{conn.}} = \langle \phi\phi \rangle - \langle \phi \rangle \langle \phi \rangle$ , et aux fonctions (connexes) à  $K$  points. Autrement dit, quand on s'approche de la surface critique, les fonctions de corrélations à  $K$  points prennent une forme universelle donnée par

$$\langle \phi(x_1) \dots \phi(x_K) \rangle \simeq \xi^{-K\Delta^*} G_K(x_1/\xi, \dots, x_K/\xi) \quad (174)$$

où les *fonctions d'échelle* universelles  $G_K(z_1, \dots, z_K)$  sont données par les fonctions de corrélations de la théorie au point  $\mathbf{R}$ , donc *sur la ligne instable* (correspondant à la perturbation du point fixe par le couplage essentiel  $g_0$ ).

$$G_K(z_1, \dots, z_K) = \xi_0^{K\Delta^*} \langle \phi(z_1\xi_0) \dots \phi(z_K\xi_0) \rangle_{\mathbf{R}} \quad (175)$$

$\Delta^*$  est la dimension d'échelle du champ  $\phi$  au point fixe  $\mathbf{0}$ , et  $\xi_0 = \xi(\mathbf{R})$  la longueur de corrélation au couplage de référence  $R$  sur la ligne instable.

Notons que s'ajoute à la définition des fonctions d'échelle des termes réguliers dépendant de la normalisation des champs  $\phi$  et en général (si on est en dehors du domaine de linéarisation des flots du groupe de renormalisation) des couplages inessentiels  $g_1$ , etc. Donc en général la relation 174 fera intervenir une constante multiplicative  $\mathcal{C}_{\mathbf{c}}$  dépendant du point critique  $\mathbf{c}$  sur la surface critique au voisinage duquel on étudie la limite d'échelle, mais dépendant de façon régulière de  $\mathbf{c}$ , c'est à dire des couplages inessentiels qui paramétrisent la surface critique

$$\langle \phi(x_1) \dots \phi(x_K) \rangle \simeq \mathcal{C}_{\mathbf{c}}^K \xi^{-K\Delta^*} G_K(x_1/\xi, \dots, x_K/\xi)$$

Là encore, les fonctions d'échelle sont différentes si on est d'un coté ou de l'autre de la variété critique, mais auront le même comportement d'échelle à courte distance. Par contre leur comportement à grande distance dépendra de la phase du système.

Contrairement aux fonctions de corrélations du modèle de départ, dont le comportement à courte distance dépend du régulateur à courte distance (réseau), les fonctions d'échelle ont un comportement à courte distance universel donnée par la théorie au point fixe. Comme on va le voir plus loin, ces fonctions d'échelle sont les fonctions de corrélations d'une théorie continue, et peuvent s'identifier aux fonctions de corrélations d'une théorie quantique des champs Euclidienne. Le groupe de renormalisation révèle donc une relation profonde entre les phénomènes critique et les théories quantiques des champs.

**Point fixe**  $\Rightarrow$  théorie continue invariante d'échelle (masse nulle) décrivant les propriétés universelles (à grande distance) de l'ensemble des points critiques (surface critique).

**Ligne instable**  $\Rightarrow$  théorie continue massive décrivant les propriétés d'échelle (c.a.d. à l'échelle de la longueur de corrélation  $\xi$ ) universelles près du point critique. Cette théorie est obtenue en perturbant la théorie de masse nulle par un opérateur relevant  $\mathcal{O}_i$ . Cette théorie des champs dépend des couplages pertinents  $g_i$ , il y a autant de constantes de couplages que de directions instables au point fixe.

## 6.5 Au delà de la linéarisation : universalité et domaine critique

Tous les arguments donnés ici ont utilisé de façon cruciale le fait qu'on était suffisamment près du point fixe pour qu'on puisse linéariser les équations de flot. Ils sont valables même si on traverse la surface critique loin du point fixe.

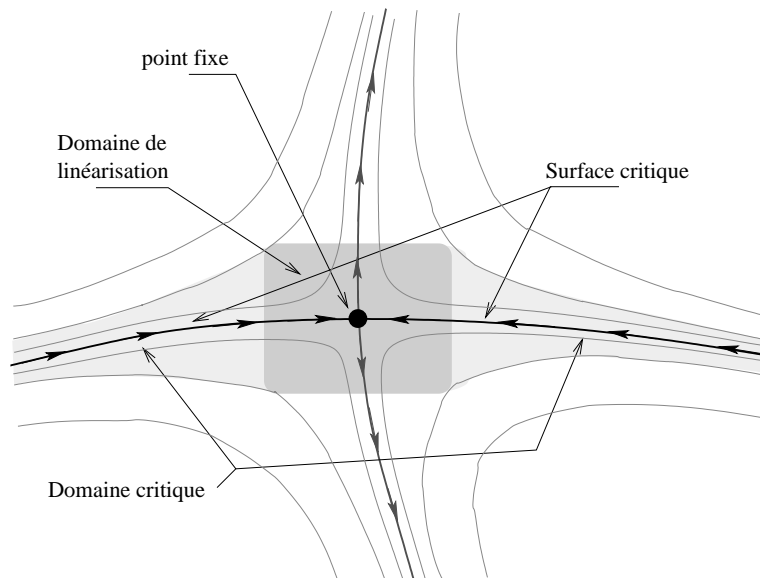


FIG. 19 – Le domaine critique est le voisinage de la surface critique d'où sont issus les flots du groupe de renormalisation qui passent suffisamment près du point fixe pour que l'approximation de linéarisation des flots du groupe de renormalisation soit valide.

En effet si on est suffisamment près de la surface critique mais à une distance finie du point fixe, les flots du groupe de renormalisation nous amènent près du point fixe avant que le couplage pertinent l'emporte et que l'on soit finalement éjecté loin de la variété critique. L'important pour observer le comportement d'échelle caractérisé par le point fixe est que le flot du groupe de renormalisation nous amène en un «temps»  $s_1 = \log(S_1) = \mathcal{O}(1)$  fini dans le domaine où la linéarisation des flots est valable et nous y laisse pendant un temps  $s_2 = \log(2) \gg 1$  suffisamment grand par rapport au

temps total avant d'en être finalement éjecté. D'où la définition du domaine critique dans le formalisme du groupe de renormalisation.

Domaine critique = voisinage de la surface critique tel que les flots du groupe de renormalisation passent un «temps»  $s_2 = \log(S_2)$  beaucoup plus grand dans le voisinage du point fixe où la linéarisation des flots est valable que le temps  $s_1 = \log(S_1)$  nécessaire pour arriver dans ce domaine, donc tel que  $s_2 \gg s_1$ . Dans ces conditions les comportements d'échelle sont observés et sont toujours décrits par le même point fixe. Ils sont donc dans la même classe d'universalité.

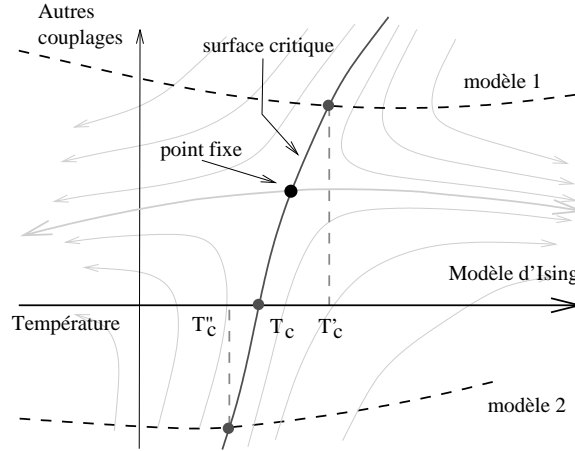


FIG. 20 – Illustration de l'argument général pour l'universalité. Quand on fait varier la température pour différents systèmes, les couplages microscopiques varient différemment et les températures critiques  $T_c, T_c', T_c''$ , telles qu'on traverse la surface critique sont différentes. Au voisinage des points critiques la physique à grande distance  $\ell \geq \xi$  est universelle, et décrite par le point fixe et sa variété instable.

## 6.6 Autres exposants et relations d'échelle en $D < 4$

Il reste à démontrer les relations d'échelle qui permettent de calculer les autres exposants critiques  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  pour les systèmes magnétiques.

Nous avons tout ce qu'il faut en supposant que le point critique correspond à un point fixe non trivial. Il faut utiliser le fait que pour les systèmes magnétiques y a en fait deux couplages pertinents :

1. le couplage  $t$  ( $\sim T - T_c$  température réduite) couplé à l'opérateur énergie  $\mathcal{E} \simeq \phi^2$  (opérateur pair pour la symétrie  $\mathbb{Z}_2 : \phi \rightarrow -\phi$ ), c'est le couplage considéré jusqu'à présent ;
2. le champ externe  $h$ , couplé à l'opérateur de champ  $\sigma = \phi$  (opérateur impair).

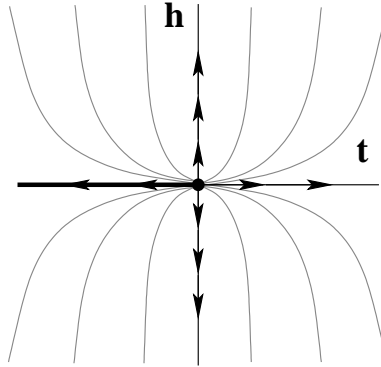


FIG. 21 – Les flots du groupe de renormalisation pour le modèle d’Ising en fonction des deux couplages essentiels  $t$  (température réduite) et  $h$  (champ magnétique)

Leurs dimensions sont reliées aux exposants  $\eta$  et  $\nu$  par

$$\Delta_t = \frac{1}{\nu}, \quad \Delta_\sigma = \frac{D-2+\eta}{2}, \quad \Delta_\varepsilon = D - \Delta_\sigma, \quad \Delta_h = D - \Delta_\sigma \quad (176)$$

**Susceptibilité magnétique  $\chi$  et exposant  $\gamma$  :** La susceptibilité magnétique  $\chi$  est reliée à la fonction à deux points, qui prend la forme d’une fonction d’échelle près du point critique ( $|t| \ll 1, h = 0$ )

$$\chi = \int d^D x \langle \sigma(x) \sigma(0) \rangle^c = \int d^D x \xi^{-2\Delta_\sigma} H(x/\xi) \propto \xi^{D-2\Delta_\sigma}$$

comme  $\xi$  diverge comme  $|t|^{-\nu} = t^{-1/\Delta_t}$  (pour  $h = 0$ ) on obtient  $\chi \propto |t|^{\frac{2\Delta_\sigma - D}{\Delta_t}}$  donc

$$\gamma = \frac{D - 2\Delta_\sigma}{\Delta_t} = \nu(2 - \eta) \quad (177)$$

**Chaleur spécifique  $C_v$  et exposant  $\alpha$  :** Même argument, la partie singulière de la chaleur spécifique est donnée par l’intégrale de la fonction à deux points pour l’opérateur d’énergie  $\mathcal{E}$ , qui à une limite d’échelle

$$C_v = \int d^D x \langle \mathcal{E}(x) \mathcal{E}(0) \rangle^c = \int d^D x \xi^{-2\Delta_\varepsilon} H(x/\xi) \propto \xi^{D-2\Delta_\varepsilon} \propto |t|^{\frac{2\Delta_\varepsilon - D}{\Delta_t}} \quad (178)$$

et donc

$$\alpha = \frac{D - 2\Delta_\varepsilon}{\Delta_t} = 2 - \nu D \quad (179)$$

**Aimantation  $\mathcal{M}$ , exposants  $\beta$  et  $\delta$  :** Enfin l'aimantation est donnée par la fonction à un point, qui scale avec la longueur de corrélation comme

$$\mathcal{M} = \langle \sigma \rangle \propto \xi^{-\Delta_\sigma} \quad (180)$$

Quand  $h = 0, t \rightarrow 0_-$  on a vu que  $\xi \propto |t|^{-1/\Delta_t}$ ; donc

$$\beta = \frac{\Delta_\sigma}{\Delta_t} = \frac{\nu}{2}(D - 2 - \eta) \quad (181)$$

Quand  $t = 0, h \neq 0$  c'est maintenant  $h$  qui joue le rôle du couplage essentiel. Les mêmes arguments s'appliquent en remplaçant  $t$  par  $h$ , et donc la longueur de corrélation diverge quand  $h \rightarrow 0$  comme  $\xi \propto |h|^{-1/\Delta_h}$ , si bien que

$$\delta = \frac{\Delta_h}{\Delta_\sigma} = \frac{D + 2 - \eta}{D - 2 + \eta} \quad (182)$$

## 7 Renormalisation du modèle de LGW dans l'approximation du potentiel local

Je donne maintenant un exemple de calcul de Groupe de Renormalisation avec une théorie continue (le modèle de Landau-Ginzburg-Wilson) et des transformations d'échelle continues dans l'espace des  $k$ . L'idée de base est de partir de la théorie de Landau, donc du Hamiltonien de Landau-Ginzburg, et de tenir compte au premier ordre en  $T$  des fluctuations thermiques dans un calcul de groupe de renormalisation.

Attention, ce calcul nécessite un peu de connaissance de théorie quantique des champs, en particulier on utilise un régulateur continu dans l'espace des moments, pas un régulateur dans l'espace des positions de type réseau.

Partons d'un modèle avec un paramètre d'ordre continu  $\phi(x)$  et un Hamiltonien de Landau-Ginzburg  $\mathcal{H}[\phi]$  avec un potentiel local  $V(\phi)$  pour l'instant non précisé.

$$\mathcal{H}[\phi] = \int d^D x \left[ \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi) \right] \quad (183)$$

La fonction de partition est formellement

$$Z = \sum_{\phi} \exp \left[ -\frac{1}{T} \mathcal{H}[\phi] \right]$$

et le potentiel effectif est défini  $\Gamma[\varphi]$  comme en physique statistique : on introduit le terme source (champ externe)  $h(x)$ , la fonctionnelle connexe  $W[h]$  est le logarithme

de la fonction de partition dans le champ  $h$ , et le potentiel effectif sa transformée de Legendre, fonction du champ de fond (aimantation moyenne)  $\varphi(x)$

$$W[h] = T \log \left[ \sum_{\phi} e^{-\frac{1}{T}(\mathcal{H}[\phi] - h\phi)} \right] , \quad \Gamma[\varphi] = \int_x h\varphi - W[h] , \quad (184)$$

$$\varphi(x) = \frac{\delta}{\delta h(x)} W[h] \quad (185)$$

## 7.1 Régularisation dans l'espace des moments :

Pour définir proprement la somme sur les configurations  $\sum_{\phi}$ , au lieu de considérer le modèle sur un réseau (carré) de maille  $a$ , ce qui revient à limiter les fréquences spatiales de  $\phi$  à la zone de Brillouin

$$\hat{\phi}(k) \text{ défini dans la zone de Brillouin } k_{\mu} \in [-\pi/a, \pi/a] \quad (186)$$

nous allons utiliser un régulateur «dur» ("sharp") dans l'espace des moments, en définissant la somme sur les champs  $\phi$  comme la somme sur les modes  $\hat{\phi}$  de moments plus petits qu'une certaine échelle de moment  $\Lambda$

$$\hat{\phi}(k) \neq 0 \Leftrightarrow |k| < \Lambda \quad (187)$$

$\Lambda$  est un régulateur ultra-violet  $\sim \pi/a$ . Autrement dit, dans l'intégration sur les modes de  $\phi$  la zone de Brillouin de taille  $2\pi/a$  est remplacée par la boule de rayon  $\Lambda$  (voir figure)

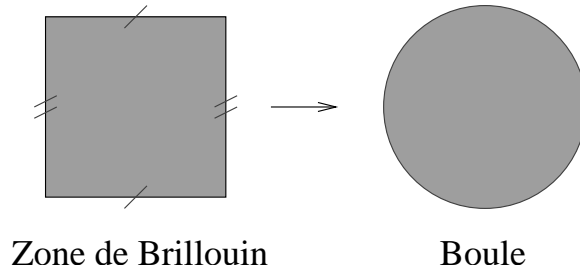


FIG. 22 – Régularisation sur réseau versus régularisation «dure» dans l'espace des moments

**Potentiel effectif :** Nous admettrons ici que le potentiel effectif est donné à l'ordre d'une boucle (c'est à dire au premier ordre en température  $T$ ) par

$$\Gamma[\varphi] = \mathcal{H}[\varphi] + \frac{T}{2} \text{tr} \log [-\Delta + V''(\varphi)] + \mathcal{O}(T^2) \quad (188)$$

(ceci généralise le résultat classique pour le champ libre). Si les gradients de  $\varphi$  dans le  $\text{tr} \log [-\Delta + V''(\varphi)]$  sont négligés (c'est à dire qu'on suppose que le champ de fond varie lentement par rapport à l'échelle de courte distance  $|\nabla\varphi| \ll 1$ ), le  $\text{tr} \log$  (qui est une quantité non-locale) peut être approximé par une quantité locale

$$\text{tr} \log [-\Delta + V''(\varphi)] \simeq \int d^D x \langle x | \log [-\Delta + V''(\varphi(x))] | x \rangle \quad (189)$$

et nous obtenons alors (en tenant compte du régulateur)

$$\text{tr}_\Lambda \log [-\Delta_x + V''(\varphi)] = \int d^D x \int_{|k| < \Lambda} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \log [(k^2 + V''(\varphi(x)))/\Lambda^2] \quad (190)$$

Notons que l'intégrale sur les moments  $k$  est bornée par le régulateur  $\Lambda$ .

## 7.2 Renormalisation par intégration sur les modes «durs» :

La procédure de renormalisation est la suivante : d'abord effectuons l'intégration sur une «tranche de moments durs»  $k$  tels que

$$\Lambda/B < |k| < \Lambda \quad (191)$$

Le champ moyenné est donné par les modes restants de  $\phi$

$$\tilde{\phi} = \phi_{<} ; \hat{\phi}_{<}(k) = \begin{cases} \hat{\phi}(k) & \text{si } |k| \leq \frac{\Lambda}{B}, \\ 0 & \text{si } |k| > \frac{\Lambda}{B}. \end{cases} \quad (192)$$

avec le cut off

$$\Lambda' = \Lambda/B \quad (193)$$

Nous calculons le Hamiltonien effectif  $\mathcal{H}_{\text{eff}}[\tilde{\phi}]$  comme suit. Pour un champ de fond  $\varphi$  variant lentement (c'est à dire tel que  $\varphi = \varphi_{<} = \tilde{\varphi}$ ), l'action effective  $\Gamma_{\Lambda'}[\varphi]$  obtenue avec  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$  doit être la même que celle obtenue avec  $\mathcal{H}$

$$\Gamma_\Lambda[\varphi] = \Gamma_{\Lambda'}[\varphi] \quad (194)$$

(l'intégration sur les modes durs ne change pas la dynamique des modes mous). On en déduit sans calculs supplémentaires que le Hamiltonien effectif pour  $\tilde{\phi}$  est de la même forme que  $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H}_{\text{eff}}[\tilde{\phi}] = \int d^D x \left[ \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + V_{\text{eff}}(\phi) \right] + \mathcal{O}(T^2) \quad (195)$$



avec

$$V_{\text{eff}}[\tilde{\phi}] = V[\tilde{\phi}] + \frac{T}{2} \int_{\frac{\Lambda}{B} < |k| < \Lambda} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \log \left[ (k^2 + V''(\tilde{\phi})) / \Lambda^2 \right] \quad (196)$$

La deuxième étape du groupe de renormalisation (le rescaling) s'obtient simplement en faisant

$$x = x' B, \quad k = k' / B, \quad \tilde{\phi} = B^{\frac{2-D}{2}} \phi' \quad (197)$$

si bien que le Hamiltonien renormalisé est

$$H'[\phi'] = \int d^D x' \left[ \frac{1}{2} (\nabla \phi')^2 + V_B(\phi') \right] \quad (198)$$

où seul le potentiel local  $V$  est renormalisé  $V \rightarrow V_B$

$$\begin{aligned} V_B(\phi) &= B^D V(B^{-\Delta} \phi) \\ &+ \frac{T}{2} \int_{\Lambda < |k'| < \Lambda B} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \log \left[ (B^{-2} k'^2 + V''(B^{-\Delta} \phi)) / \Lambda^2 \right] + \mathcal{O}(T^2) \end{aligned} \quad (199)$$

Il est clair qu'il faut prendre comme exposant de rescaling  $\Delta$  pour le champ  $\phi$  sa dimension canonique

$$\Delta = \frac{D-2}{2} \quad (200)$$

pour que l'action renormalisée soit de la même forme que l'action de départ.

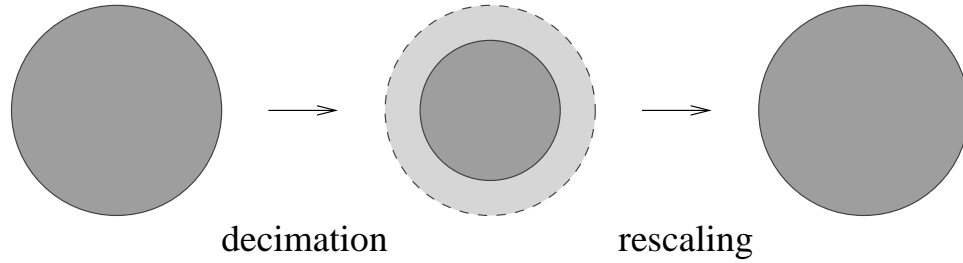


FIG. 23 – Renormalisation dans l'espace des moments avec un régulateur dur  $|k| \leq \Lambda$

### 7.3 Equation de flots du groupe de renormalisation :

Les équations de flot prennent une forme particulièrement simple dans la limite où la tranche de moments est petite, c'est à dire si

$$B = 1 + ds \quad ds \ll 1 \quad (201)$$

auquel cas l'équation s'écrit ( $T$  est absorbé dans les normalisations de  $V$  et de  $\phi$ )

$$V_B(\phi) = V(\phi) + ds \left[ D V(\phi) - \Delta \phi V'(\phi) + \frac{D}{2} \Lambda^D \frac{\mathcal{S}_D}{(2\pi)^D} \log [1 + \Lambda^{-2} V''(\phi)] \right]$$

$\mathcal{S}_D$  est le volume de la sphère unité dans  $\mathbb{R}^D$ ,  $\mathcal{S}_D = 2 \pi^{D/2} / \Gamma(D/2)$ .

En intégrant cette équation pour des  $S = B = (1 + ds)^N$  continus, nous obtenons le potentiel local renormalisé  $V_S(\phi) = V_B(\phi)$ . L'équation de flot du groupe de renormalisation pour  $V_S$  prend la forme d'une équation aux dérivées partielles non-linéaire. Si  $x$ ,  $k$  et  $\phi$  sont normalisés pour que  $\Lambda = 1$ , cette équation de flot s'écrit

$$S \frac{\partial}{\partial S} V_S(\phi) = D V_S(\phi) - \frac{D-2}{2} \phi V_S'(\phi) + \mathbb{A} \log [1 + V_S''(\phi)] \quad (202)$$

avec

$$\mathbb{A} = (4\pi)^{-D/2} / \Gamma(D/2)$$

une constante positive. La valeur exacte de cette constante ne va pas jouer de rôle dans la discussion qui suit sur la structure des flots du groupe de renormalisation et le calcul des exposants critiques dans cette approximation (la valeur de  $\mathbb{A}$  est importante quand on compare les calculs de théorie des champs et ceux du groupe de renormalisation dans l'espace réel).

## 7.4 Flots et points fixes à $D = 4 - \epsilon$

Il est possible d'étudier de façon générale ces équations et la géométrie des flots dans l'espace des potentiels locaux  $V(\phi)$ . Remarquons aussi que dans cette équation la dimension  $D$  de l'espace est juste un paramètre. Nous pouvons donc traiter  $D$  comme une paramètre continu, et regarder ce qui se passe quand  $D$  varie de  $D > 4$  à  $D < 4$ . Faisons maintenant une approximation supplémentaire.

### 7.4.1 Projection sur le potentiel en $\phi^4$ :

Nous nous intéressons à ce qui se passe pour  $D < 4$ , lorsque le point fixe Gaussien  $V(\phi) = 0$  est instable. Supposons que le domaine intéressant est celui où  $V(\phi)$  n'est pas trop grand, et projetons l'équation de flot sur le potentiel de LG, en ne gardant dans  $V$  que les termes de degré 4 au plus en puissance de  $\phi$  (procédure de troncation)

$$V(\phi) = e + \frac{r}{2} \phi^2 + \frac{u}{4!} \phi^4 \quad (203)$$

alors

$$\log [1 + V''(\phi)] = \log \left[ 1 + r + \frac{u}{2} \phi^2 \right] = \log [1 + r] + \frac{u}{2(1+r)} \phi^2 - \frac{u^2}{8(1+r)^2} \phi^4 + \dots \quad (204)$$

Le terme en  $\log [1 + r]$  est juste une renormalisation additive de l'énergie libre  $e$ . Nous obtenons des équations de flots fermées pour les deux couplages  $u$  et  $r$ , et les fonctions de Wilson associées

$$\begin{aligned} S \frac{\partial}{\partial S} r &= W_r(r, u) = 2r + \mathbb{A} \frac{u}{(1+r)} \\ S \frac{\partial}{\partial S} u &= W_u(r, u) = (4-D)u - 3\mathbb{A} \frac{u^2}{(1+r)^2} \end{aligned} \quad (205)$$

#### 7.4.2 Le point fixe de Wilson au premier ordre en $\epsilon$

Notons la distance à la dimension critique supérieure  $D_{uc} = 4$

$$\epsilon = 4 - D \quad (206)$$

et étudions les flots tronqués en supposant que  $\epsilon$  est petit. En développant à l'ordre 2 en  $r$  et  $u$  (justifié à l'ordre  $\epsilon = 4 - D$ ) les fonctions de Wilson sont

$$W_r(r, u) = 2r + \mathbb{A}u - \mathbb{A}ru, \quad W_u(r, u) = (4-D)u - 3\mathbb{A}u^2 \quad (207)$$

Il existe un point fixe nontrivial **W** (le point fixe de Wilson) en

$$r^* = -\frac{1}{6}\epsilon, \quad u^* = \frac{1}{3\mathbb{A}}\epsilon \quad (208)$$

qui est dans la région physique  $u > 0$  si  $D < 4$ . Ce point fixe est à une distance  $\mathcal{O}(\epsilon)$  de l'origine (le point fixe Gaussien) donc l'approximation précédente est bien justifiée). La matrice des dérivés des flots à ce point fixe est

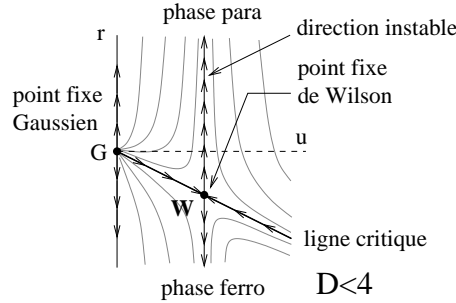


FIG. 24 – Flots du groupe de renormalisation en  $u$  et  $r$  pour  $D < 4$  ( $G$  est le point fixe Gaussien,  $W$  le point fixe de Wilson).

$$\frac{\partial(W_r, W_u)}{\partial(r, u)} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{\epsilon}{3} & \mathbb{A} \left(1 + \frac{\epsilon}{6}\right) \\ 0 & -\epsilon \end{pmatrix} \quad (209)$$

$r$  correspond à une direction relevante  $(1, 0)$  et  $u$  à une direction irrelevante  $(-\mathbb{A}, 2)$ . Les dimensions d'échelle des couplages d'échelle (champs d'échelle) associés  $g_0 = (r - r^*) + (u - u^*)\mathbb{A}/2 = r + u\mathbb{A}/2$  et  $g_1 = (u - u^*)$  sont

$$\lambda_0 = 2 - \frac{\epsilon}{3}, \quad \lambda_1 = -\epsilon \quad (210)$$

Donc pour  $D < 4$  il existe un nouveau point fixe  $\mathbf{W}$ . Les flots sur la surface critique sont attirés vers ce point fixe, et non plus vers le point fixe Gaussien  $\mathbf{G}$ . C'est  $\mathbf{W}$  qui décrit la classe d'universalité du point critique du modèle d'Ising. Ce point fixe est à distance  $\epsilon$  du point fixe Gaussien (qui correspond au champ moyen).

**Cas  $D > 4$  :** Pour  $D > 4$  les résultats du champ moyen restent valables. C'est toujours le point fixe Gaussien  $\mathbf{G}$  en  $u = 0$  qui gouverne le comportement critique.

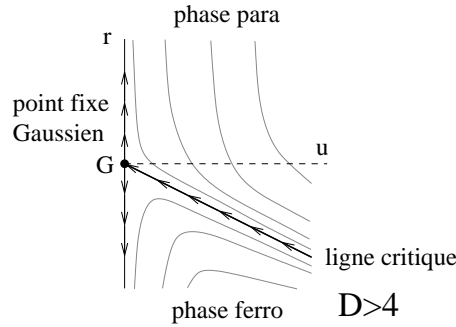


FIG. 25 – Flots du groupe de renormalisation en  $u$  et  $r$  pour  $D > 4$ .

**Cas  $D = 4$  :** Pour  $D = 4$  la fonction  $W_u = -\frac{3}{16\pi^2}u^2$  est négative si  $u > 0$ . Le couplage  $u$  est marginalement irrelevante (s'il est positif), c'est à dire que sur la surface critique le flot du groupe de renormalisation est attiré vers le point fixe Gaussien  $u = 0$ , mais les flots convergent vers  $\mathbf{G}$  beaucoup moins rapidement que pour  $D > 4$ . Ceci implique que le comportement de champ moyen est modifié par des corrections logarithmiques.

### 7.4.3 Exposants critiques

Les relations générales nous permettent de calculer les exposants critiques associés au point fixe de Wilson. On a vu que dans l'approximation du potentiel local la dimension  $\Delta_\phi$  du champ  $\phi$  est inchangée par rapport à sa dimension canonique. Par contre  $\lambda_0$  est différente de 2 et de plus la dimension  $\lambda_1$  va nous donner l'exposant  $\omega$

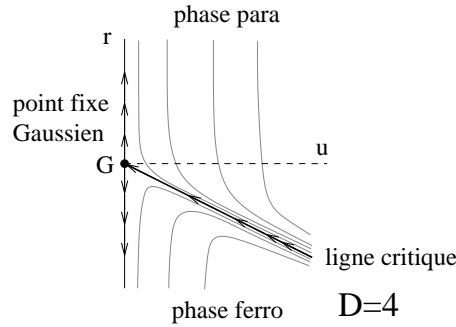


FIG. 26 – Flots du groupe de renormalisation en  $u$  et  $r$  pour  $D = 4$ .

des premières corrections aux lois d'échelle. On a donc obtenu à l'ordre  $\epsilon$  les trois exposants critiques indépendants

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{12}, \quad \eta = 0, \quad \omega = \frac{\epsilon}{2} \quad (211)$$

A ce stade c'est déjà intéressant de faire  $\epsilon = 1$  et de comparer aux exposants critique pour les systèmes dans la classe d'universalités du modèle d'Ising à 3 dimensions

D=3	champ moyen	ordre $\epsilon$	expérience/numérique
$\nu$	1/2	0.58	0.64(1)
$\eta$	0	0	0.04(1)

(212)

(les exposants sont en fait connus avec une bien plus grande précision). On voit que les corrections au champ moyen données par ce calcul simple de groupe de renormalisation vont dans le bon sens.

On peut étudier numériquement les flots de l'équation 202 sans tronquer le potentiel. On obtient  $\nu_{\text{pot.loc.}} = 0.68(1)$ , une valeur plus proche de la valeur exacte (mais un peu trop grande).

#### 7.4.4 Développement en $\epsilon$ et autres extentions

En fait la théorie quantique des champs permet de construire (à partir de la théorie  $\phi^4$ ) un développement perturbatif systématique en  $\epsilon = 4 - D$  (*développement en  $\epsilon$  de Wilson-Fisher*) pour les exposants critiques et les fonctions d'échelle. Je n'en parle pas plus à ce stade.

En particulier, cette théorie permet de justifier à l'ordre  $\epsilon$  les approximations faites ici dans l'approximation du potentiel local : les termes négligées dans le calcul de  $\Gamma[\phi]$  (gradients de  $\phi$  et les termes d'ordre supérieurs en  $\phi$  et  $\nabla\phi$ ) n'interviennent que dans les corrections en  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ .

Je signale aussi que la méthode de renormalisation dans l'espace des  $k$  et l'approximation du potentiel local peuvent être systématisées et généralisées pour beaucoup d'applications (équation de Wilson-Polchinski, méthode du potentiel effectif moyen). Des résultats rigoureux peuvent aussi être obtenus par ces méthodes.

## 8 Limite continue et théories quantiques des champs

Dans cette section je reviens sur l'obtention des fonctions d'échelle et le formalisme associé. En fait on montre que les fonctions d'échelle dans le domaine critique sont égales aux fonctions de corrélations d'une théorie des champs associée au point fixe correspondant. Il y a donc une relation extrêmement profonde et importante entre la théorie des phénomènes critique et la théorie quantique des champs.

### 8.1 Fonctions d'échelle

#### 8.1.1 Obtention des fonctions d'échelle

Considérons les systèmes magnétiques avec un seul couplage essentiel  $g_0$  (donc en champ nul). Comme il y a une renormalisation du champ, donc une dimension  $\Delta_\phi = \Delta(\mathbf{g})$ , les fonctions de corrélations s'écrivent dans la limite d'échelle

$$\langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_N) \rangle_{\mathbf{g}} \underset{\mathbf{g} \rightarrow \mathbf{g}_c}{\simeq} Z(\xi/\xi_0; \mathbf{g})^{-N} \langle \phi(x_1 \xi_0/\xi) \cdots \phi(x_N \xi_0/\xi) \rangle_{\mathbf{R}}$$

Le facteur  $Z$  peut se réécrire

$$Z(\xi/\xi_0; \mathbf{g}) = (\xi/\xi_0)^{\Delta^*} C(g, g_0^r)$$

avec  $\Delta^* = \Delta(\mathbf{g}^*)$  la dimension du champ au point fixe, et

$$\log C(g, g_0^r) = \int \frac{dS}{S} (\Delta(g(S)) - \Delta^*)$$

où on intègre sur le flot du groupe de renormalisation  $g(S)$  qui va de  $g_c$  à  $g_0^r$ , limite du flot qui va de  $g$  à  $g_0^r$  quand  $g \rightarrow g_c$ . Dans ce cas  $S \rightarrow \infty$  mais l'intégrale qui définit  $C$  reste finie. On a en fait

$$C(g, g_0^r) = C(g)/C(g_0^r) \quad ; \quad C(g) = C(g, g^*)$$

Donc on obtient bien une relation d'échelle

$$\langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_N) \rangle_{\mathbf{g} \rightarrow \mathbf{g}_c} = \left[ \xi^{\Delta^*} C(\mathbf{c}) \right]^{-N} G^{(N)}(x_1/\xi, \cdots, x_N/\xi)$$

où  $G^{(N)}$  est une fonction d'échelle universelle et sans dimension.

$$G^{(N)}(z_1, \cdots, z_N) = \left[ \xi_0^{\Delta^*} C(\mathbf{R}) \right]^N \langle \phi(z_1 \xi_0) \cdots \phi(z_N \xi_0) \rangle_{g_0^r}$$

Les facteurs de normalisation finis  $C$  dépendent de la position du point critique  $\mathbf{c}$  considéré sur la surface critique, donc sont dépendants du modèle. Tout ceci marche dans le cas d'un seul couplage relevant...

### 8.1.2 Fonctions d'échelle en champ externe $h$ non-nul

Pour les systèmes en champ externe  $h \neq 0$  il y a en fait deux couplages essentiels,  $t$  et  $h$ . Les fonctions d'échelle vont dépendre d'un paramètre supplémentaire. On peut par exemple les exprimer en fonction de  $\xi$  la longueur de corrélation (qui ne s'annule qu'au point critique  $t = h = 0$ ) et du rapport sans dimension  $\tilde{h} = h \xi^{\Delta_h} \propto h t^{-\Delta_h/\Delta_t}$  (avec  $\Delta_h = D - \Delta_\phi$ )

$$\langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_N) \rangle_{t,h} \propto [\xi^{-N\Delta_\phi}] G^{(N)}(x_1/\xi, \dots, x_N/\xi; h\xi^{\Delta_h}) \quad (213)$$

Il faut noter que les fonctions d'échelle  $G^{(N)}$  sont – à une normalisation des champs près – indépendantes de  $g_0^r$ , mais dépendent du côté de la surface critique où l'on est...

## 8.2 Limite continue

### 8.2.1 Définition

En fait les fonctions d'échelle universelles s'obtiennent à partir des fonctions de corrélation pour un système statistique donné (par exemple le modèle d'Ising en température  $T$  et champ externe  $H$ )  $\langle \sigma(x_1) \cdots \sigma(x_K) \rangle$  en dilatant l'échelle des distances par un facteur d'échelle  $S$  ( $x \rightarrow x' = s/S$ ) et en faisant simultanément tendre les couplages vers le point critique (donc ici  $T \rightarrow T_c$ ,  $H \rightarrow 0$ ) en «remontant» la trajectoire du groupe de renormalisation de façon à ce que les observables se comportent comme dans la limite continue. Dans notre cas on définit les «constantes de couplages renormalisées»  $t_R$  et  $h_R$  et le «champ renormalisé»  $\phi_R$  pour la théorie continue comme

$$t_R = tS^{\Delta_t} \quad , \quad h_R = hS^{\Delta_h} \quad , \quad \phi_R = S^{\Delta_\phi} \sigma \quad (214)$$

Les fonctions d'échelle  $G_K$  pour le champ  $\phi$  sont obtenues en prenant la limite d'échelle des fonctions de corrélations du champ renormalisé  $S \rightarrow \infty$ ,  $t_R$  et  $h_R$  fixés (donc les couplages  $t$  et  $h$  tendent vers le point critique  $t = h = 0$ )

$$G_K(x_1, \dots, x_k; t_R, h_R) = \lim_{\substack{S \rightarrow \infty \\ t_R, h_R \text{ fixed}}} (S^{\Delta_\phi})^K \langle \sigma(Sx_1) \cdots \sigma(Sx_K) \rangle_{t,h} \quad (215)$$

Autrement dit, on part d'un système statistique défini avec un régulateur à courte distance fini (pour Ising la maille de réseau  $a = 1$ ), on rescale les distances  $x \rightarrow x' = x/S$  c'est à dire qu'on fait tendre le régulateur vers 0 (limite continue  $a \rightarrow a' = 1/S \rightarrow 0$ ) tout en ajustant les couplages (ici  $t$  et  $h$ ) et la normalisation des observables locales (ici le champ  $\phi = \sigma$ ) pour que la longueur de corrélation et les fonctions de

corrélations restent finies. La théorie du groupe de renormalisation assure que ceci est possible si on est au voisinage d'un point critique, et il faut ajuster autant de couplages qu'il y a de couplages essentiels au point fixe correspondant, en suivant les flots du groupe de renormalisation issus du point fixe.

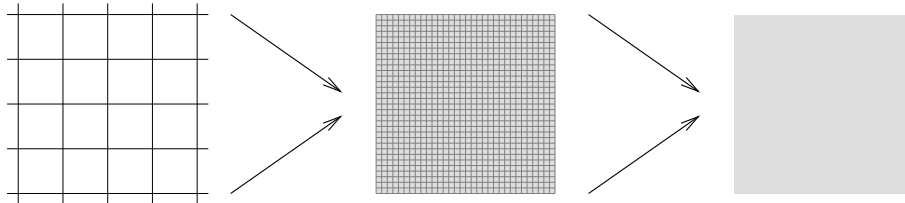


FIG. 27 – Limite continue : les fonctions d'échelle sont obtenues en faisant tendre le régulateur à courte distance vers 0 et en faisant tendre simultanément les couplages vers le point critique  $c$ , de façon à ce que les couplages renormalisés restent finis.

Les fonctions d'échelle de la théorie continue ainsi obtenues ne sont rien d'autre que les fonctions de corrélations pour le modèle statistique initial restreint à la variété instable (ici de dimension 2) issu du point fixe par les flots du groupe de renormalisation. Les couplages renormalisés  $t_R$  et  $h_R$  ne sont rien d'autre qu'un choix de coordonnées sur cette variété instable  $\mathcal{F}$  (il y a une relation simple entre  $t_R$  et  $h_R$  et les couplages effectifs  $t(S)$  et  $h(S)$  qui sont les coordonnées initiales sur la surface instable).

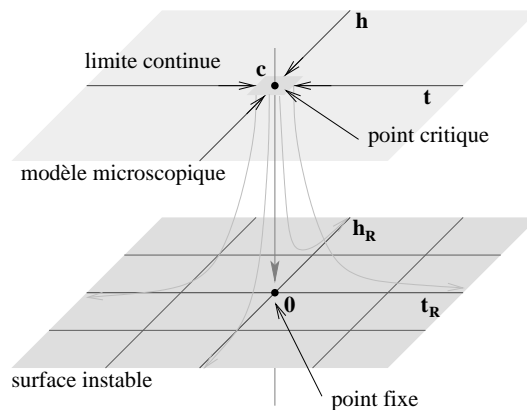


FIG. 28 – Limite continue : la théorie au voisinage du point critique  $c$  est équivalente à la théorie sur la variété instable, et ne dépend que d'un nombre fini de couplages essentiels renormalisés (ici  $t_R$  et  $h_R$ ).



## 8.2.2 Discussion

**Fonctions d'échelle en champ nul :** Les fonctions d'échelle en champ nul  $h = 0$  obtenues dans les deux phases, respectivement la phase désordonnée ( $t \rightarrow 0_+$ ) et la phase ordonnée ( $t \rightarrow 0_-$ ),  $G_K^\pm(x_1, \dots, x_K)$  sont donc simplement des valeurs particulières des fonctions d'échelle générales

$$G_K^\pm(x_1, \dots, x_K) = G_K(x_1, \dots, x_K; t = \pm 1, h = 0) \quad (216)$$

Elles ne sont donc pas indépendantes, puisqu'elles sont données par les fonctions de corrélations d'une seule et même théorie.

**Rapports d'amplitudes critiques :** Il s'ensuit que les quantités sans dimensions obtenues en prenant des rapports de fonctions d'échelle dans les deux phases sont aussi des quantités universelles, qui ne dépendent que de la classe d'universalité du point critique. L'exemple le plus connu est le rapport d'amplitudes pour la longueur de corrélation

$$\frac{A_+}{A_-}, \quad \xi_{T \rightarrow T_c} = A_\pm |T - T_c|^{-\nu}, \quad T > T_c \text{ ou } T < T_c \quad (217)$$

**Fonctions d'échelle pour des points critiques différents dans la même classe d'universalité :** Si on construit les fonctions d'échelle par la procédure de limite continue à partir de deux points critiques différents  $c$  et  $c'$  (par exemple en partant d'un modèle d'Ising sur des réseaux carré ou triangulaire) on obtient des fonctions d'échelle  $G(x; g_R)$  et  $G'(x; g'_R)$  a priori différentes (je note  $g_R$  l'ensemble des couplages renormalisés). Les mêmes arguments que ceux pour l'universalité montrent que ces fonctions d'échelle sont équivalentes par une redéfinition finie des couplages renormalisés  $g_R \rightarrow g'_R$  (donc à un changement local de coordonnées sur la variété instable  $\mathcal{F}$ ) et un changement de normalisation des champs  $\phi \rightarrow \phi' = Z\phi$

$$G_K(x; g_R) = Z^K G'_K(x; g'_R) \quad (218)$$

Donc la théorie des champs associée à la limite continue et la physique dans le domaine critique sont bien universelles.

## 8.3 La limite continue comme théorie quantique des champs

### 8.3.1 Argument général

La construction des fonctions d'échelle par cette procédure de limite continue d'un système statistique (en  $D$  dimensions) est tout à fait analogue à la construction de la mécanique quantique par l'intégrale de chemin (à temps Euclidien) comme limite continue d'un ensemble statistique 1D de chemins aléatoires. En fait on construit ainsi

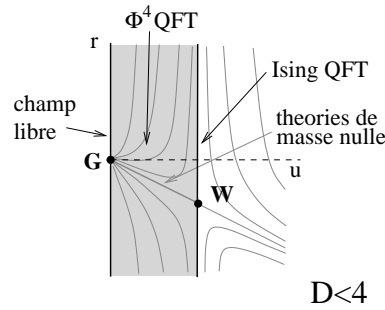


FIG. 29 – Les théories des champs associées au modèle de LGW pour  $1 < D < 4$

une théorie quantique des champs (à temps Euclidien) en D-dimension, et les fonctions d'échelle sont les fonctions de corrélations de cette théorie des champs, c'est à dire les éléments de matrice de T-produits d'opérateurs locaux pour cette théorie.

$$G(x_1, \dots, x_N) = \langle 0|T[\Phi(x_1) \dots \Phi(x_N)]|0\rangle \quad (219)$$

Ce qu'il faut retenir c'est que de façon générale :

- A un point fixe du groupe de renormalisation est associé une théorie quantique des champs de masse nulle (invariante d'échelle).
- La variété instable associée à ce point fixe (déformation par des opérateurs essentiels) décrit des théories quantiques des champs massive (non invariante d'échelle).
- Les couplages d'échelle essentiels (champs d'échelle) sont les constantes de couplages de cette théorie quantique des champs massive.
- Les fonctions de corrélations du modèle statistique sur la variété instable sont les fonctions d'échelle associées à la classe d'universalité du point fixe. Ces fonctions d'échelle sont données par les fonctions de corrélations (éléments de matrice dans le vide de produits d'opérateurs locaux) de la théorie des champs correspondante.

### 8.3.2 Landau-Ginzburg-Wilson et théorie $\phi^4$ :

A titre d'exemple je représente dans la figure les théories quantiques des champs (QFT) correspondant aux limites d'échelle du modèle de Landau-Ginzburg-Wilson en dimension  $1 < D < 4$ . Je considère ici le modèle en champ nul  $h = 0$ .  $r = t$  est la température réduite (couplage essentiel) et  $u$  le couplage en  $\phi^4$ . Il y a deux points fixes : **G** le point fixe Gaussien et **W** le point fixe de Wilson.

La théorie d'Ising «vit» sur la ligne d'instabilité du point fixe de Wilson **W** et ne dépend que d'un seul paramètre (la masse  $m^2 \simeq r \simeq t$ ). C'est la limite continue du modèle d'Ising.

La théorie  $\phi^4$  «vit» entre le champ libre et Ising, sur le domaine d'instabilité de  $\mathbf{G}$ , elle dépend de deux paramètres, la masse  $m^2$  et le couplage  $u \sim g$ . C'est la limite continue du modèle de LGW, qui est étudiée par les développements perturbatifs type développement en  $\epsilon$ .

En particulier, la ligne  $\mathbf{GW}$  des flots du groupe de renormalisation qui part de  $\mathbf{G}$  pour arriver en  $\mathbf{W}$  correspond aux théories  $\phi^4$  de masse nulle.

La théorie pour  $u = 0$  est le champ scalaire libre, limite continue du modèle Gaussien.

Il faut bien sur considérer aussi le champ externe  $h$ , qui est toujours un couplage essentiel. En pratique il suffit de connaître les fonctions de corrélations de la théorie en champ nul  $h = 0$  pour pouvoir calculer celles de la théorie en champ externe  $h \neq 0$ .

## 8.4 Equations du groupe renormalisation pour la théorie continue

La théorie continue ne dépend que d'un nombre fini de constantes de couplage renormalisées, qui correspondent aux couplages essentiels (champs d'échelle) sur la variété instable  $\mathcal{F}$  pour le point fixe  $\mathbf{0}$ . Les fonctions d'échelle étant les fonctions de corrélation pour la théorie sur  $\mathcal{F}$ , elles obéissent à la relation de base 8.4 pour les fonctions de corrélation

$$\langle \phi(Sx_1) \cdots \phi(Sx_K) \rangle_{\mathcal{H}} \simeq Z(S)^{-K} \langle \phi_s(x_1) \cdots \phi_s(x_K) \rangle_{\mathcal{H}_S}$$

mais maintenant restreinte à un nombre fini de couplage, les couplages renormalisés, sans qu'il soit fait d'approximation. Je note comme dans la discussion générale par  $W^a(\mathbf{g}_R)$  les fonctions de Wilson pour les couplages renormalisés  $\mathbf{g}_R = \{g_R^a\}$  (ce sont les composantes d'un champ de vecteur  $\mathbf{W}$  sur  $\mathcal{F}$  qui engendre les flots du groupe de renormalisation sur  $\mathcal{F}$ ) et  $\Delta(\mathbf{g}_R)$  la dimension du champ  $\phi$  sur  $\mathcal{F}$  (c'est une fonction scalaire sur  $\mathcal{F}$ ). On a donc

$$W^a(\mathbf{g}_R) = S \frac{d}{dS} g_R^a(S) \quad , \quad \Delta(\mathbf{g}_R) = S \frac{d}{dS} \log Z(S)$$

En dérivant la relation générale 8.4 par rapport au facteur d'échelle  $S$  on obtient l'équation différentielle pour le comportement d'une fonction d'échelle

$$G_K(x_1, \cdots, x_K; \mathbf{g}_R) = \langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_N) \rangle_{\mathbf{g}_R}$$

sous une dilatation.

$$\left[ S \frac{\partial}{\partial S} - \sum_a W^a(\mathbf{g}_R) \frac{\partial}{\partial g_R^a} + K \Delta(\mathbf{g}_R) \right] G_K(Sx_1, \cdots, Sx_K; \mathbf{g}_R) = 0 \quad (220)$$

Cette équation réexprime simplement le fait qu'un changement d'échelle est réabsorbé dans une redéfinition (renormalisation) des constante de couplage et des champs. Elle se généralise simplement au cas des fonctions de corrélations avec plusieurs type

d'opérateurs (par exemple  $\sigma \sim \phi$  et  $\mathcal{E} \sim \phi^2$  pour la théorie d'Ising), chacun avec leur dimension  $\Delta$  (pour Ising  $\Delta_\sigma = \Delta = D - \Delta_h$  et  $\Delta_\mathcal{E} = D - \Delta_t$ ).

Cette équation est extrêmement importante en théorie des champs et est reliée à l'équation de Callan-Symanzik qui décrit comment une théorie des champ dépend de «l'échelle de renormalisation» utilisée pour la construire.

## 8.5 Etude des phénomènes critiques par la théorie des champs

La relation entre phénomènes critiques et théorie quantique des champs mise en évidence par la théorie du groupe de renormalisation s'est avérée extrêmement fructueuse depuis 30 ans.

Pour étudier des phénomènes critiques il est possible d'étudier les flots du groupe de renormalisation et les points fixes. En pratique c'est souvent assez lourd et les approximations faites délicates à contrôler. Ces techniques de groupe de renormalisation dans l'espace réel ou «non perturbatif» ont néanmoins connu un développement important ces dernières années. Une autre approche est d'identifier la théorie des champs qui correspond à la classe d'universalité du système considéré, et d'étudier directement cette théorie des champs. Les techniques sont notamment :

- La théorie perturbative des champs : ceci conduit par exemple aux développements en  $D = 4 - \epsilon$  de Wilson-Fisher pour les systèmes magnétiques, ou à des calculs directs perturbatifs en 3 dimension pour évaluer les dimensions anormales.
- Les solutions exactes de théories des champs. Ceci s'est avéré extrêmement fructueux pour les systèmes bidimensionnels. Les points critiques en 2D (et certains systèmes quantiques 1D) correspondent à des théories des champs invariantes conformes, qui possèdent des propriétés mathématiques fascinantes : on peut classifier mathématiquement ces théories (du moins une très large classe), calculer le contenu en opérateurs, les dimensions d'échelle, les fonctions de corrélations, etc. De plus les déformations de ces théories (théories massives décrivant le domaine critique) sont souvent des théories des champs intégrables (possédant une infinité de quantités conservées) pour lesquelles on peut également calculer exactement un certain nombre d'observables physiques (Ansatz de Bethe, etc.).
- Enfin mentionnons toutes les techniques de simulations numériques qu'il est hors de question d'aborder ici.