

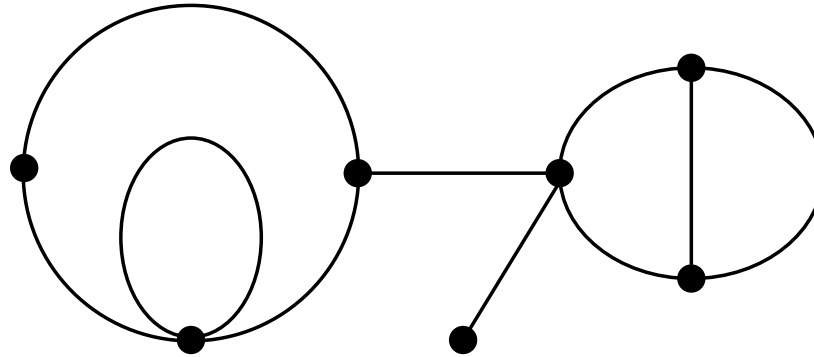
# Méthodes combinatoires pour l'énumération des graphes planaires

Cours SPhT

Septembre-Octobre 2005

# Graphes (ou plutôt cartes) planaires

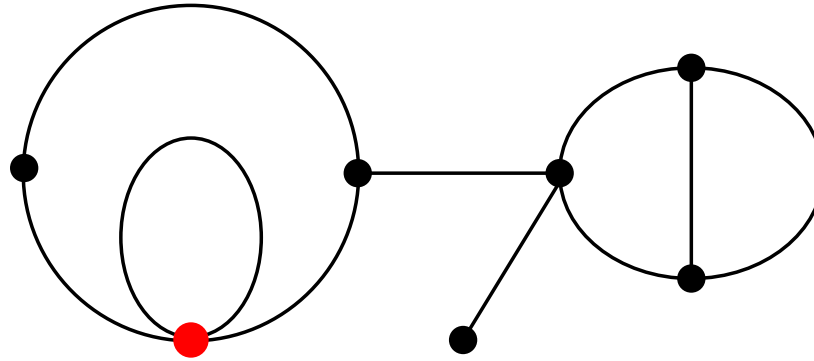
Graphe  $\equiv$  graphe plongé dans le plan (**carte** planaire)



Graphes avec:

# Graphes (ou plutôt cartes) planaires

Graphe  $\equiv$  graphe plongé dans le plan (**carte** planaire)

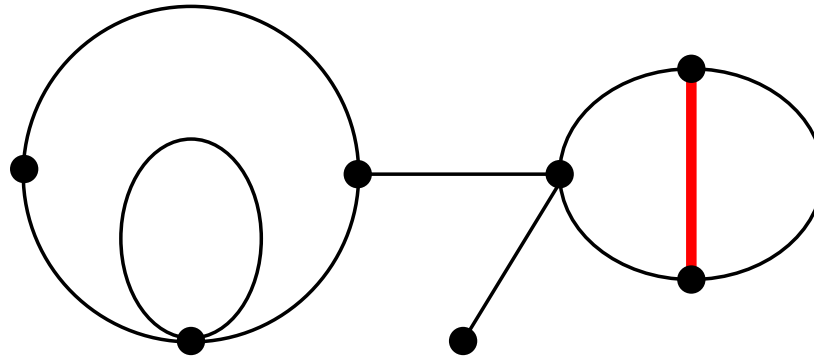


Graphes avec:

- ◇ des vertex (ici de **valence** 4)

# Graphes (ou plutôt cartes) planaires

Graphe  $\equiv$  graphe plongé dans le plan (**carte** planaire)

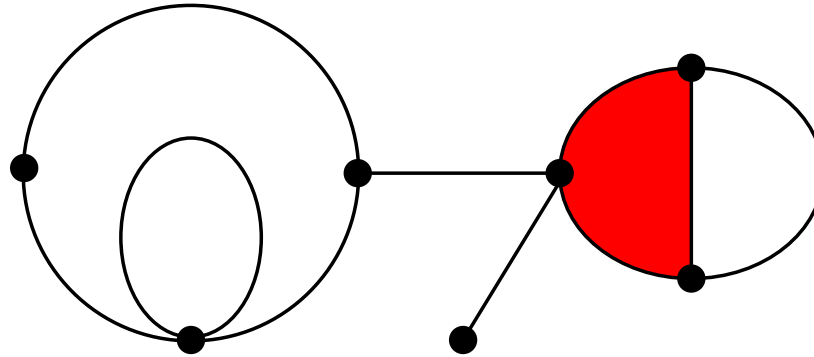


Graphes avec:

- ◇ des vertex
- ◇ des arêtes (avec éventuellement des boucles ou des arêtes multiples)

# Graphes (ou plutôt cartes) planaires

Graphe  $\equiv$  graphe plongé dans le plan (**carte** planaire)

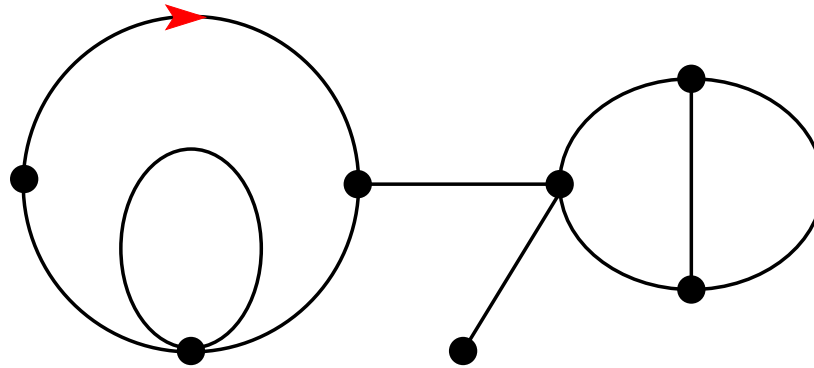


Graphes avec:

- ◇ des vertex
- ◇ des arêtes
- ◇ des faces (ici de **valence** 3)

# Graphes (ou plutôt cartes) planaires

Graphe  $\equiv$  graphe **plongé** dans le plan (**carte** planaire)



Graphes avec:

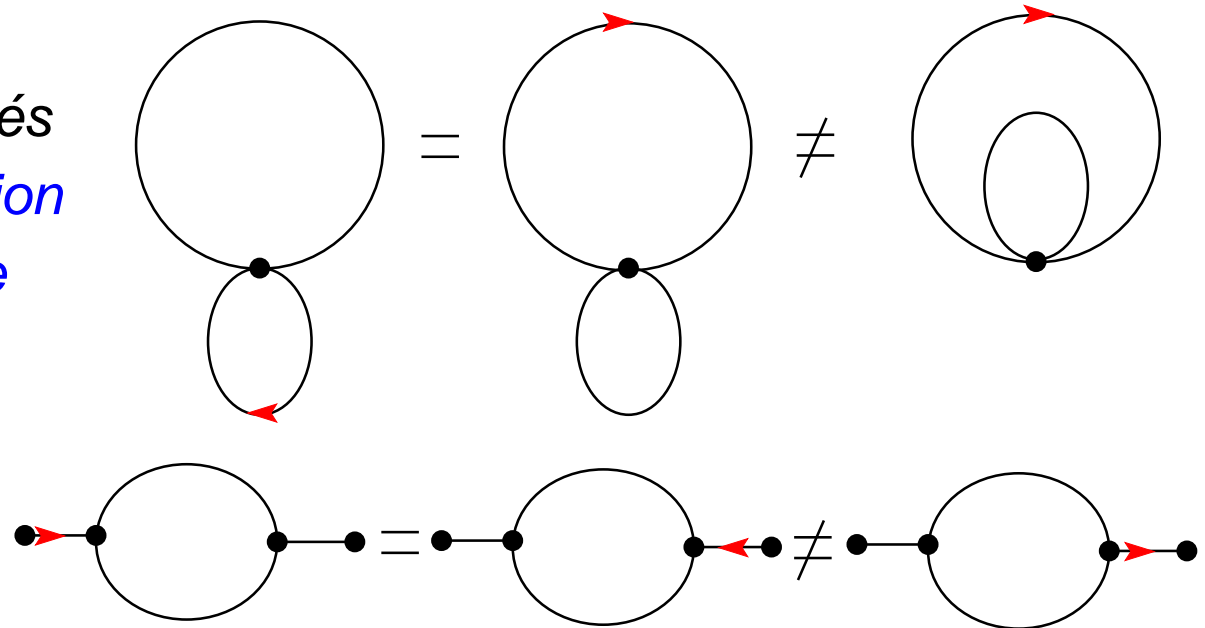
- ◇ des vertex
- ◇ des arêtes
- ◇ des faces

*Pour éviter les problèmes de facteurs de symétrie:*

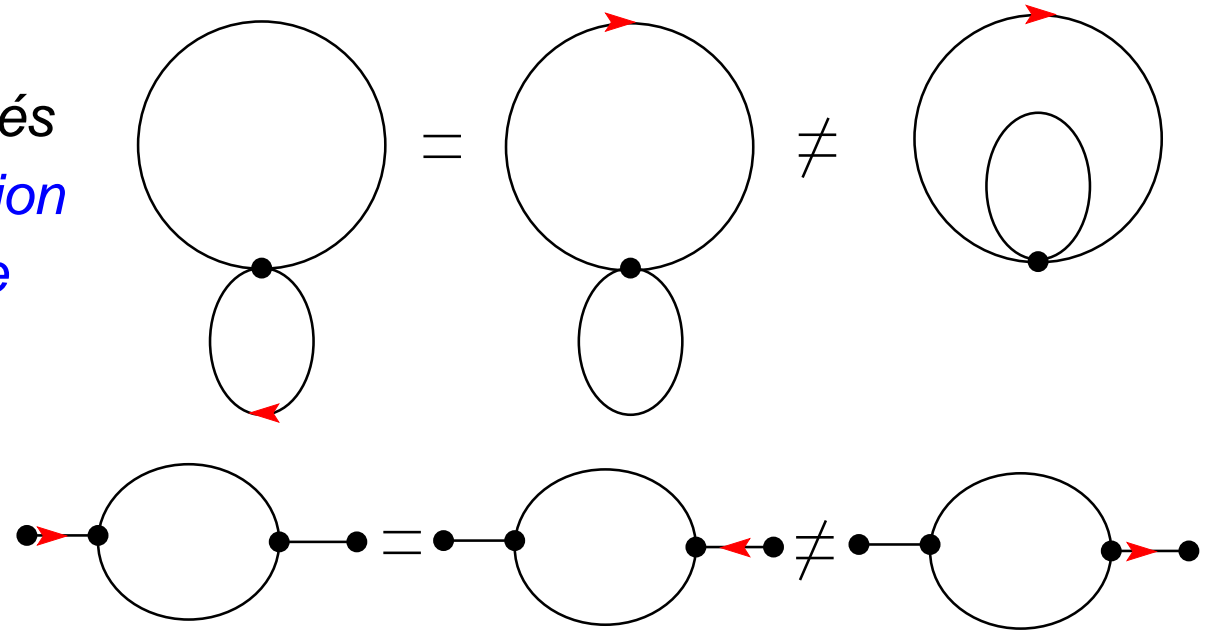
→ graphes **enracinés** c.à.d avec une arête marquée

*adjacente à la face externe et dans le sens des aiguilles d'une montre*

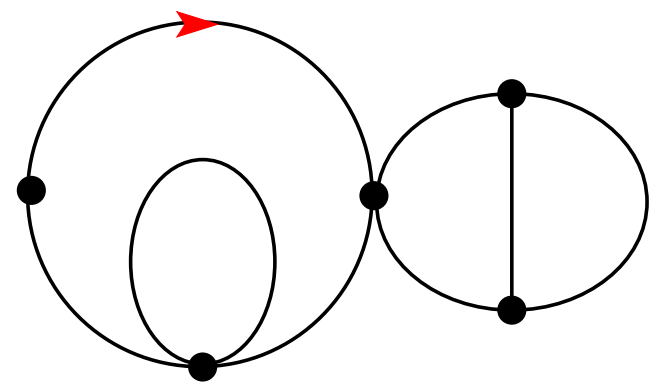
Deux graphes enracinés  
 qui sont une *déformation*  
 continue l'un de l'autre  
 sont *équivalents*



Deux graphes enracinés  
 qui sont une *déformation*  
 continue l'un de l'autre  
 sont *équivalents*

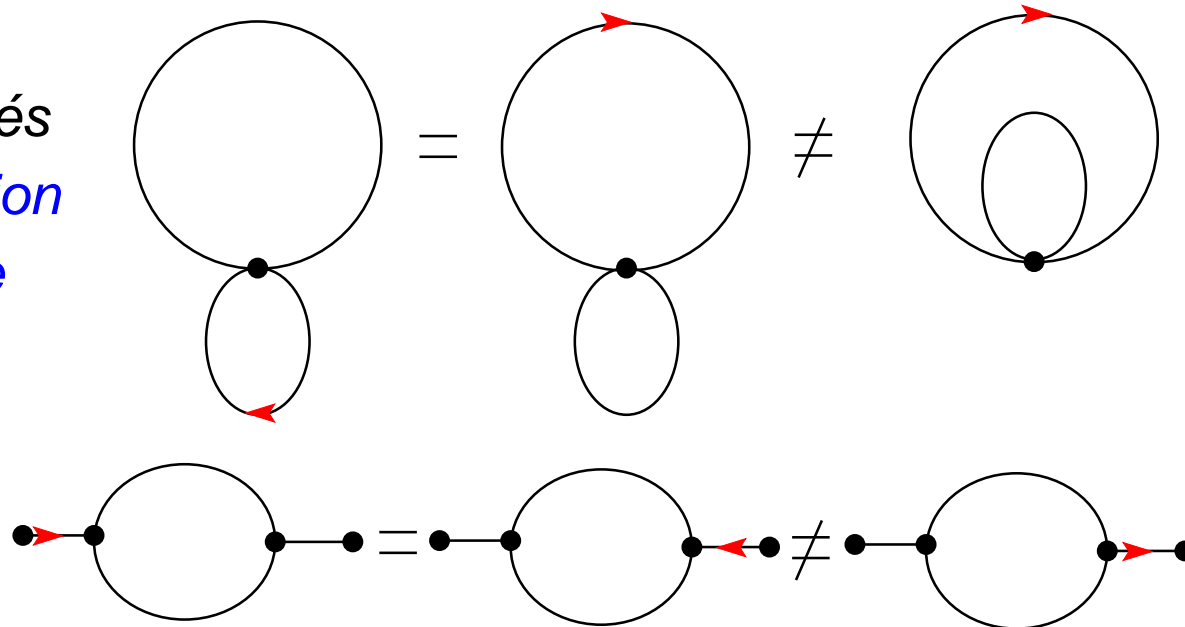


Graphe *dual* (enraciné)

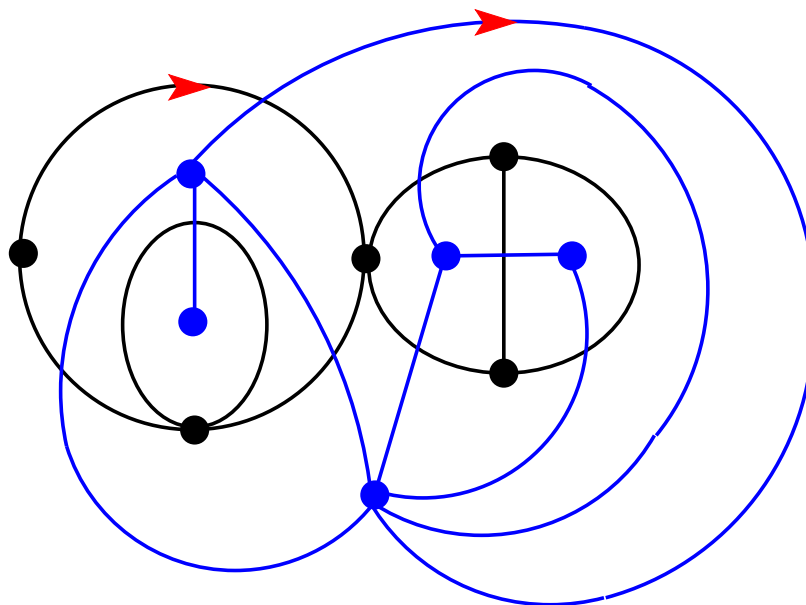




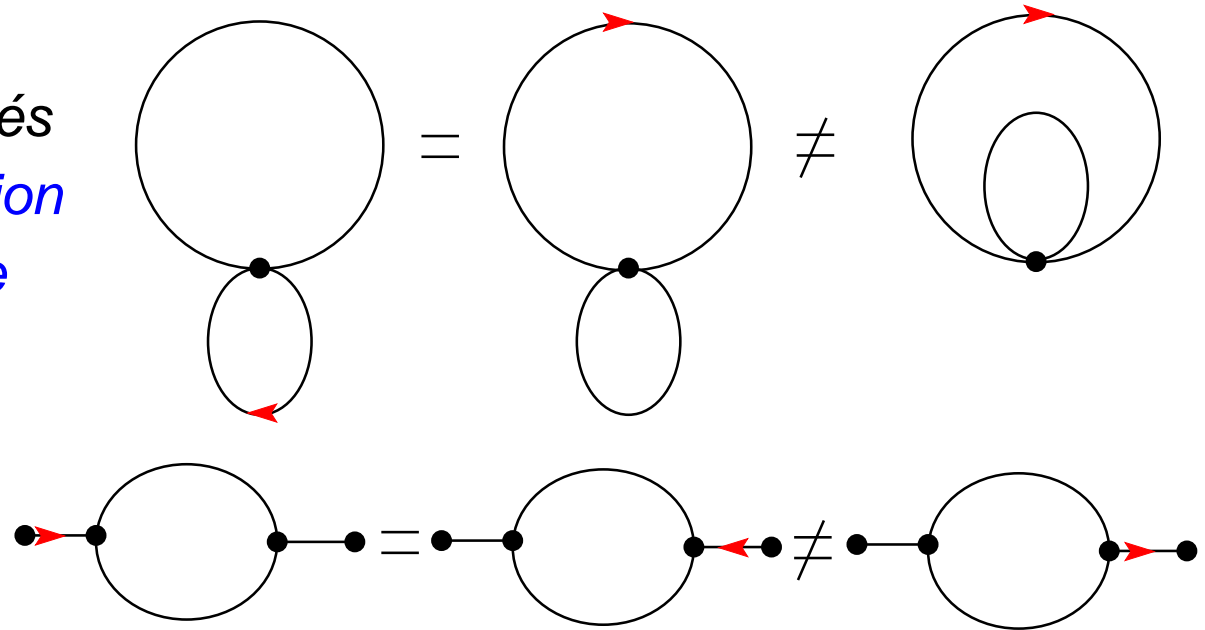
Deux graphes enracinés  
 qui sont une *déformation  
 continue* l'un de l'autre  
 sont *équivalents*



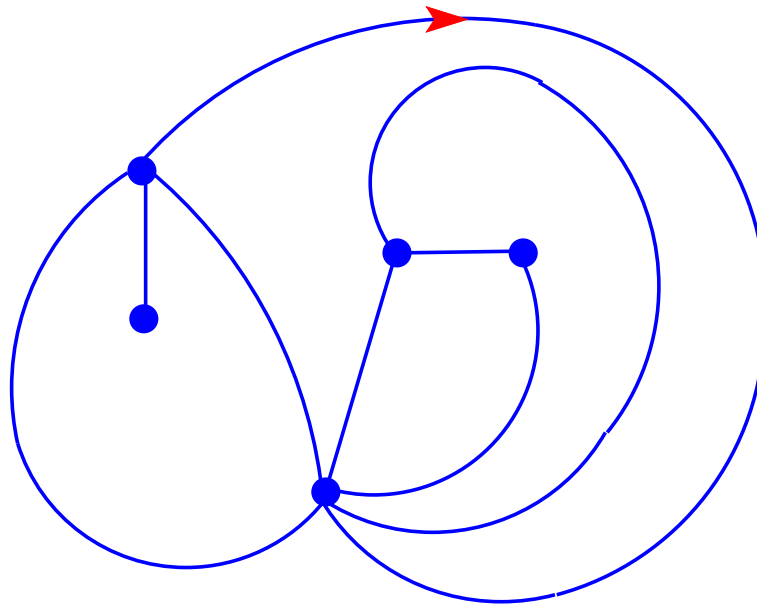
Graphe *dual* (enraciné)



Deux graphes enracinés  
 qui sont une *déformation*  
 continue l'un de l'autre  
 sont *équivalents*



Graphe *dual* (enraciné)



# Problèmes d'énumération

- ◇ Compter les graphes avec des **valences prescrites** pour les vertex (*ou pour les faces*)  
i.e. graphes avec exactement  $n_k$  vertex de valence  $k$

ex: Énumérer les graphes planaires **tétravalents** (*tous les vertex ont valence 4*) avec  $n$  vertex

$$\rightarrow n_4 = n, n_k = 0 \text{ pour } k \neq 4$$



Énumérer les **quadrangulations** (*faces de valence 4*) à  $n$  faces

- ◇ Fonction génératrice:  $\rightarrow$  Somme sur tous les graphes avec un poids  $g_k$  par vertex (ou face) de valence  $k$


ex: fonc. gén. des graphes tétravalents

$$\rightarrow g_k = g\delta_{k,4}$$




# Techniques d'énumération

- ◇ Énumération par **décomposition récursive** Tutte (1962-63)
  
- ◇ Énumération par **modèles de matrice**  
Brézin, Itzykson, Parisi, Zuber (1978)
  - modèle à 1 matrice → *graphes à valences arbitraires*
  - modèle à 2 matrices → *graphes bipartites bicoloriés des vertex*
  
- ◇ Énumération par **bijections avec des arbres**  
Schaeffer (1997)






# Techniques d'énumération

- ◇ Énumération par **décomposition récursive** Tutte (1962-63)  
 chirurgie
- ◇ Énumération par **modèles de matrice**  
Brézin, Itzykson, Parisi, Zuber (1978)
  - modèle à 1 matrice → *graphes à valences arbitraires*
  - modèle à 2 matrices → *graphes bipartites bicoloriés des vertex*
- ◇ Énumération par **bijections avec des arbres**  
Schaeffer (1997)

# Techniques d'énumération

- ◇ Énumération par **décomposition récursive** Tutte (1962-63)  
 chirurgie
- ◇ Énumération par **modèles de matrice**  
Brézin, Itzykson, Parisi, Zuber (1978)
  - modèle à 1 matrice → *graphes à valences arbitraires*
  - modèle à 2 matrices → *graphes bipartites bicoloriés des vertex* Très puissant mais  Boîte noire
- ◇ Énumération par **bijections avec des arbres**  
Schaeffer (1997)

# Techniques d'énumération

- ◇ Énumération par **décomposition récursive** Tutte (1962-63)  
 chirurgie
- ◇ Énumération par **modèles de matrice**  
Brézin, Itzykson, Parisi, Zuber (1978)
  - modèle à 1 matrice → *graphes à valences arbitraires*
  - modèle à 2 matrices → *graphes bipartites bicoloriés des vertex* Très puissant mais  Boîte noire
- ◇ Énumération par **bijections avec des arbres**  
Schaeffer (1997)
  -  Combinatoire élémentaire
  -  Donne accès à la statistique des distances

# Bijection avec des arbres

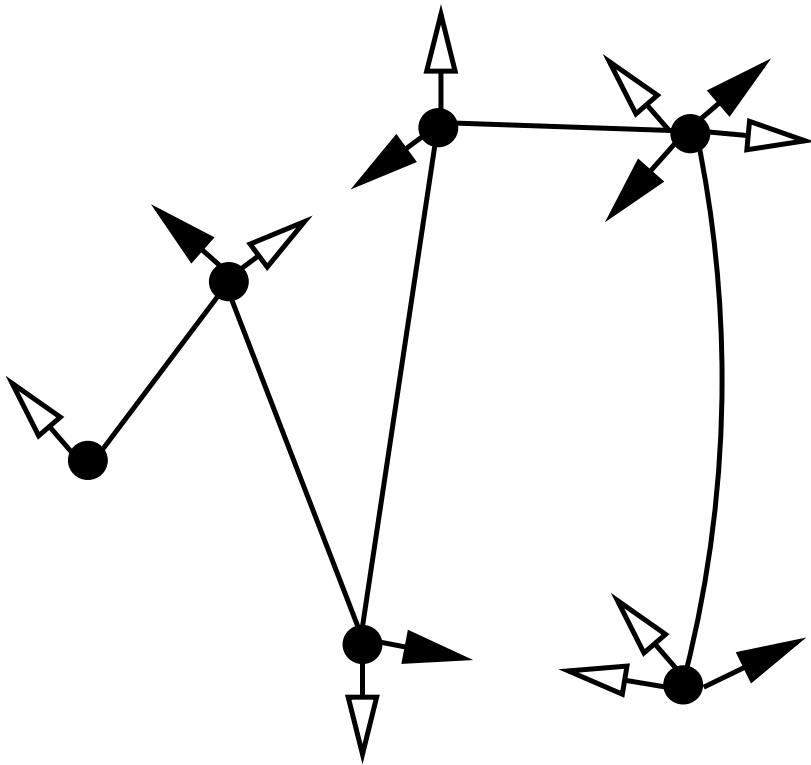
Il existe deux types de bijections



# Bijection avec des arbres

Il existe deux types de bijections

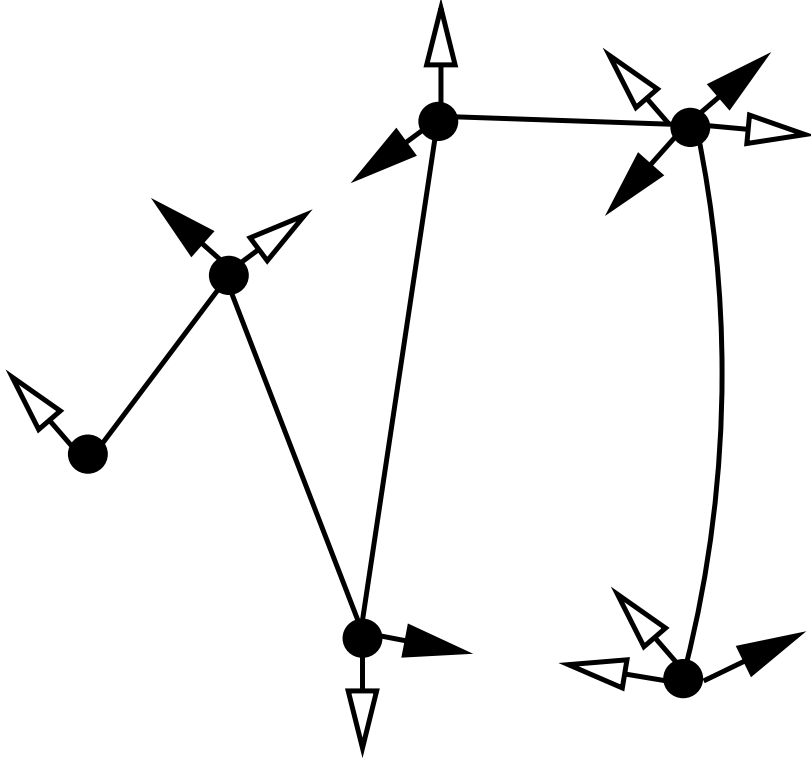
avec des arbres **bourgeonnants**  
*à valences fixées*



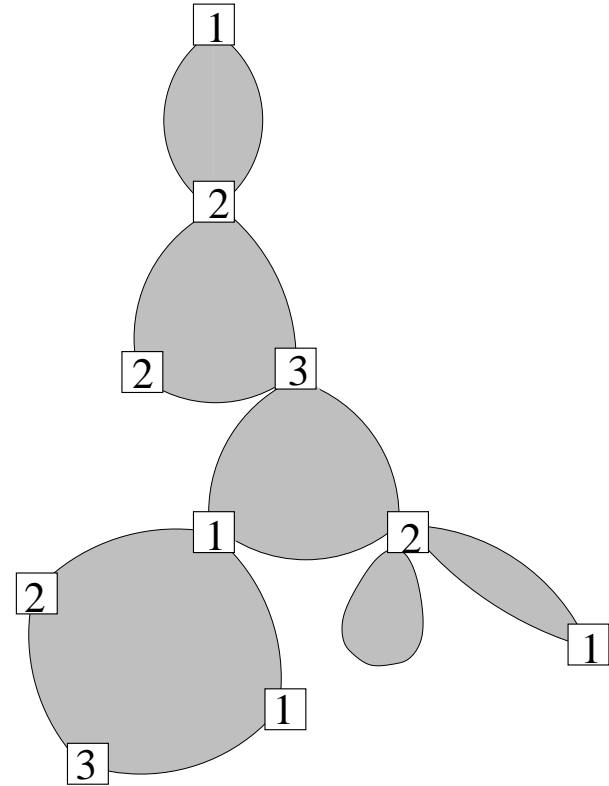
# Bijection avec des arbres

Il existe deux types de bijections

avec des arbres **bourgeonnants**  
*à valences fixées*

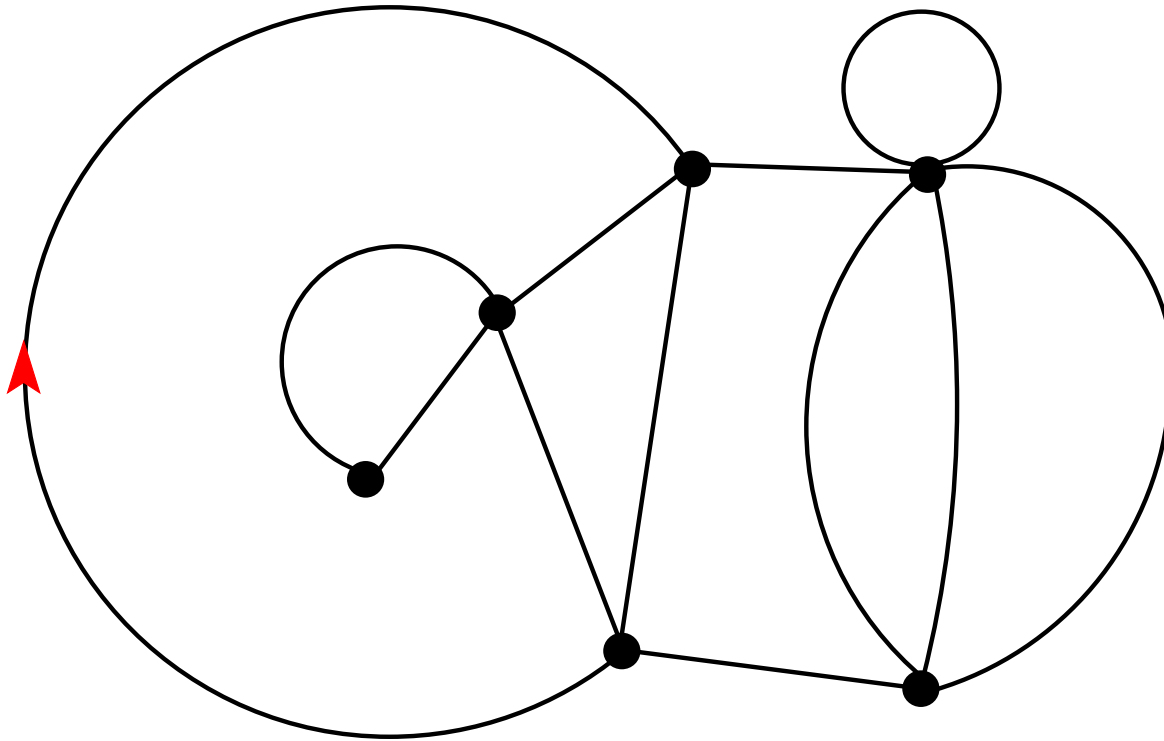


avec des arbres **étiquetés**  
*mobiles*



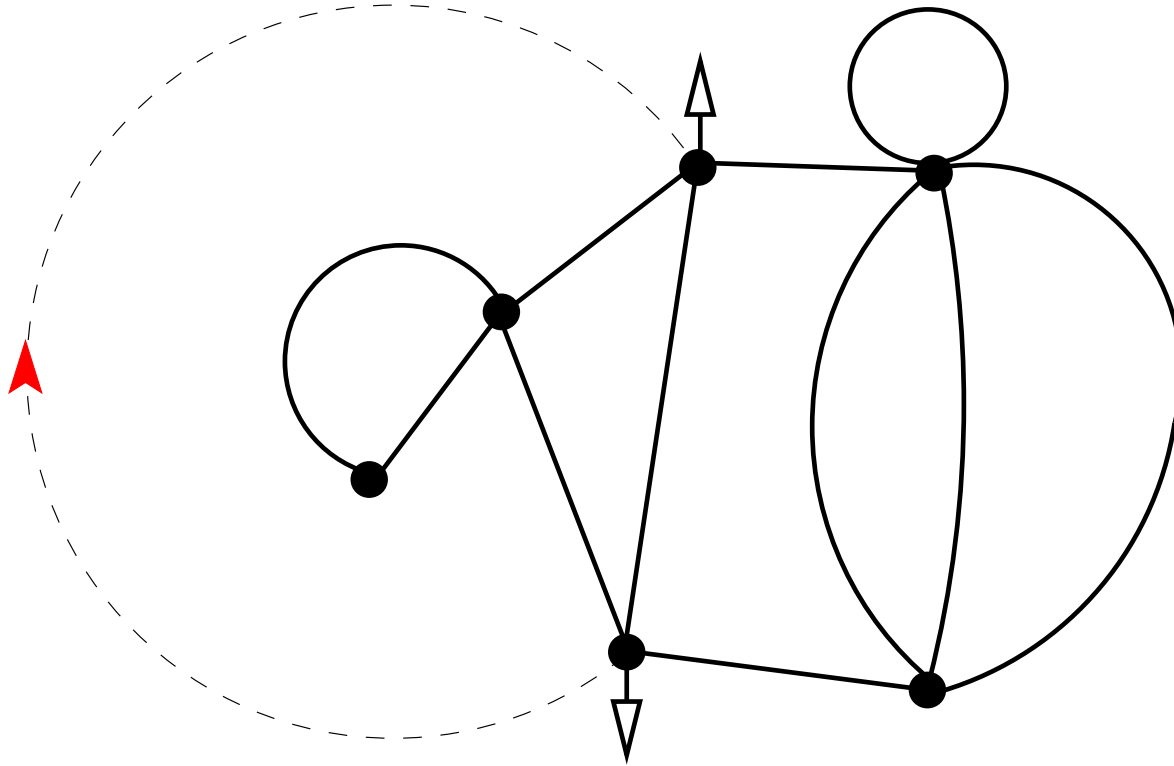
# Des graphes aux arbres bourgeonnants

Partant d'un graphe planaire enraciné à valences paires



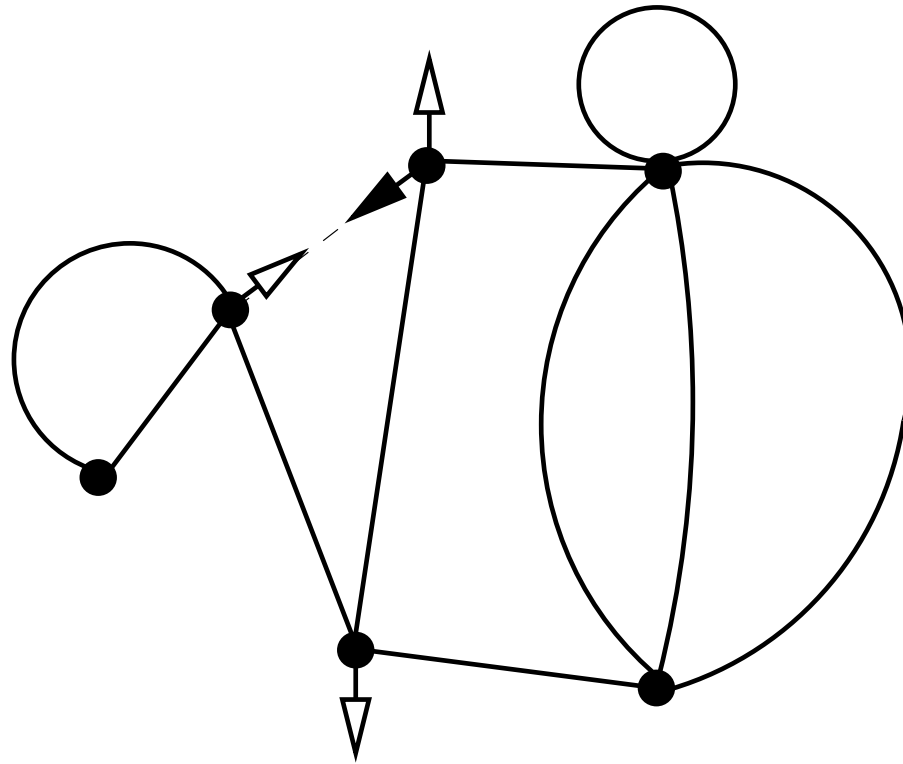
# Des graphes aux arbres bourgeonnants

Partant d'un graphe planaire enraciné à valences paires



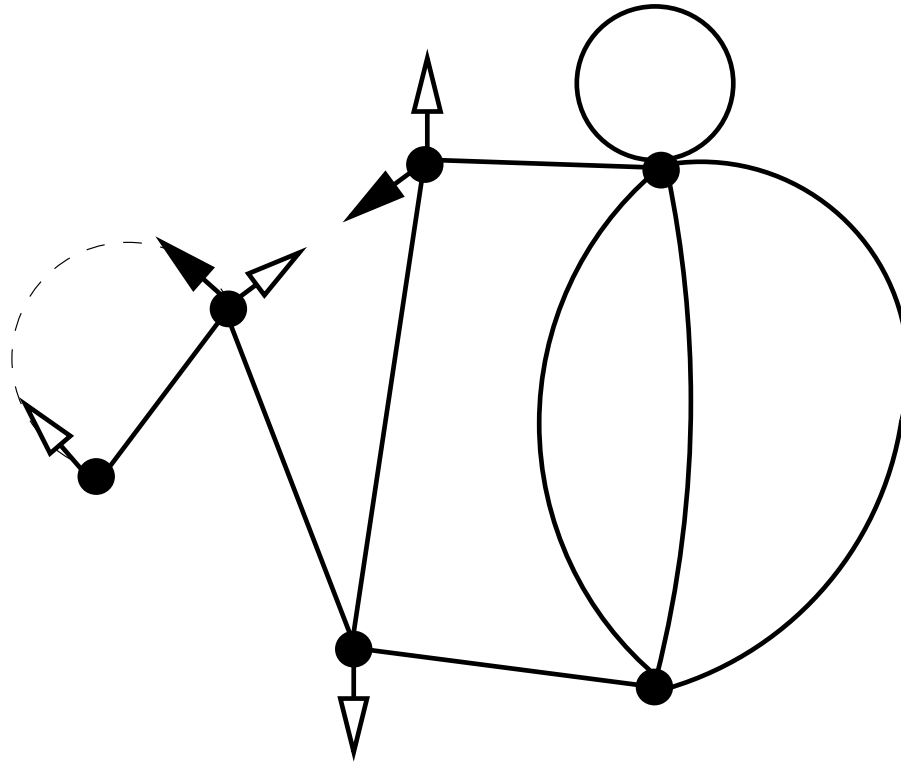
# Des graphes aux arbres bourgeonnants

Partant d'un graphe planaire enraciné à valences paires



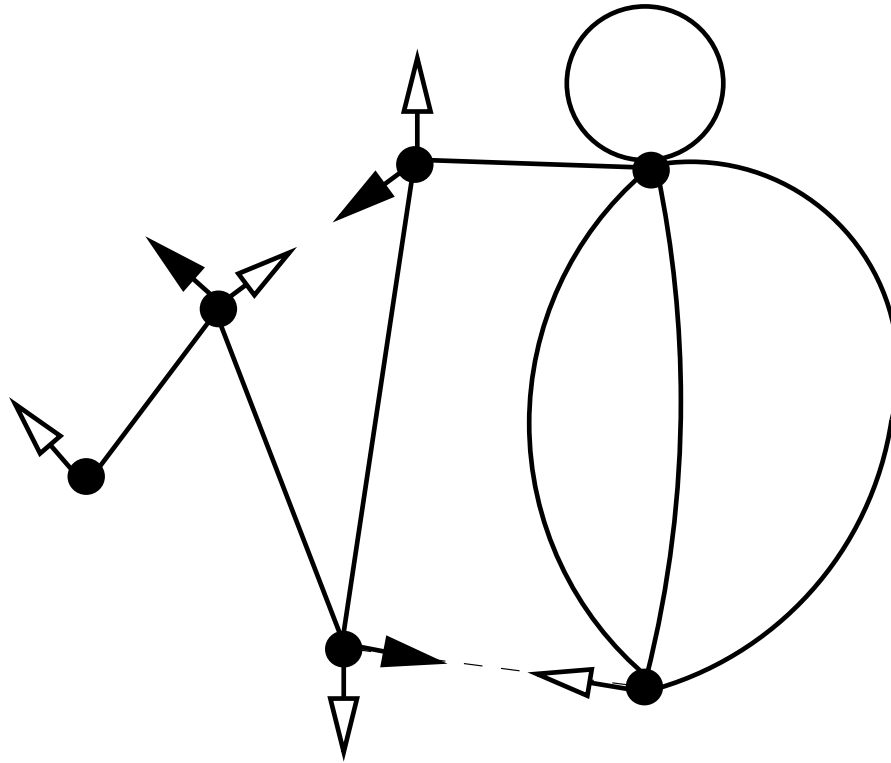
# Des graphes aux arbres bourgeonnants

Partant d'un graphe planaire enraciné à valences paires



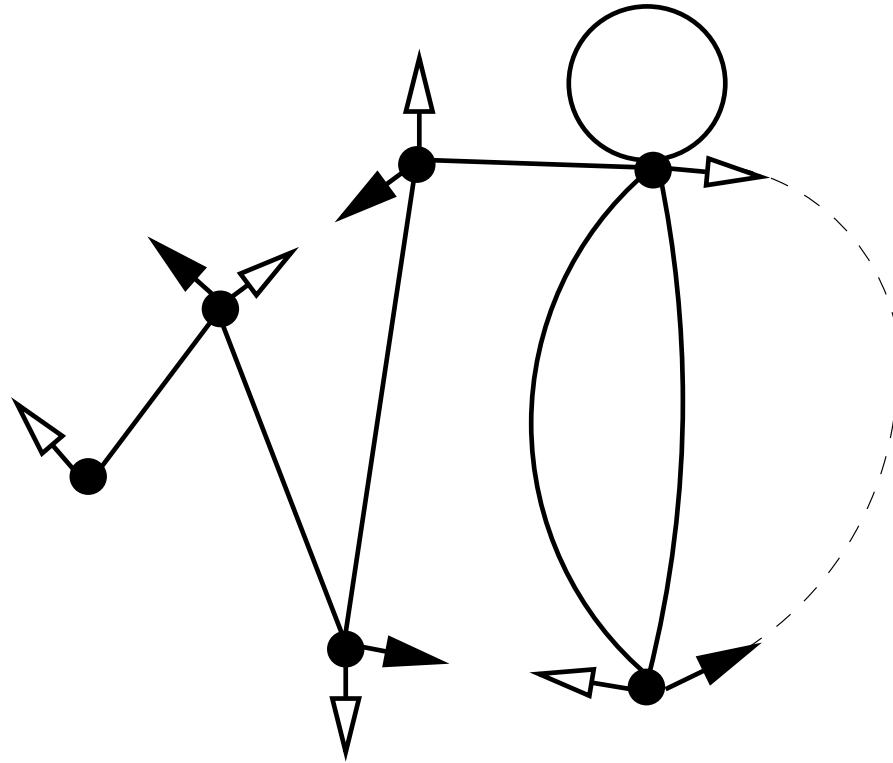
# Des graphes aux arbres bourgeonnants

Partant d'un graphe planaire enraciné à valences paires



# Des graphes aux arbres bourgeonnants

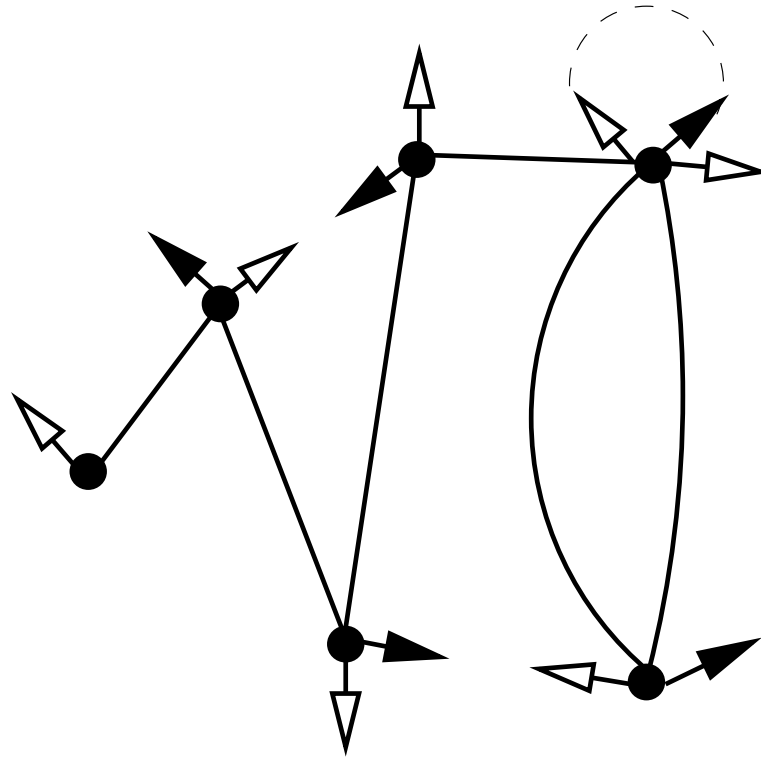
Partant d'un graphe planaire enraciné à valences paires





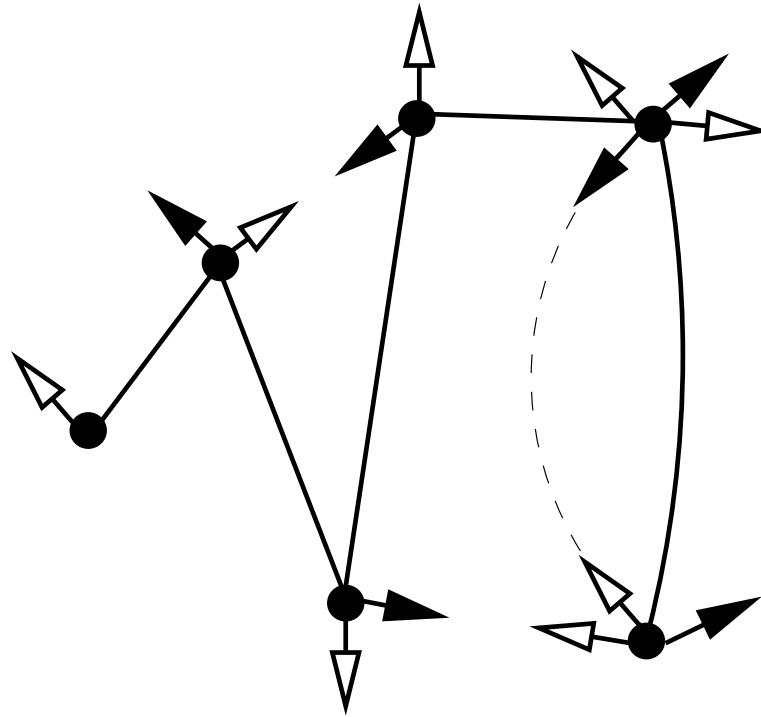
# Des graphes aux arbres bourgeonnants

Partant d'un graphe planaire enraciné à valences paires



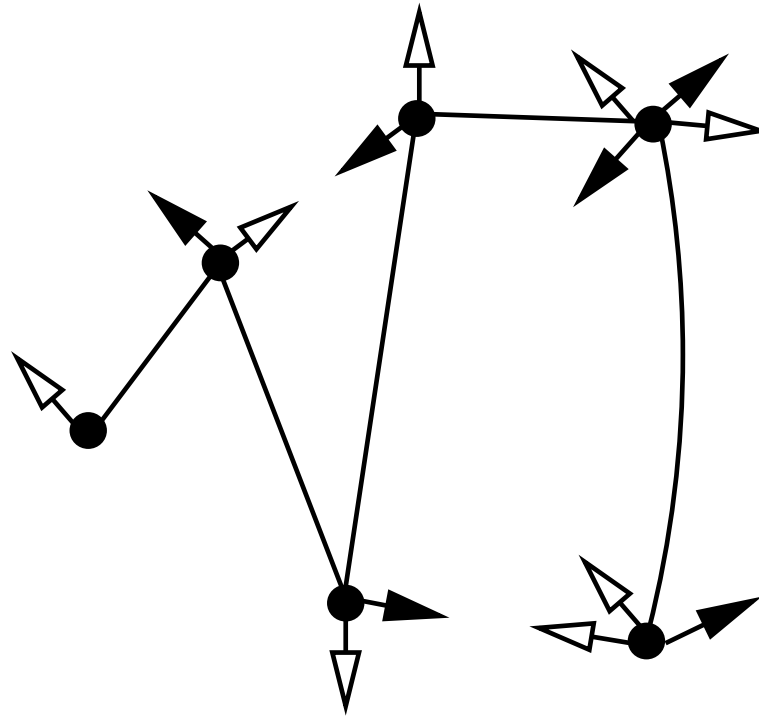
# Des graphes aux arbres bourgeonnants

Partant d'un graphe planaire enraciné à valences paires



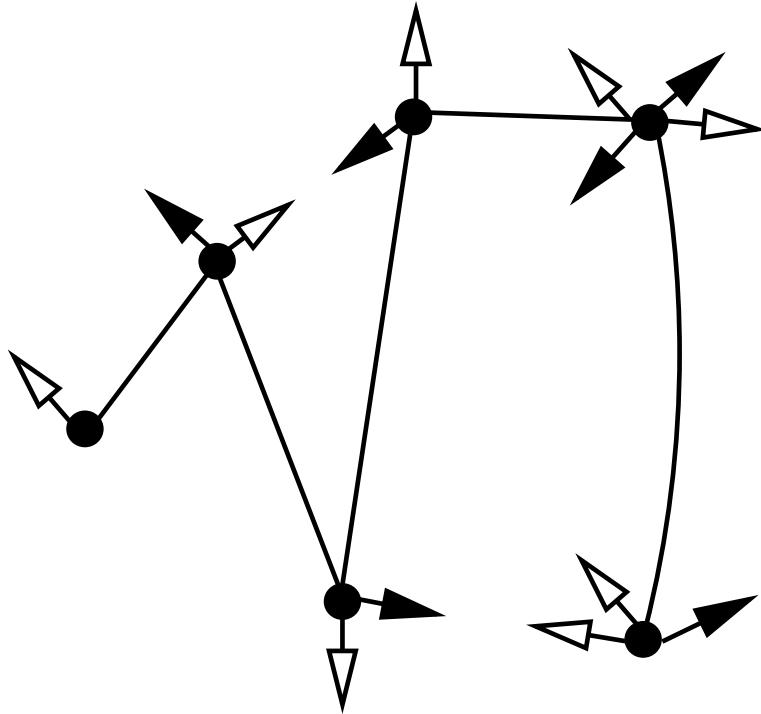
# Des graphes aux arbres bourgeonnants

Partant d'un graphe planaire enraciné à valences paires

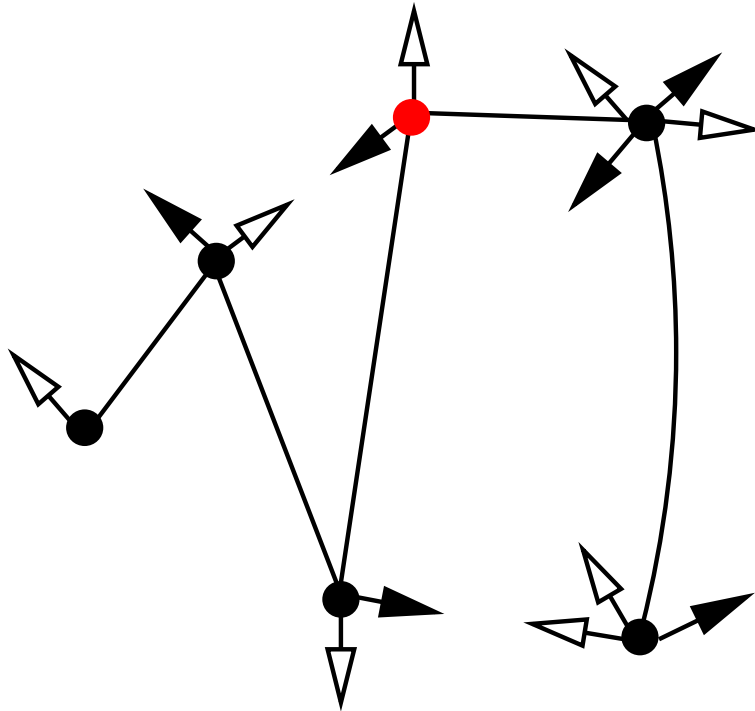


On obtient un arbre (planaire) **bourgeonnant**

# Arbres bourgeonnants

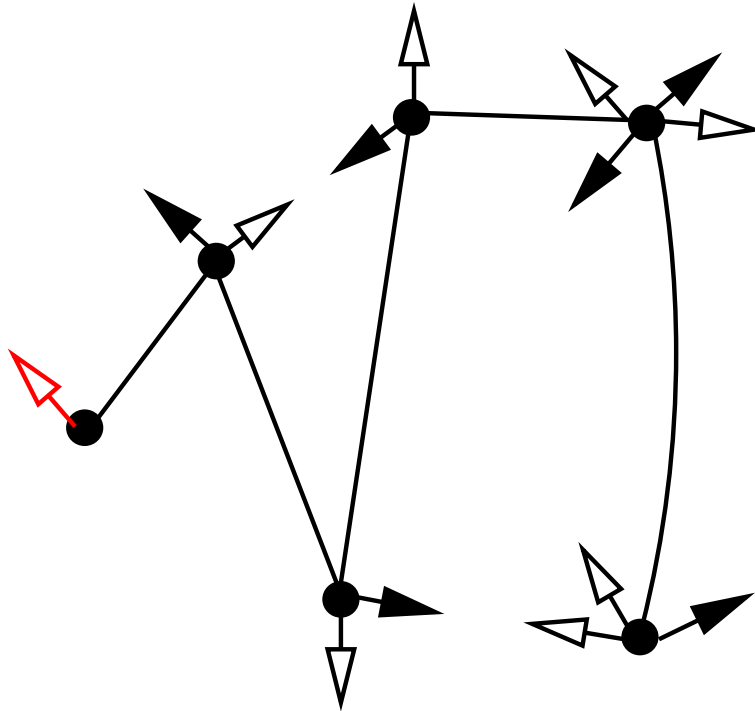


# Arbres bourgeonnants



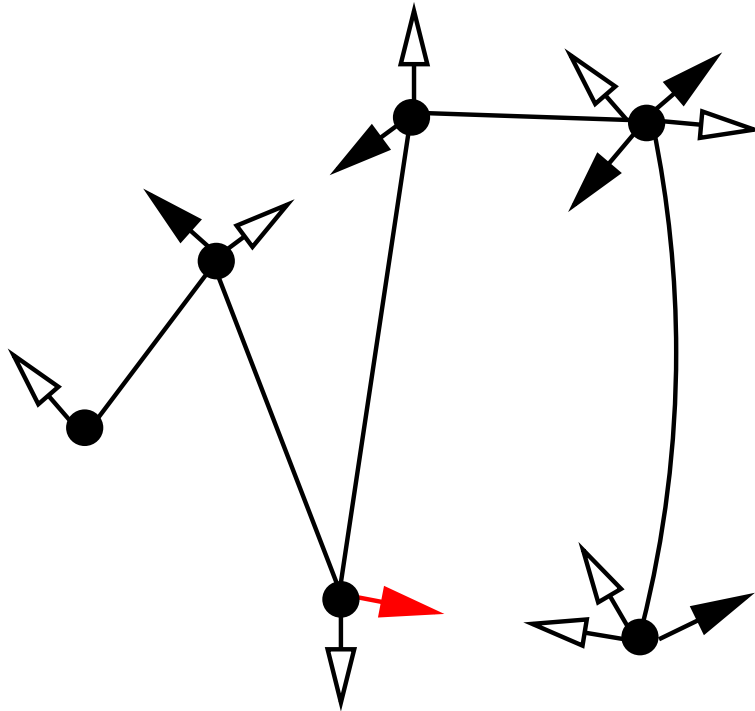
(i) Arbre planaire avec des vertex internes de valence **paire**;

# Arbres bourgeonnants



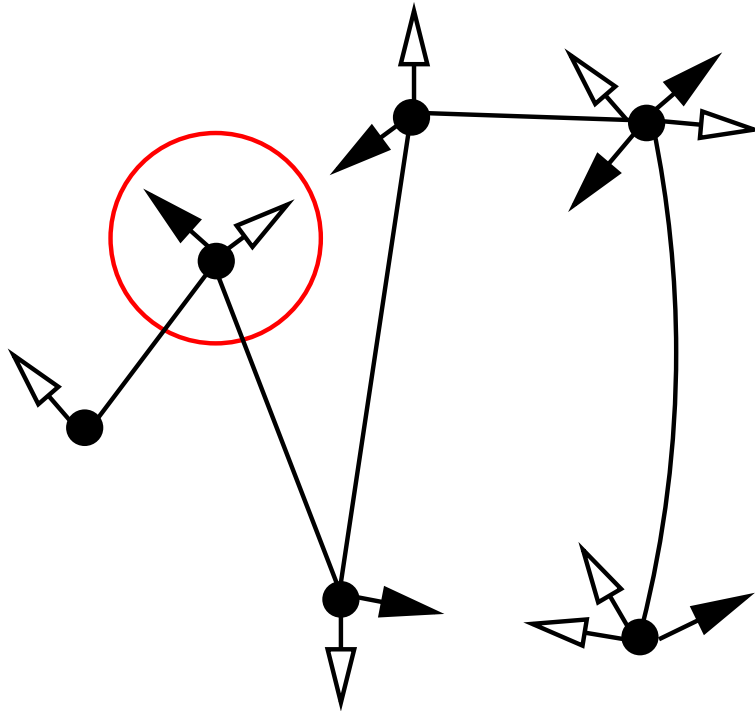
- (i) Arbre planaire avec des vertex internes de valence **paire**;
- (ii) Deux types de points terminaux: **feuilles**

# Arbres bourgeonnants



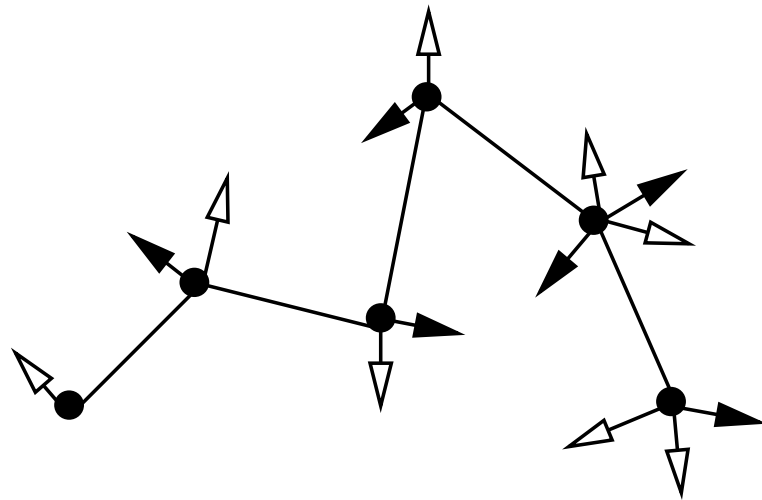
- (i) Arbre planaire avec des vertex internes de valence **paire**;
- (ii) Deux types de points terminaux: **feuilles** et **bourgeons**;

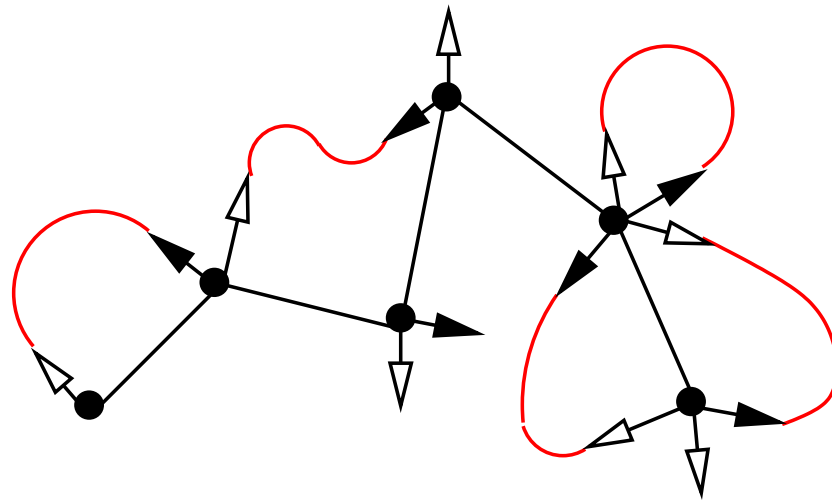
# Arbres bourgeonnants

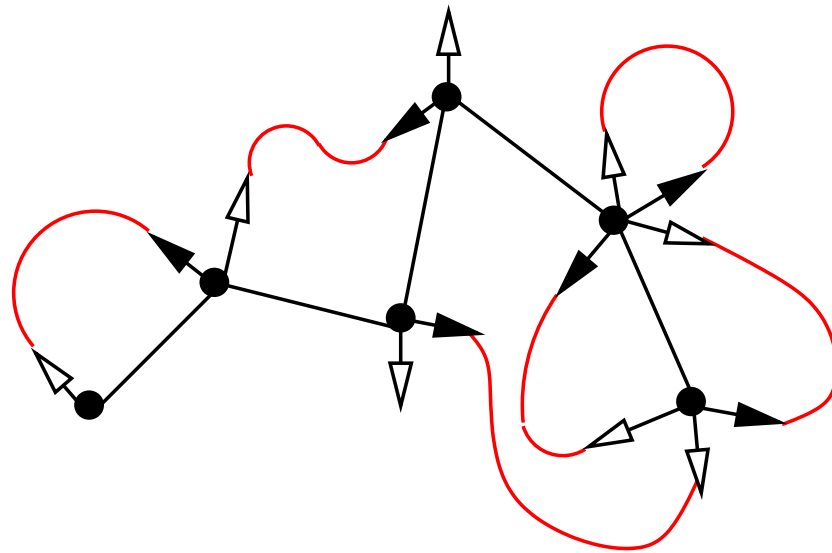


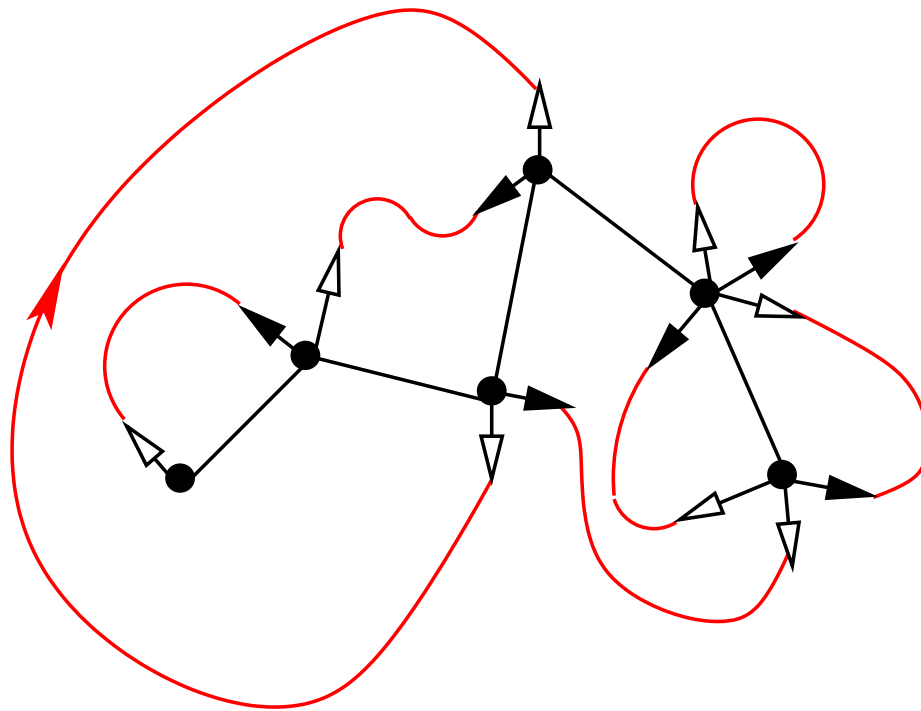
- (i) Arbre planaire avec des vertex internes de valence **paire**;
- (ii) Deux types de points terminaux: **feuilles** et **bourgeons**;
- (iii) **Exactement  $k - 1$  bourgeons** par vertex  $2k$ -valent;  
→ **deux feuilles de plus que de bourgeons**



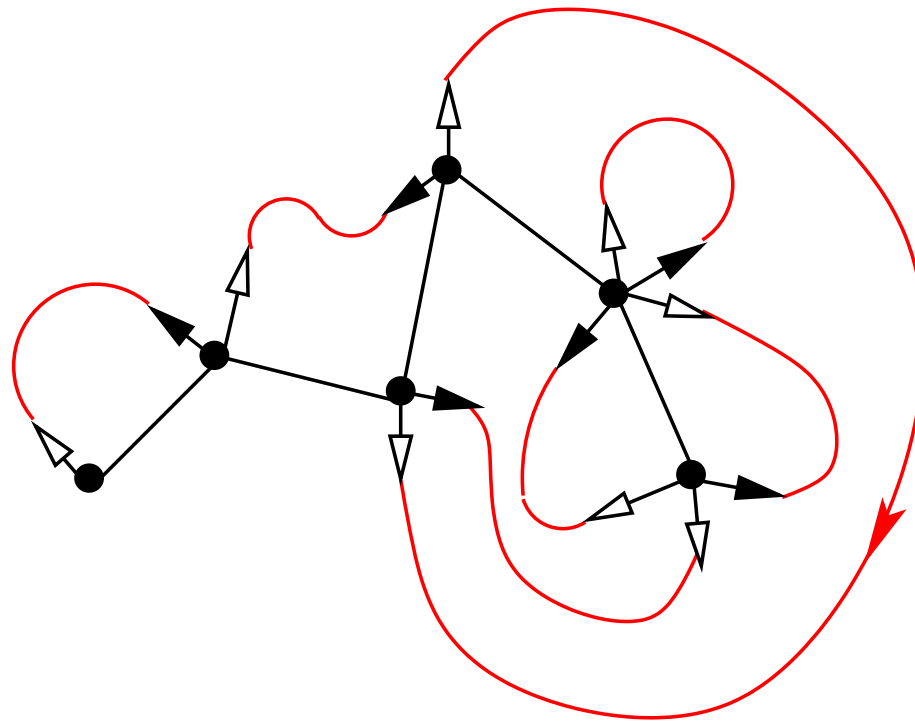








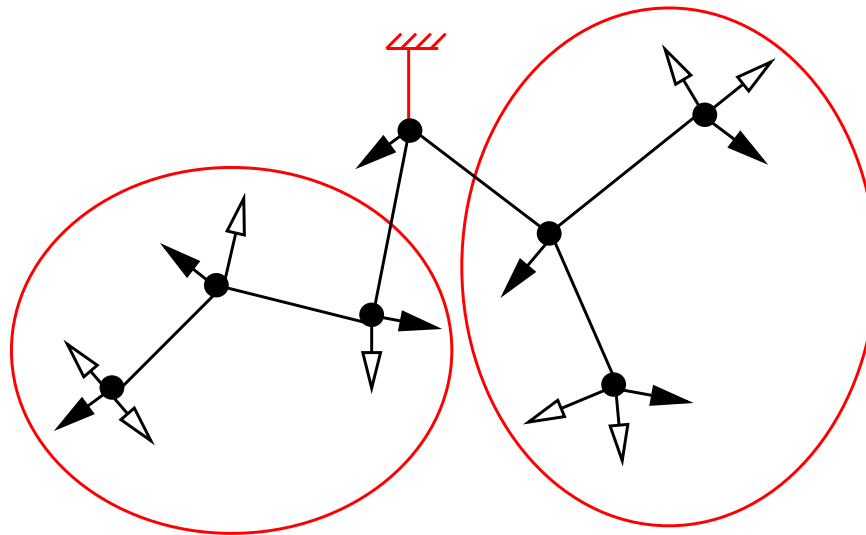
Correspondance **un-à-deux** entre **graphes planaires** et **arbres bourgeonnants**



Correspondance **un-à-deux** entre **graphes planaires** et **arbres bourgeonnants**

# Comptage des graphes tétravalents

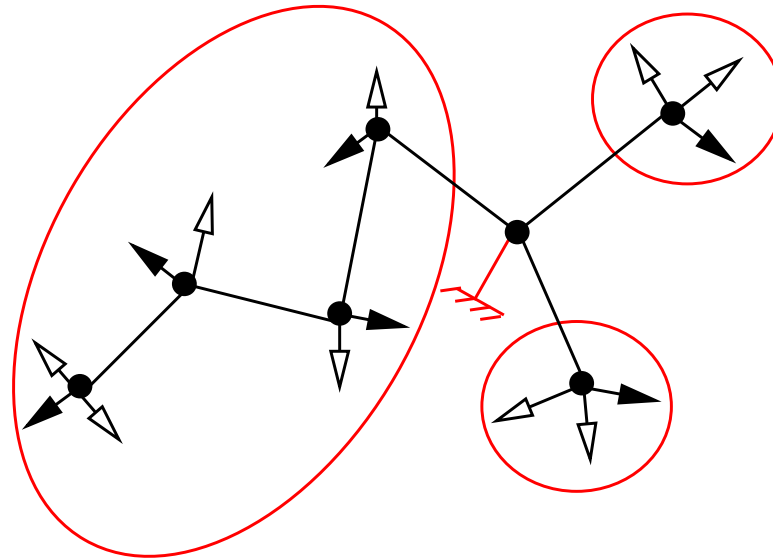
- ◇ Fonction génératrice:  $\rightarrow$  poids  $g$  par vertex  
Arbres bourgeonnants **plantés par une feuille**:



La fonction génératrice  $R$  satisfait:  $R = 1 + 3gR^2$

$$R = \frac{1 - \sqrt{1 - 12g}}{6g}$$

Arbres bourgeonnants **plantés par un bourgeon**:  $gR^3$ ,

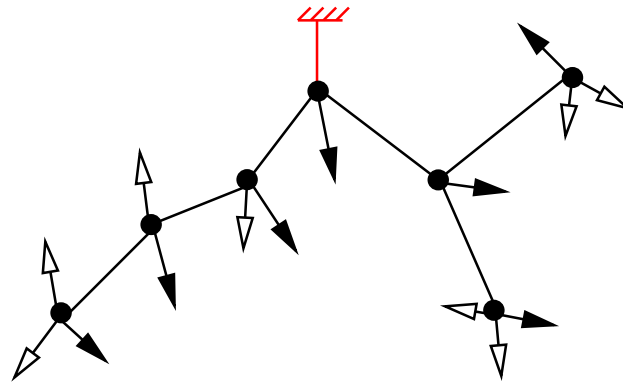


→  $\Gamma_{\text{graphes tétra.}}(g) = 2\Gamma_{\text{arbres bourgeonnants}}(g) = R - gR^3$   
 le nombre de graphes planaires tétravalent enracinés à  $n$   
 vertex est

$$\frac{2}{n+2} 3^n \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

# Distance géodésique

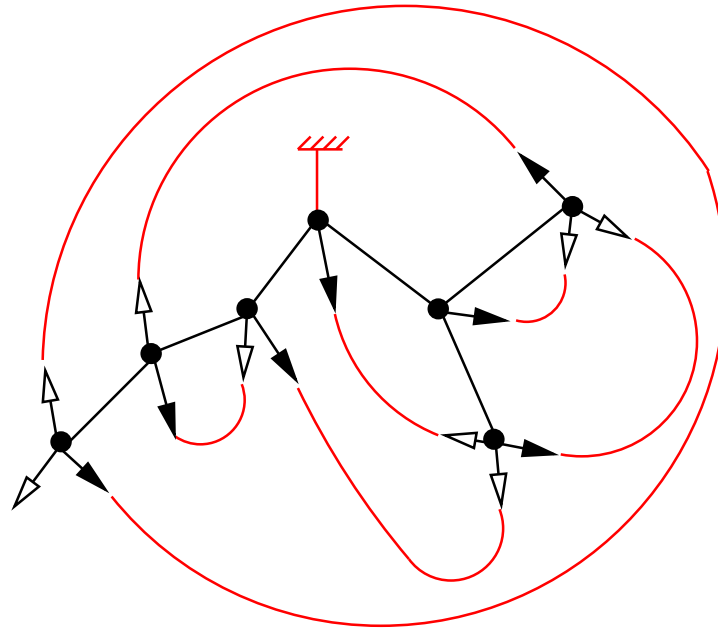
$R$  est la fonc.gén. des diagrammes à deux pattes





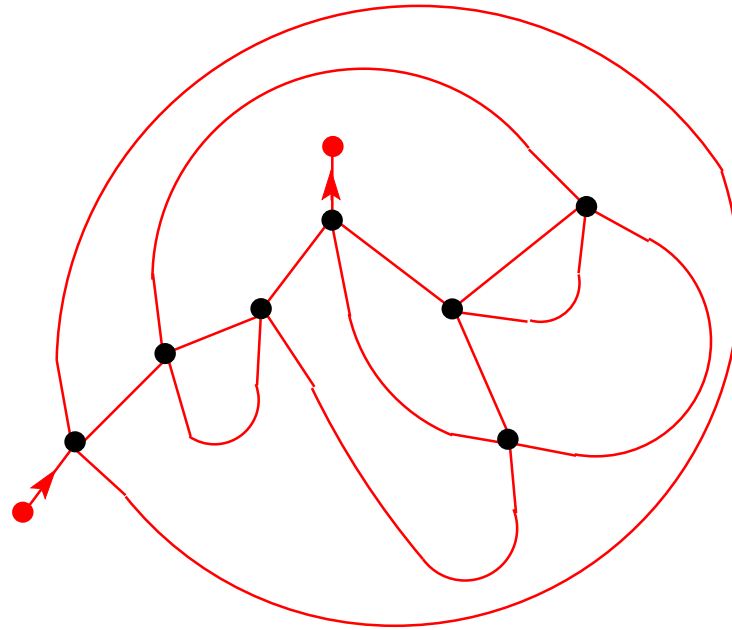
# Distance géodésique

$R$  est la fonc.gén. des diagrammes à deux pattes



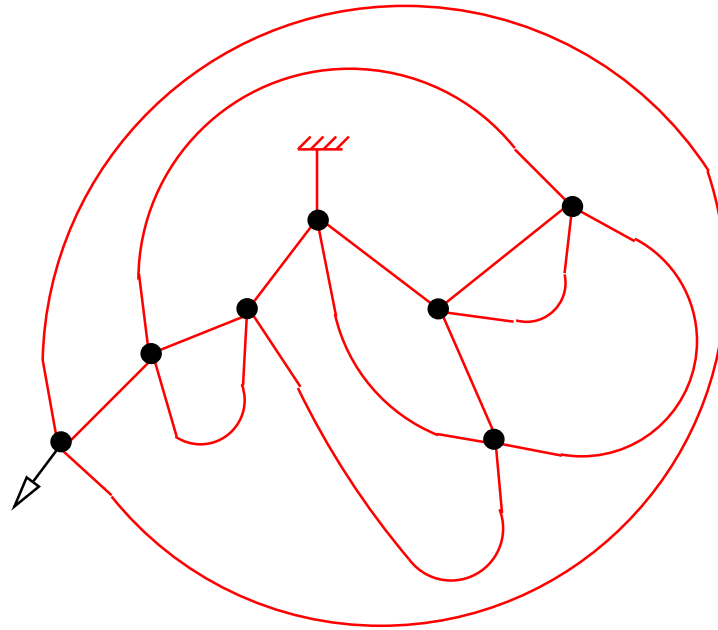
# Distance géodésique

$R$  est la fonc.gén. des diagrammes à deux pattes



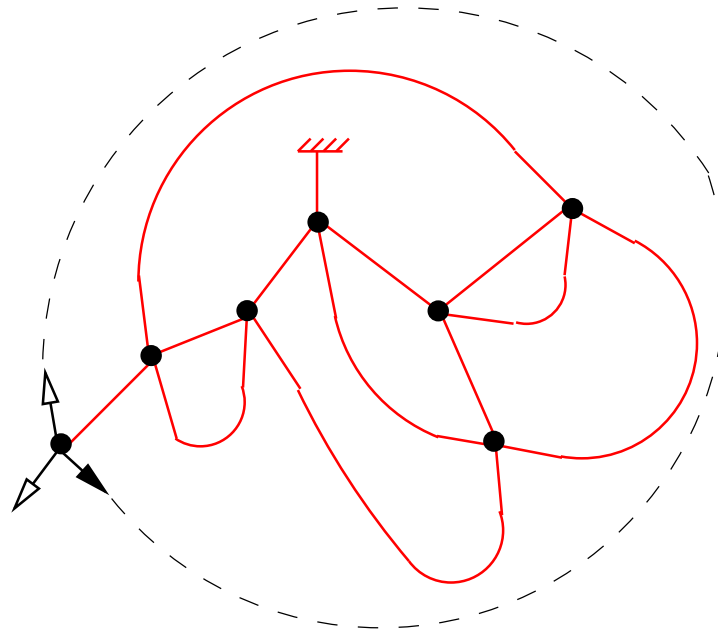
# Distance géodésique

$R$  est la fonc.gén. des diagrammes à deux pattes



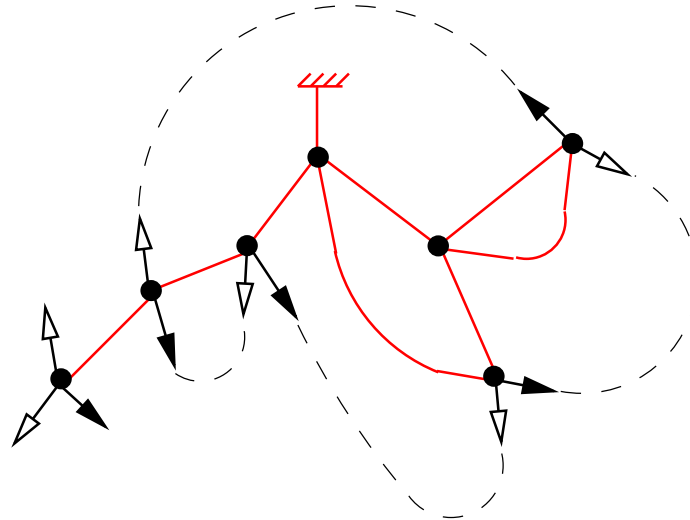
# Distance géodésique

$R$  est la fonc.gén. des diagrammes à deux pattes



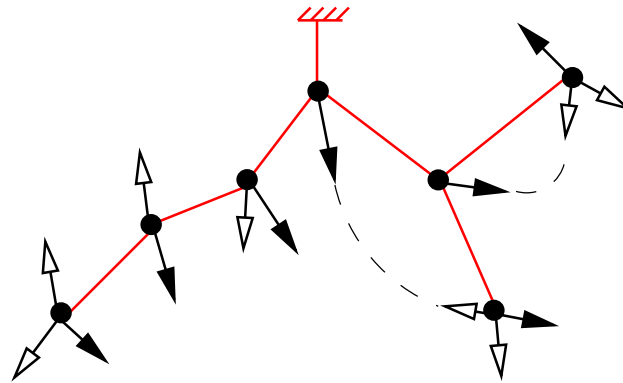
# Distance géodésique

$R$  est la fonc.gén. des diagrammes à deux pattes



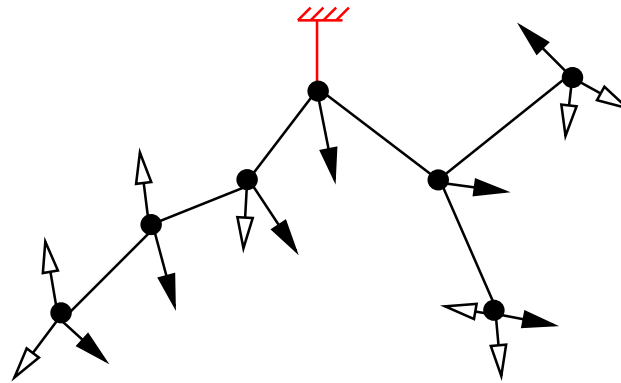
# Distance géodésique

$R$  est la fonc.gén. des diagrammes à deux pattes



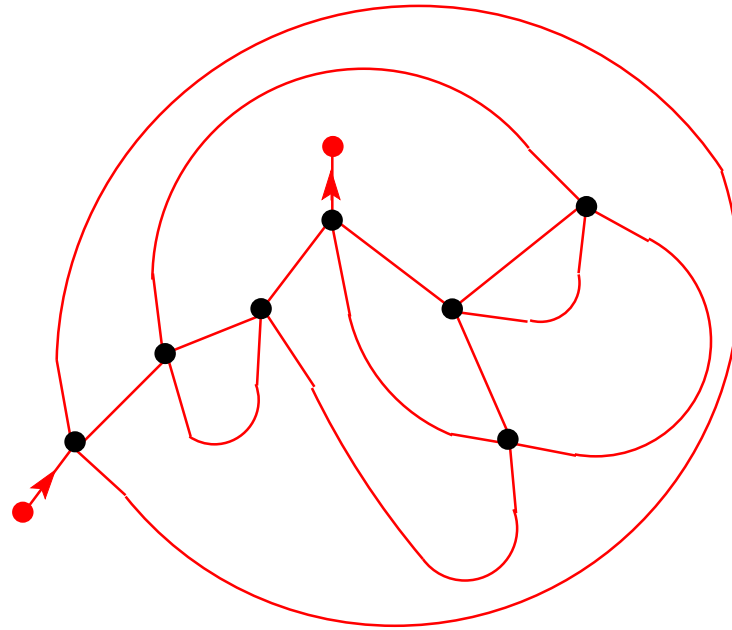
# Distance géodésique

$R$  est la fonc.gén. des diagrammes à deux pattes



# Distance géodésique

$R$  est la fonc.gén. des diagrammes à **deux pattes**



$R$  → les deux pattes sont n'importe où (distance arbitraire)

$R_i$  → les deux pattes sont à distance **au plus  $i$**

$R_0$  → les deux pattes sont dans la même face (distance **0**)

→ graphes enracinés



# Solution

$$R_i = 1 + gR_i(R_{i-1} + R_i + R_{i+1})$$

◇ Intégrale première:

$$R_i - g R_{i-1}R_iR_{i+1} = \text{const.} = R - gR^3$$

# Solution

$$R_i = 1 + gR_i(R_{i-1} + R_i + R_{i+1})$$

◇ Intégrale première:

$$R_i - g R_{i-1} R_i R_{i+1} = \text{const.} = R - g R^3$$

En particulier, on retrouve directement:

$$\Gamma_{\text{graphes. tétra.}} = R_0 = R - g R^3$$

# Solution

$$R_i = 1 + gR_i(R_{i-1} + R_i + R_{i+1})$$

◇ Intégrale première:

$$R_i - g R_{i-1} R_i R_{i+1} = \text{const.} = R - g R^3$$

En particulier, on retrouve directement:

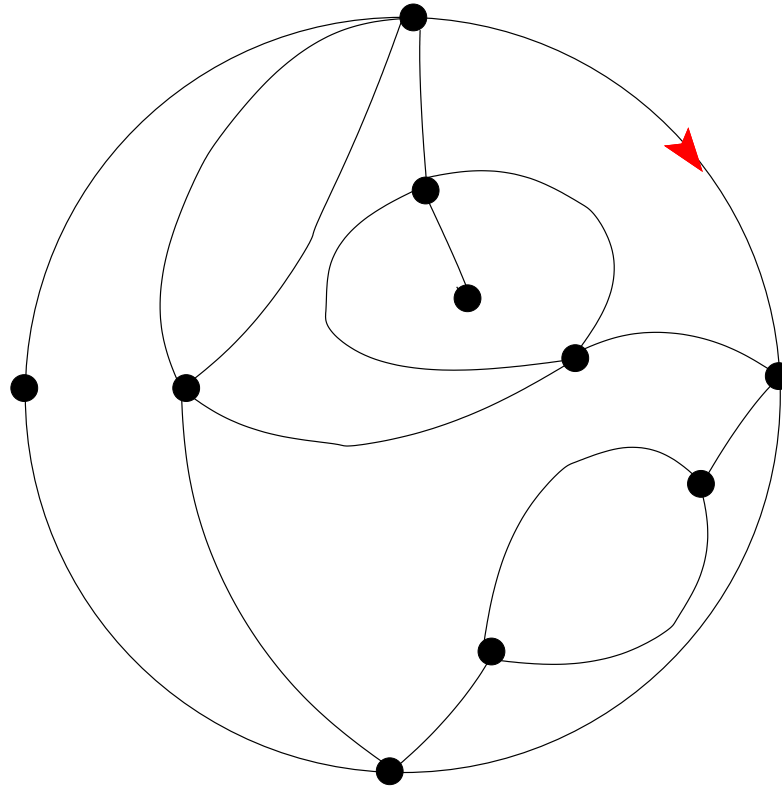
$$\Gamma_{\text{graphes. tétra.}} = R_0 = R - g R^3$$

◇ Intégrabilité: 😊

$$R_i = R \frac{u_i u_{i+3}}{u_{i+1} u_{i+2}}, \quad u_i \equiv 1 - x^{i+1}, \quad x + \frac{1}{x} = \frac{1 - g R^2}{g R^2}$$

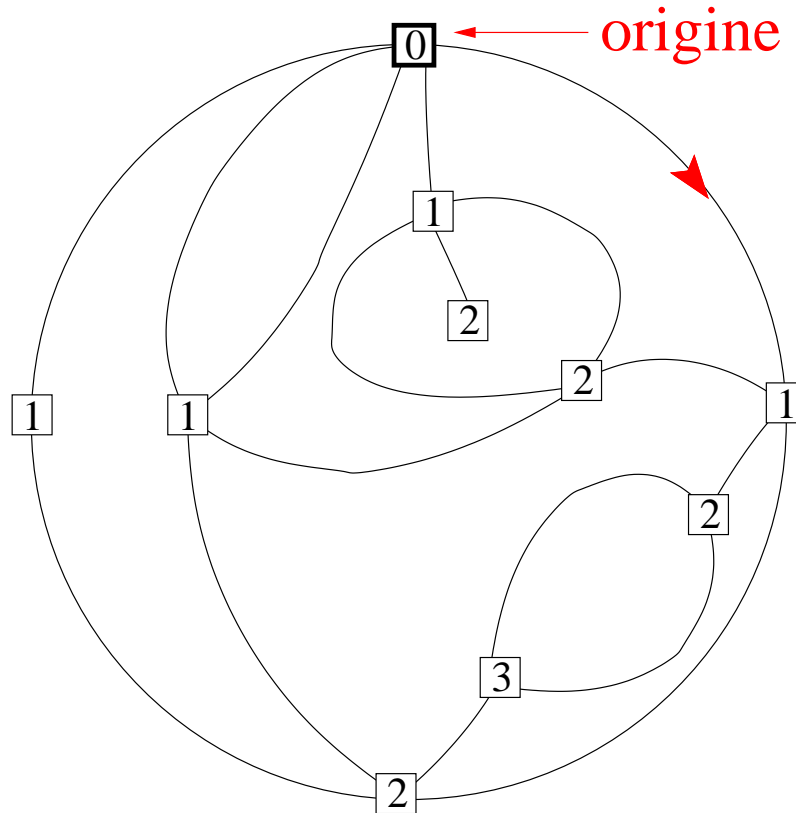
# Des graphes aux mobiles bien étiquetés

Partant d'un graphe planaire enraciné à **faces** paires



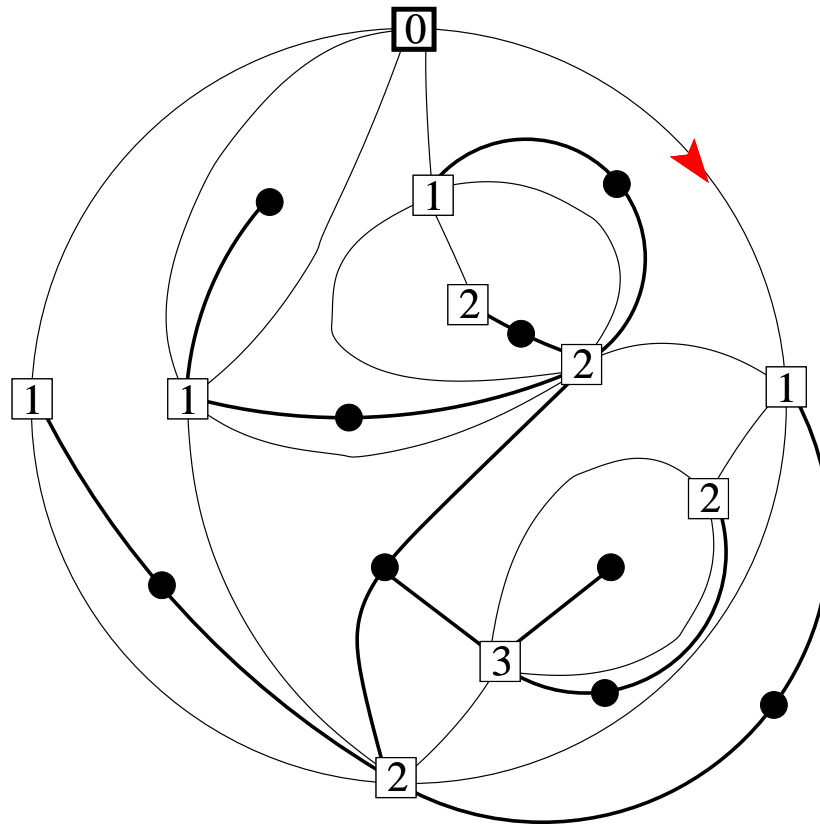
# Des graphes aux mobiles bien étiquetés

Partant d'un graphe planaire enraciné à **faces** paires



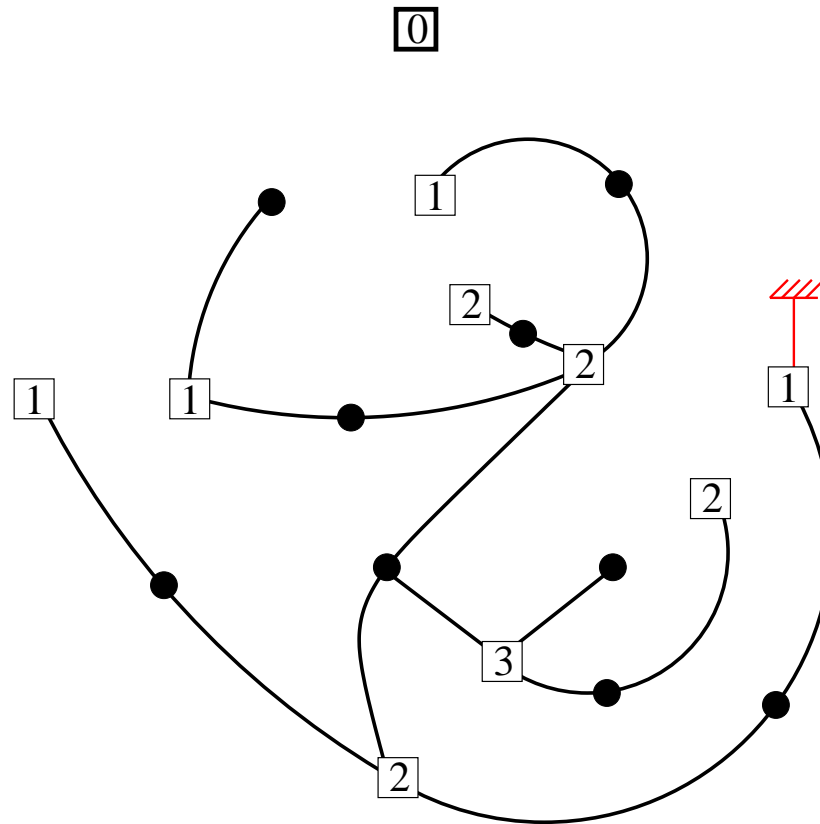
# Des graphes aux mobiles bien étiquetés

Partant d'un graphe planaire enraciné à **faces** paires



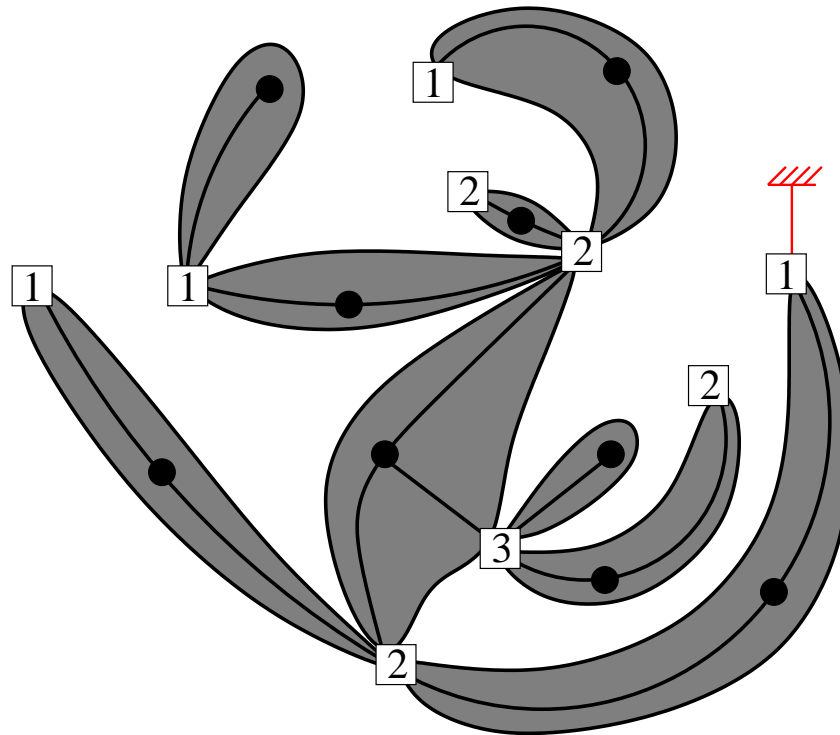
# Des graphes aux mobiles bien étiquetés

Partant d'un graphe planaire enraciné à **faces** paires



# Des graphes aux mobiles bien étiquetés

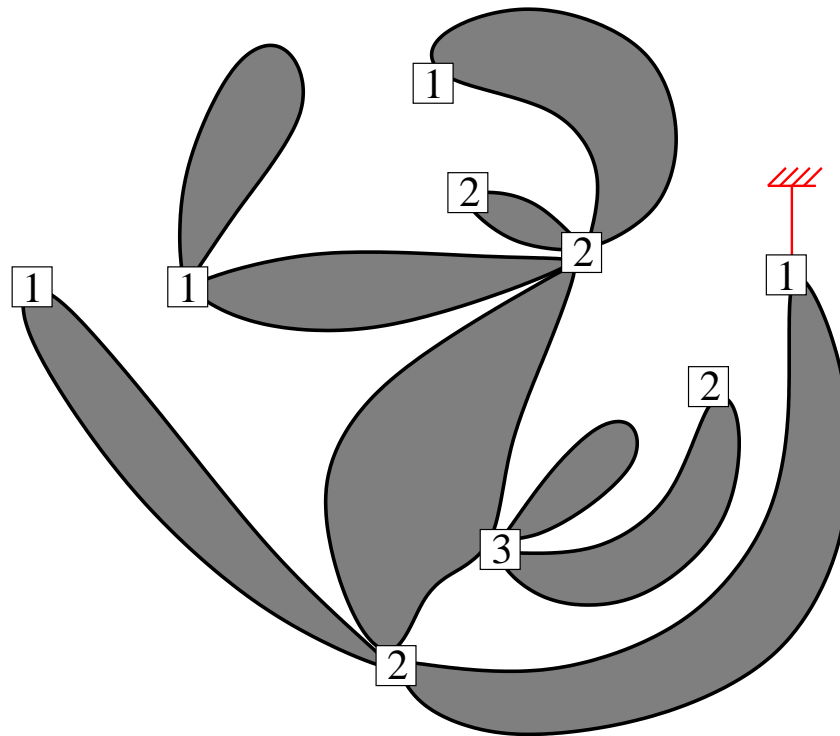
Partant d'un graphe planaire enraciné à **faces** paires





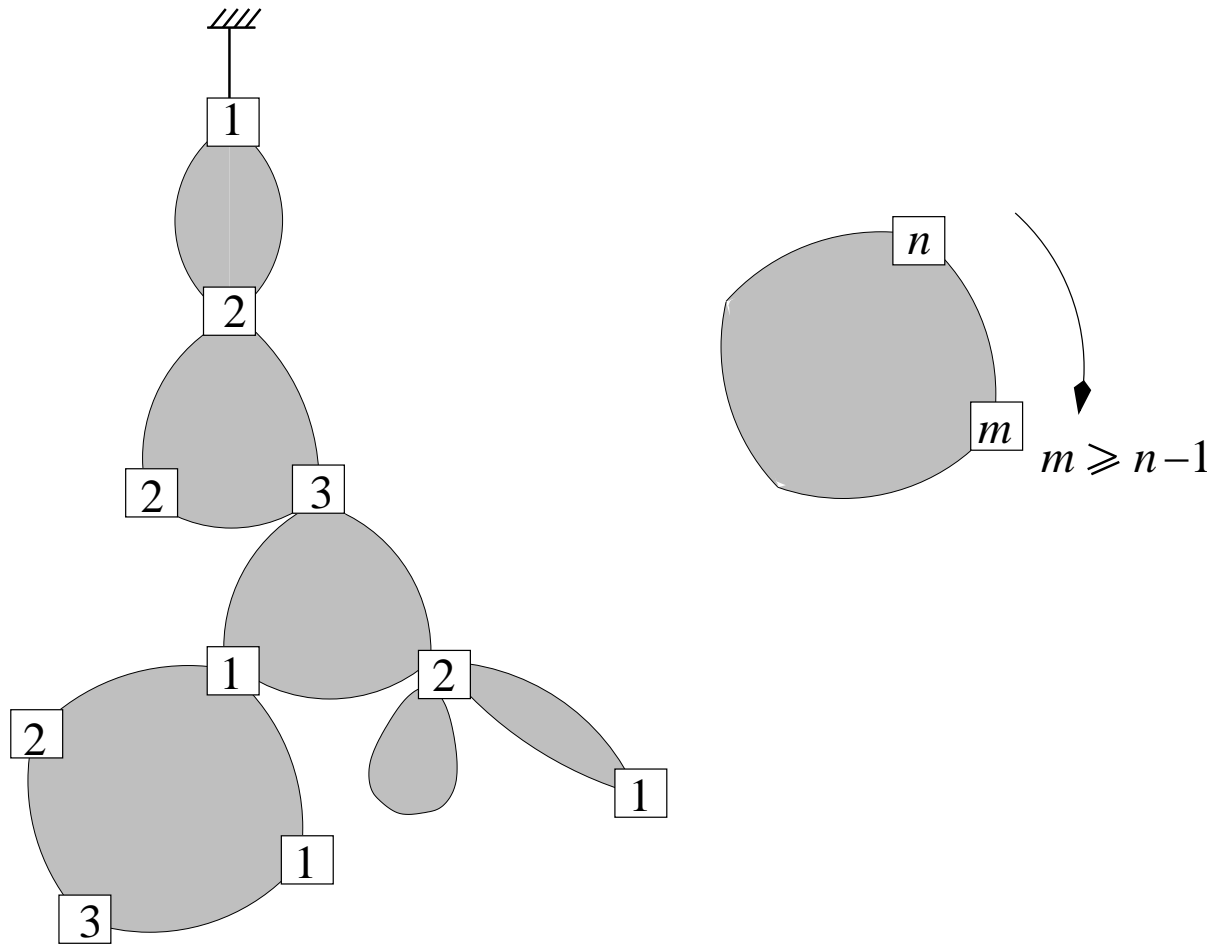
# Des graphes aux mobiles bien étiquetés

Partant d'un graphe planaire enraciné à **faces** paires

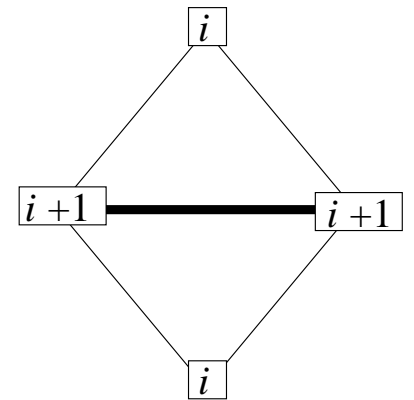
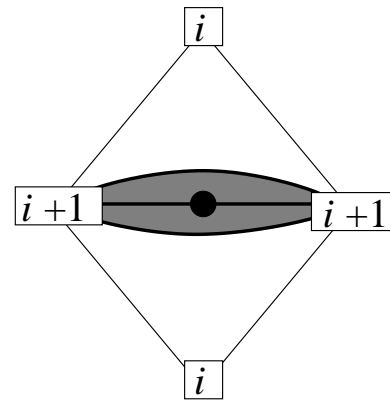
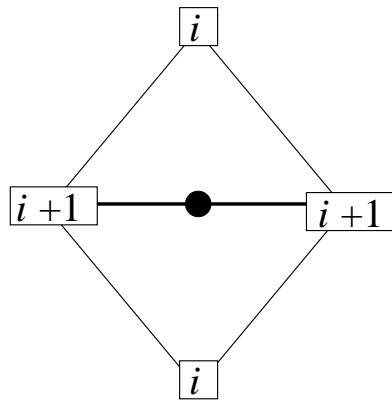
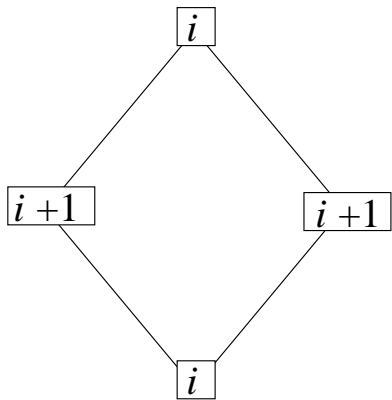
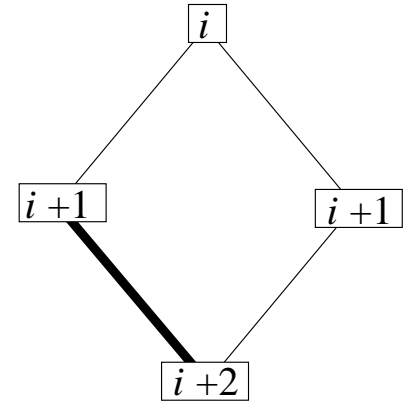
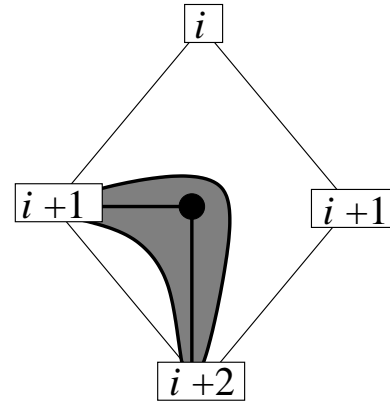
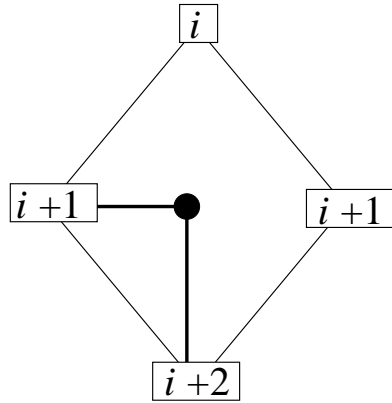
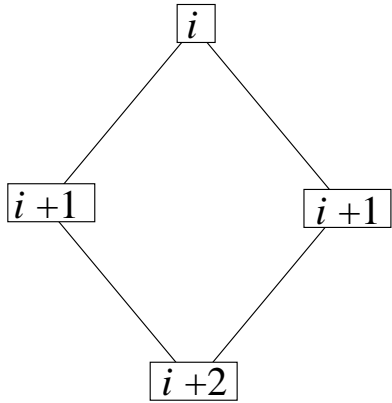


On termine avec un mobile **étiqueté**

# Mobles bien étiquetés

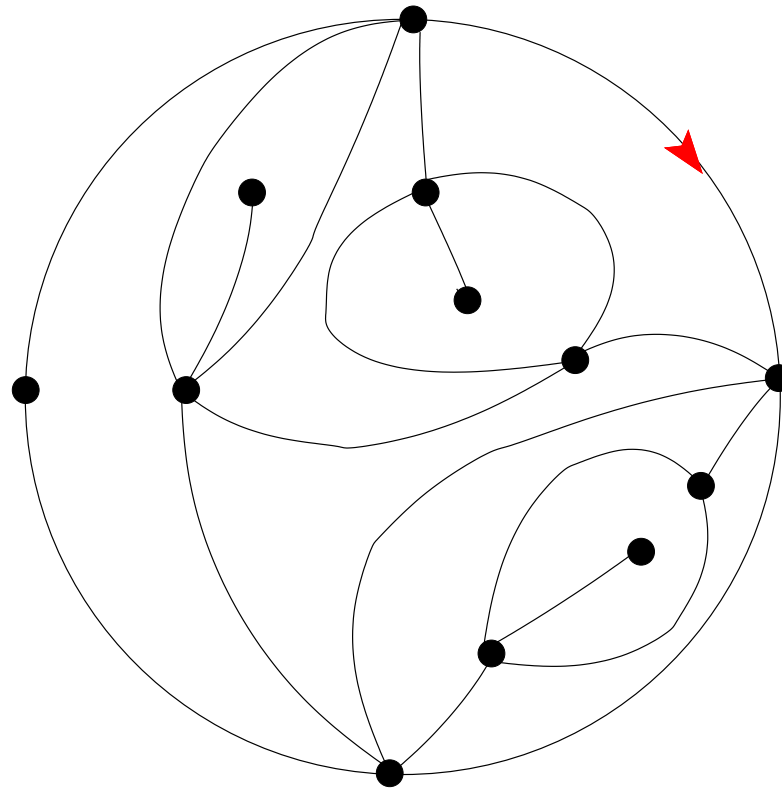


# Cas des quadrangulations



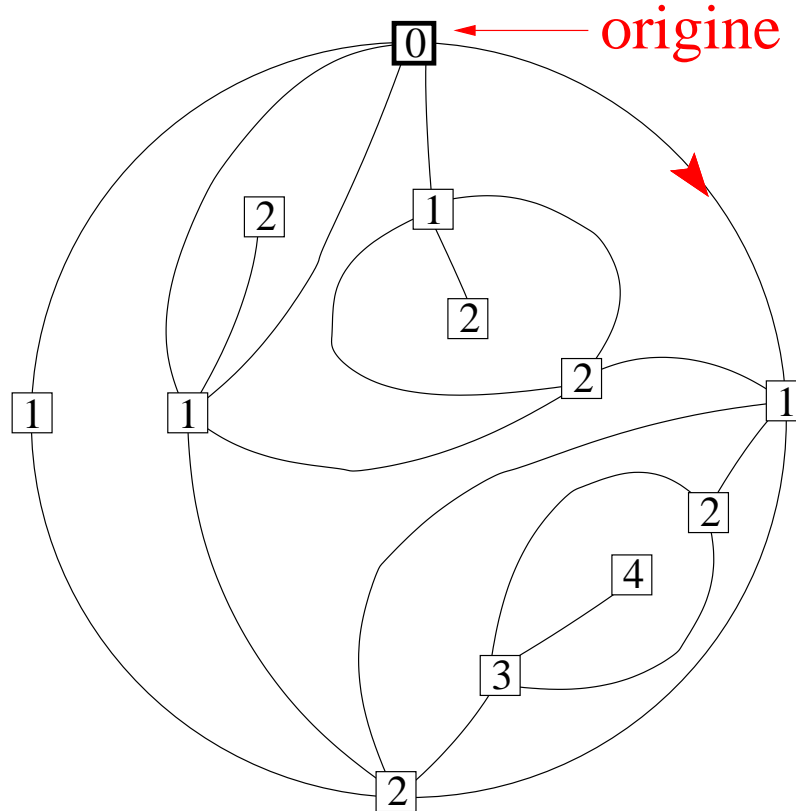
# Quadrangulations $\rightarrow$ arbres étiquetés

Partant d'une quadrangulation plane enracinée



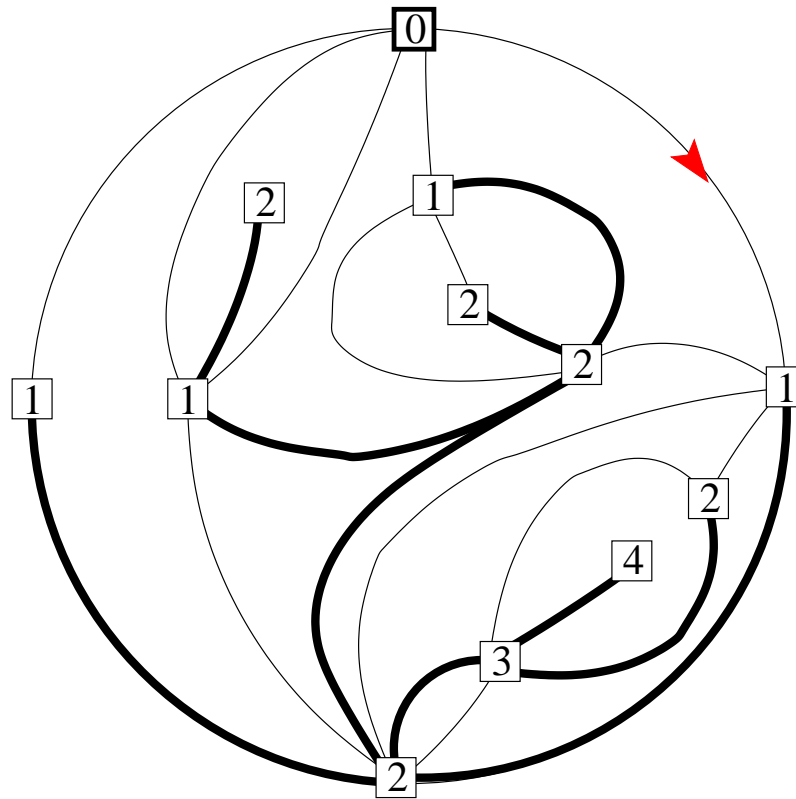
# Quadrangulations $\rightarrow$ arbres étiquetés

Partant d'une quadrangulation plane enracinée



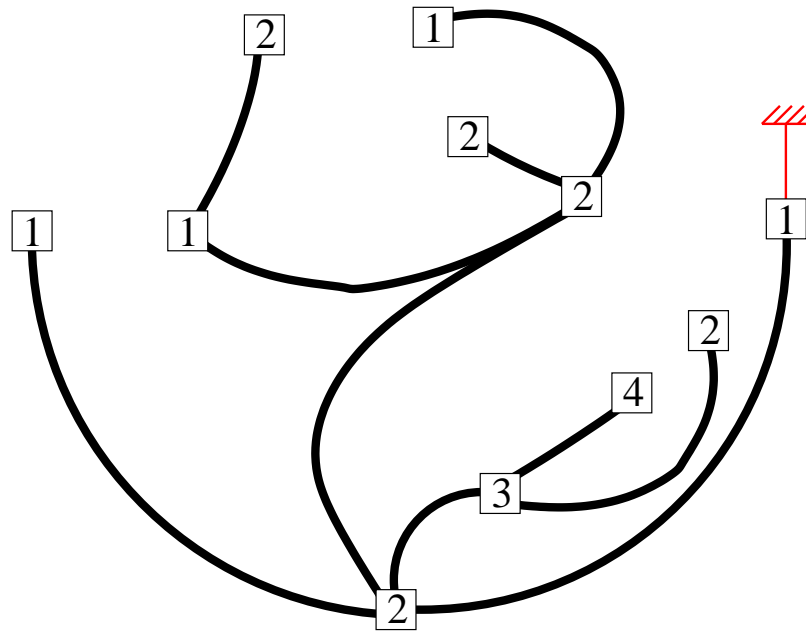
# Quadrangulations $\rightarrow$ arbres étiquetés

Partant d'une quadrangulation plane enracinée



# Quadrangulations $\rightarrow$ arbres étiquetés

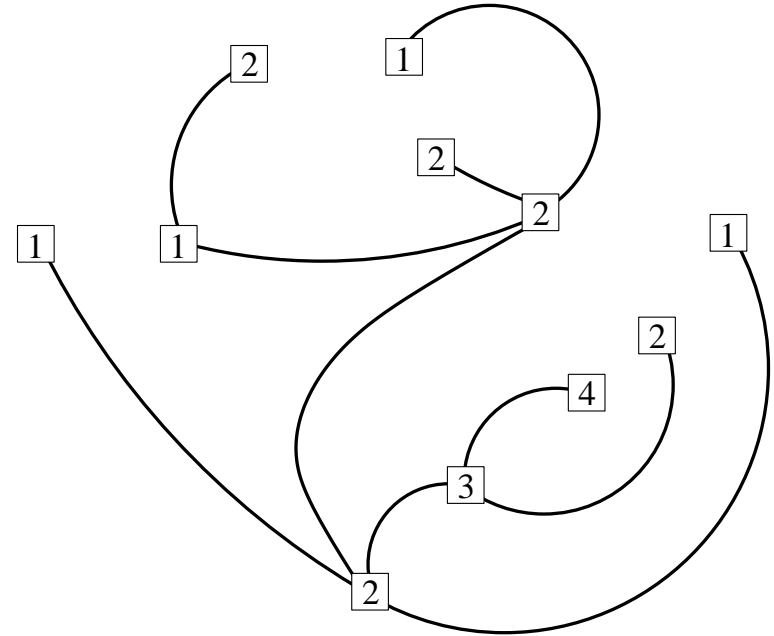
Partant d'une quadrangulation plane enracinée



On termine avec un arbre **bien étiqueté**

# Arbres bien étiquetés

Bien étiqueté:

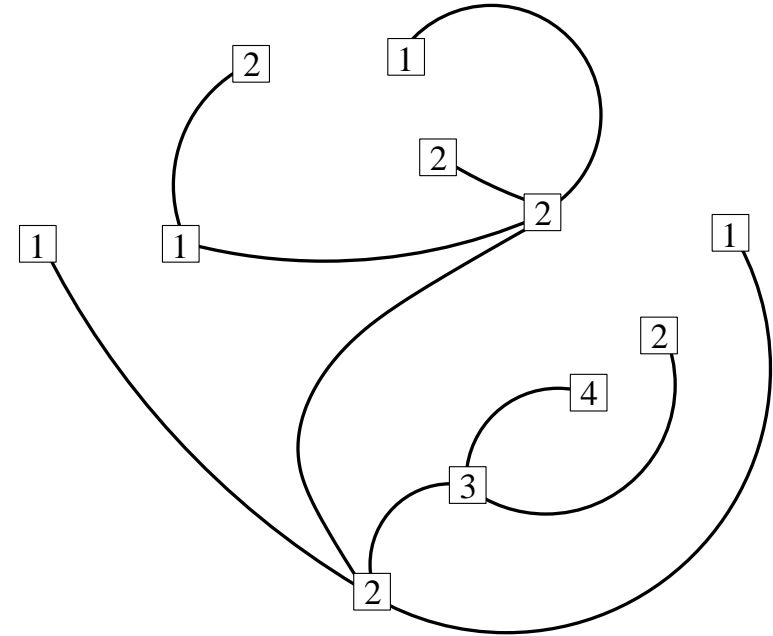




# Arbres bien étiquetés

Bien étiqueté:

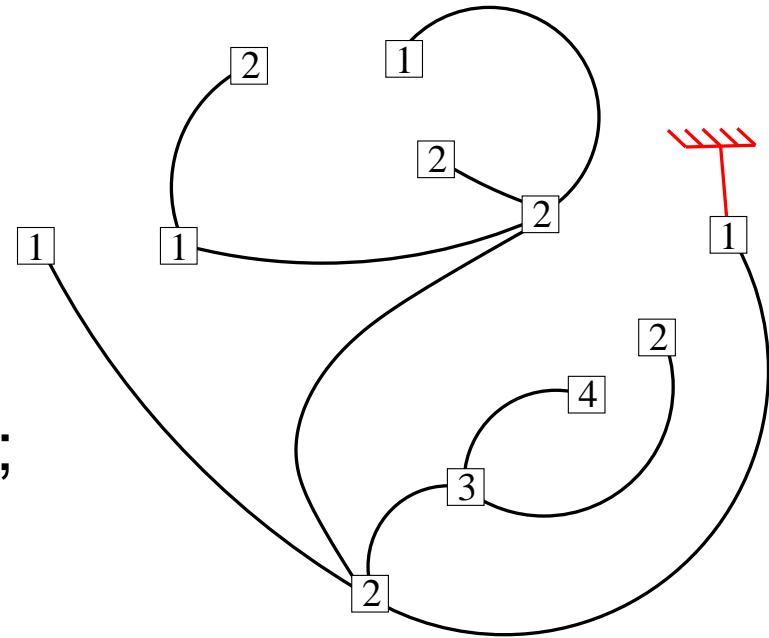
(i) étiqueté par des entiers  $\geq 1$ ;



# Arbres bien étiquetés

Bien étiqueté:

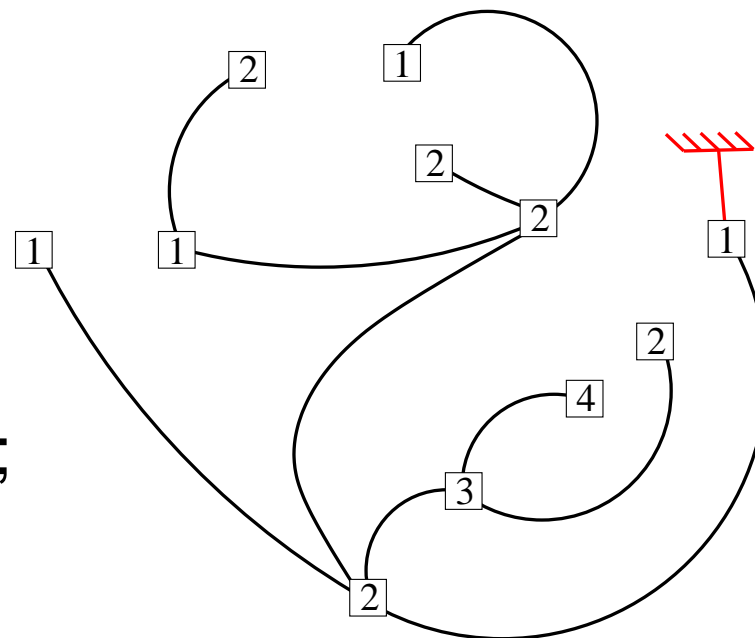
- (i) étiqueté par des entiers  $\geq 1$ ;
- (ii) planté à un vertex étiqueté 1;



# Arbres bien étiquetés

Bien étiqueté:

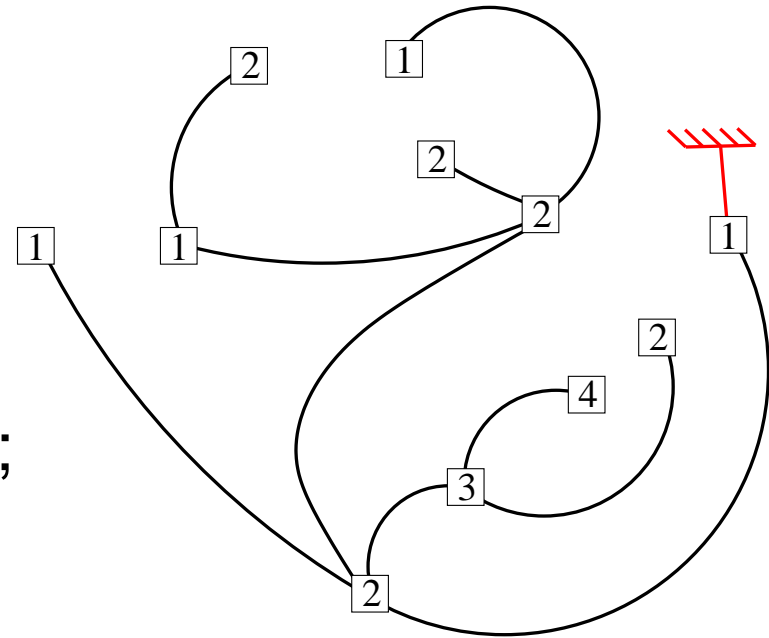
- (i) étiqueté par des entiers  $\geq 1$ ;
- (ii) planté à un vertex étiqueté 1;
- (iii) l'étiquette varie d'au plus 1 entre voisins;



# Arbres bien étiquetés

Bien étiqueté:

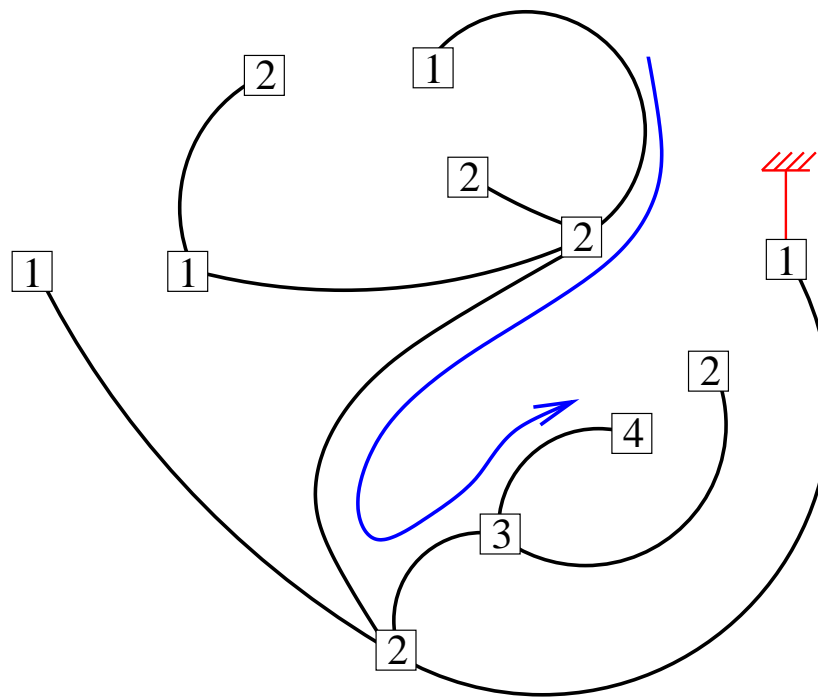
- (i) étiqueté par des entiers  $\geq 1$ ;
- (ii) planté à un vertex étiqueté 1;
- (iii) l'étiquette varie d'au plus 1 entre voisins;



Les étiquettes sont la **distance géodésique** à l'origine sur la quadrangulation associée

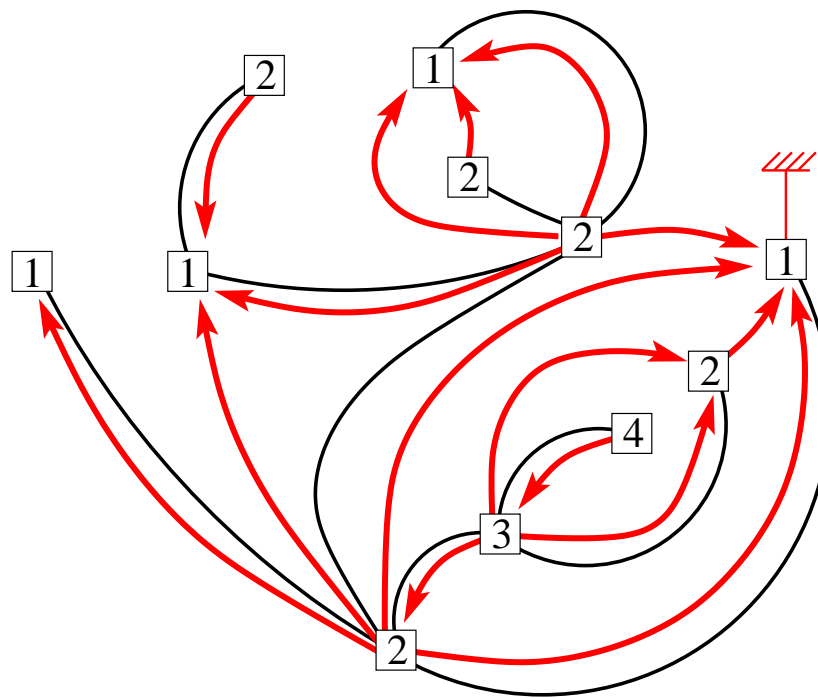
# Arbres étiquetés $\rightarrow$ quadrangulations

En parcourant l'arbre dans le sens des aiguilles d'une montre, chaque **coin**  $i$  a un **successeur**  $i - 1$



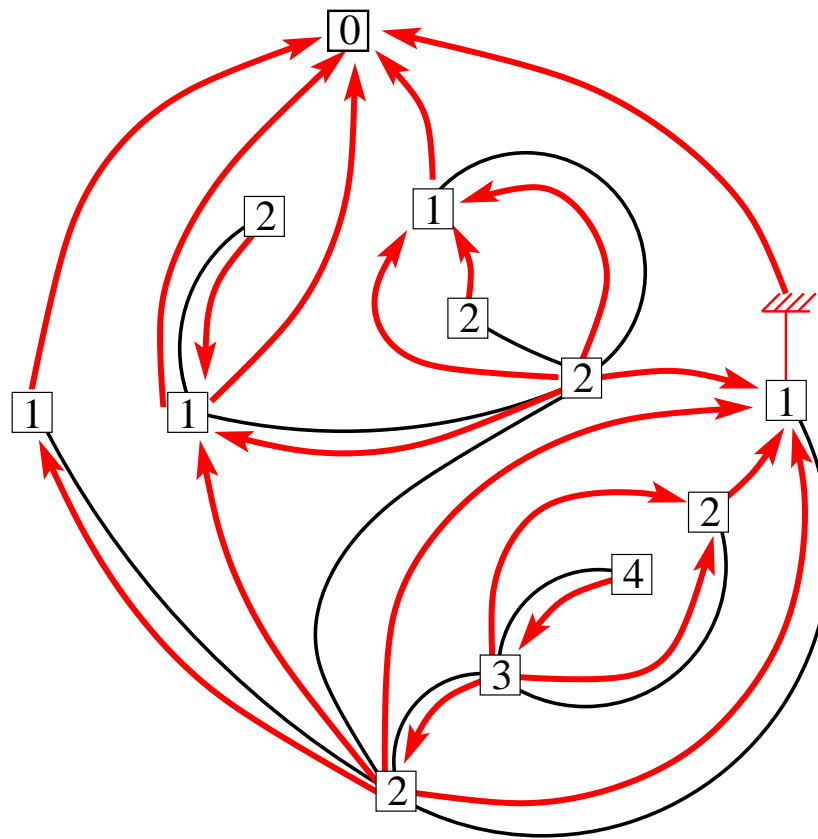
# Arbres étiquetés $\rightarrow$ quadrangulations

En parcourant l'arbre dans le sens des aiguilles d'une montre, chaque **coin**  $i$  a un **successeur**  $i - 1$



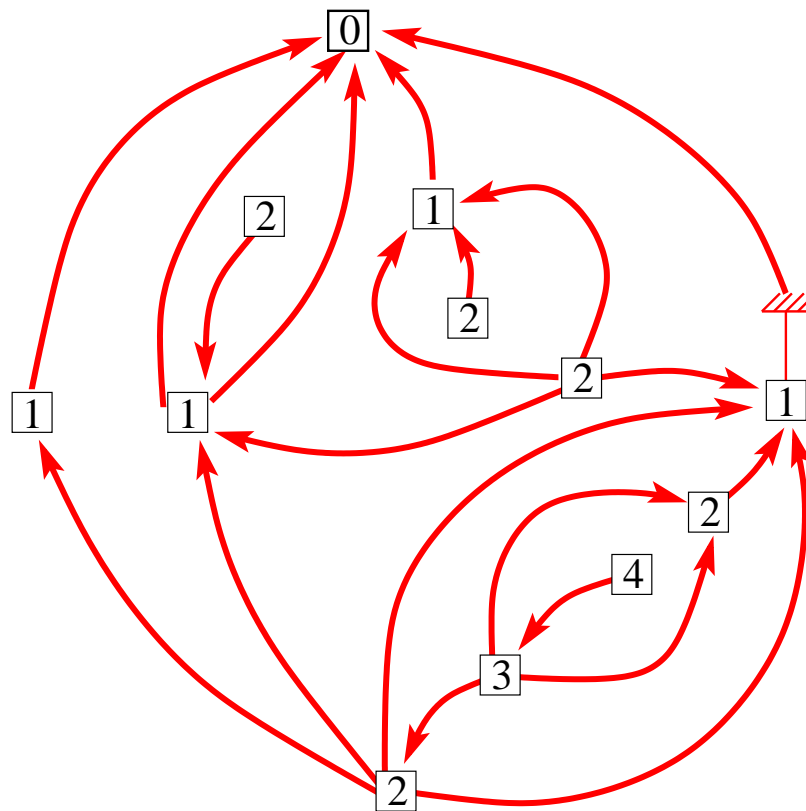
# Arbres étiquetés $\rightarrow$ quadrangulations

En parcourant l'arbre dans le sens des aiguilles d'une montre, chaque **coin**  $i$  a un **successeur**  $i - 1$



# Arbres étiquetés $\rightarrow$ quadrangulations

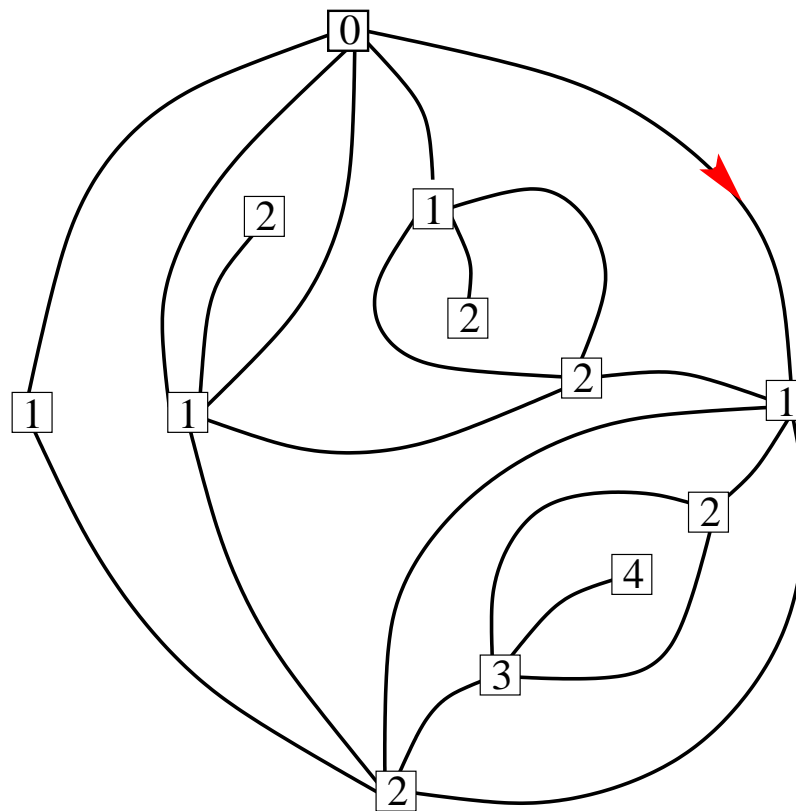
En parcourant l'arbre dans le sens des aiguilles d'une montre, chaque coin  $i$  a un successeur  $i - 1$





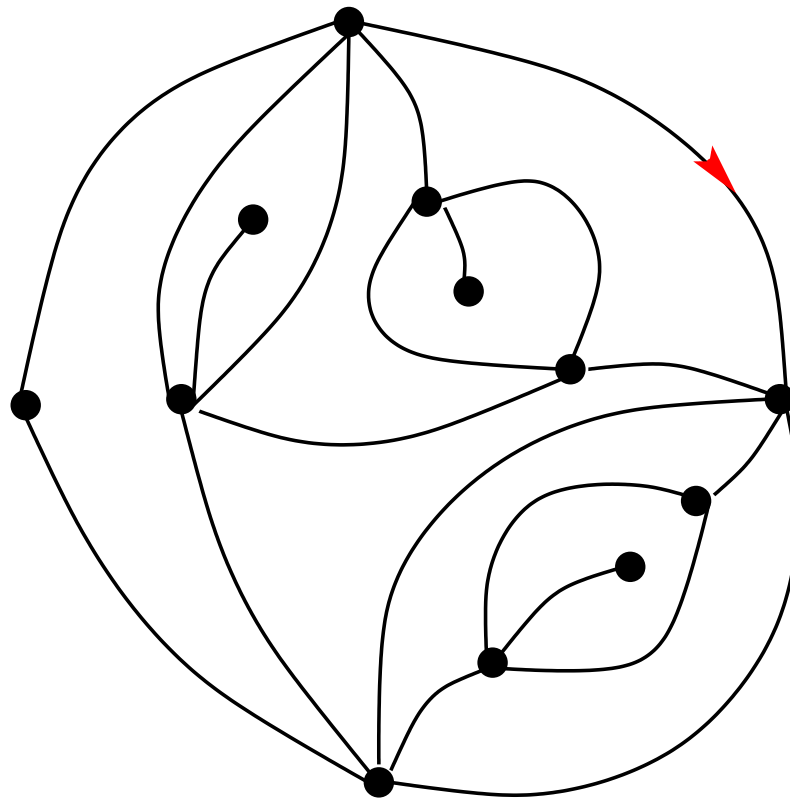
# Arbres étiquetés $\rightarrow$ quadrangulations

En parcourant l'arbre dans le sens des aiguilles d'une montre, chaque **coin**  $i$  a un **successeur**  $i - 1$



# Arbres étiquetés $\rightarrow$ quadrangulations

En parcourant l'arbre dans le sens des aiguilles d'une montre, chaque **coin**  $i$  a un **successeur**  $i - 1$



# Correspondance

quadrangulation planaire  
enracinée

arbre bien étiqueté  
planté à une étiquette 1

# Correspondance

quadrangulation planaire  
enracinée

vertex à distance  $i$   
de l'origine

arbre bien étiqueté  
planté à une étiquette 1

vertex étiqueté  $i$

# Correspondance

quadrangulation planaire  
enracinée

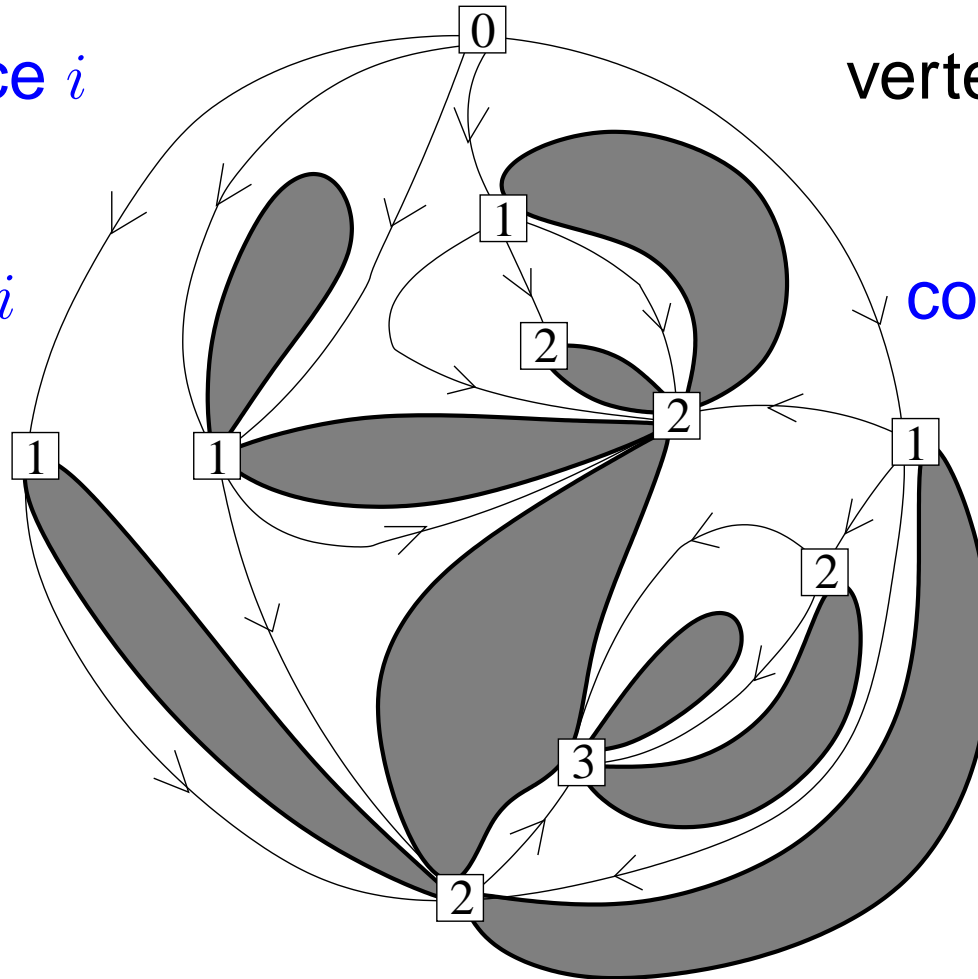
arbre bien étiqueté  
planté à une étiquette 1

vertex à distance  $i$   
de l'origine

vertex étiqueté  $i$

arête  $(i - 1) \leftrightarrow i$

coin étiqueté  $i$



# Correspondance

quadrangulation planeaire  
enracinée

vertex à distance  $i$   
de l'origine

arête  $(i - 1) \leftrightarrow i$

marquer une arête  
 $(i - 1) \leftrightarrow i$

arbre bien étiqueté  
planté à une étiquette 1

vertex étiqueté  $i$

coin étiqueté  $i$

planter à un vertex  
étiqueté  $i$

# Correspondance

quadrangulation planaire  
enracinée

arbre bien étiqueté  
planté à une étiquette 1

vertex à distance  $i$   
de l'origine

vertex étiqueté  $i$

arête  $(i - 1) \leftrightarrow i$

coin étiqueté  $i$

marquer une arête  
 $(i - 1) \leftrightarrow i$

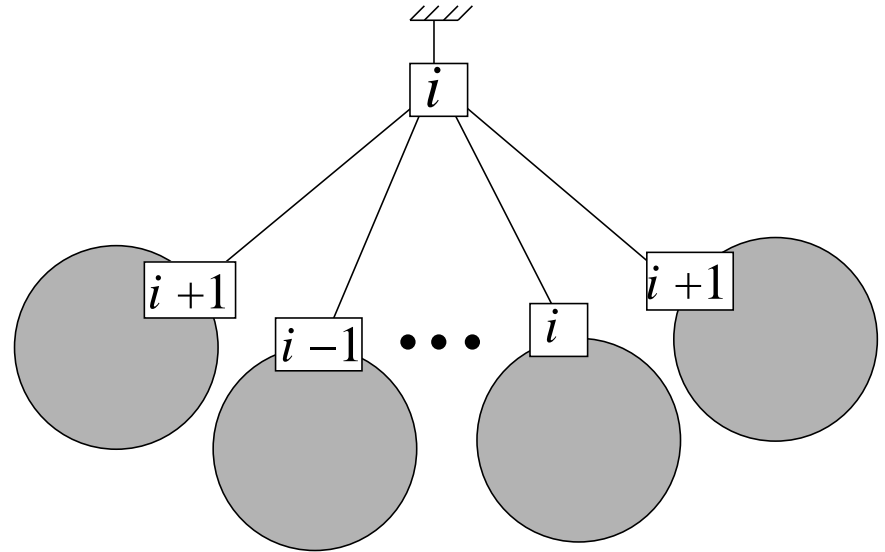
planter à un vertex  
étiqueté  $i$

---

$R_i$  est la fonc. gén. des quadrangulations avec **origine** et **arête marquée**  $(j - 1) \leftrightarrow j$  avec  $j \leq i$  (poids  $g$  par face)

# Relation de récurrence

$$R_i = \frac{1}{1 - g(R_{i+1} + R_i + R_{i-1})}$$



avec  $R_0 = 0$  et  $R_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} R$  où

$$R = \frac{1 - \sqrt{1 - 12g}}{6g}$$

s'interprète maintenant comme la fonc. gén. des quadrangulations avec origine et une arête marquée



$$\text{In}[1]:= \mathbf{g} = \frac{1}{12} (1 + \epsilon^2); \mathbf{V} = \frac{1}{6} (1 + \mathbf{i} \epsilon); \mathbf{x} = \mathbf{x} /. \text{Solve}\left[\left(\mathbf{x} + \frac{1}{\mathbf{x}}\right) == \frac{\mathbf{g} - \mathbf{V}^2}{\mathbf{V}^2}, \mathbf{x}\right][[1]];$$

$$\mathbf{Ri} := \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{g}} \frac{(1 - \mathbf{x}^{\mathbf{i}}) (1 - \mathbf{x}^{\mathbf{i}+3})}{(1 - \mathbf{x}^{\mathbf{i}+2}) (1 - \mathbf{x}^{\mathbf{i}+1})}; \text{Simplify}[\text{Series}[\mathbf{Ri}, \{\epsilon, 0, 3\}]]$$

$$\text{Out}[2]= \frac{2 \mathbf{i} (3 + \mathbf{i})}{2 + 3 \mathbf{i} + \mathbf{i}^2} + \frac{\mathbf{i} (-6 + 25 \mathbf{i} + 18 \mathbf{i}^2 + 3 \mathbf{i}^3) \epsilon^2}{5 (2 + 3 \mathbf{i} + \mathbf{i}^2)} +$$

$$\frac{\mathbf{i} \mathbf{i} (12 + 130 \mathbf{i} + 219 \mathbf{i}^2 + 149 \mathbf{i}^3 + 45 \mathbf{i}^4 + 5 \mathbf{i}^5) \epsilon^3}{35 (2 + 3 \mathbf{i} + \mathbf{i}^2)} + O[\epsilon]^4$$

$$\text{In}[3]:= \mathbf{d}[\mathbf{i}_] := \mathbf{i} \frac{\mathbf{i} (12 + 130 \mathbf{i} + 219 \mathbf{i}^2 + 149 \mathbf{i}^3 + 45 \mathbf{i}^4 + 5 \mathbf{i}^5)}{35 (2 + 3 \mathbf{i} + \mathbf{i}^2)};$$

$$\text{Factor}\left[4 \frac{\mathbf{d}[\mathbf{i}] - \mathbf{d}[\mathbf{i} - 1]}{\mathbf{d}[\mathbf{1}]}\right]$$

$$\text{Out}[4]= \frac{6 (-1 + 2 \mathbf{i} + \mathbf{i}^2) (4 + 14 \mathbf{i} + 27 \mathbf{i}^2 + 20 \mathbf{i}^3 + 5 \mathbf{i}^4)}{35 \mathbf{i} (1 + \mathbf{i}) (2 + \mathbf{i})}$$

# Nombre moyen de voisins

Le **nombre moyen**  $\langle e_i \rangle$  d'arêtes à distance géodésique  $i$  (c.à.d.  $i - 1 \leftrightarrow i$ ) dans les **quadrangulations infinies** vaut

$$\frac{\langle e_i \rangle}{\langle e_1 \rangle} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(R_i - R_{i-1})|g^n}{R_1|g^n}$$

avec  $\langle e_1 \rangle = 4$  d'après la relation d'Euler

$$\langle e_i \rangle = \frac{6}{35} \frac{(i^2 + 2i - 1)(5i^4 + 20i^3 + 27i^2 + 14i + 4)}{i(i + 1)(i + 2)}$$

$$\underset{\sim}{i \rightarrow \infty} \frac{6}{7} i^3$$

→ dimension fractale  $d_F = 4$

Le **nombre moyen**  $\langle v_i \rangle$  de vertex à distance géodésique  $i$  dans les **quadrangulations infinies** est donné par

$$\langle v_i \rangle = \frac{3}{35} ((i + 1)(5i^2 + 10i + 2) + \delta_{i,1})$$

$$\underset{i \rightarrow \infty}{\sim} \frac{3}{7} i^3$$

premières valeurs:

$$\langle e_1 \rangle = 4 \quad \langle e_2 \rangle = 19 \quad \langle e_3 \rangle = \frac{1234}{25}$$

$$\langle v_1 \rangle = 3 \quad \langle v_2 \rangle = \frac{54}{5} \quad \langle v_3 \rangle = \frac{132}{5}$$

# Limite d'échelle

A partir de la solution

$$R_i = R \frac{u_i u_{i+3}}{u_{i+1} u_{i+2}}, \quad R = \frac{1}{1 - 3gR}, \quad u_i = 1 - x^i, \quad x + \frac{1}{x} = \frac{1 - gR^2}{gR^2}$$

on obtient, à taille fixe  $n$ :

$$R_i|_{g^n} = \oint \frac{dg}{2i\pi g^{n+1}} R_i(g) = \oint \frac{dV(1 - 6V)}{2i\pi(V(1 - 3V))^{n+1}} R_i(g)$$

par changement de variable  $g \rightarrow V \equiv gR$

Pour  $n$  grand et  $i = rn^{1/4}$ , méthode du col:

$$V = \frac{1}{6} \left( 1 + i \frac{\xi}{\sqrt{n}} \right), \quad g = \frac{1}{12} \left( 1 + \frac{\xi^2}{n} \right)$$

$$x = e^{-\sqrt{6} \frac{\sqrt{-i\xi}}{n^{1/4}}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

et

$$R_i = 2 \left( 1 + \frac{i\xi}{\sqrt{n}} \mathcal{F}(r \sqrt{-i\xi}) \right)$$

où

$$\mathcal{F}(u) = 1 + \frac{3}{\sinh^2(\sqrt{3/2} u)}$$

d'où la limite à grand  $n$

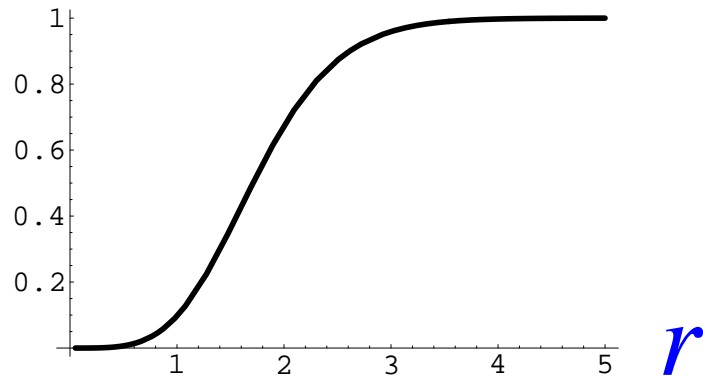
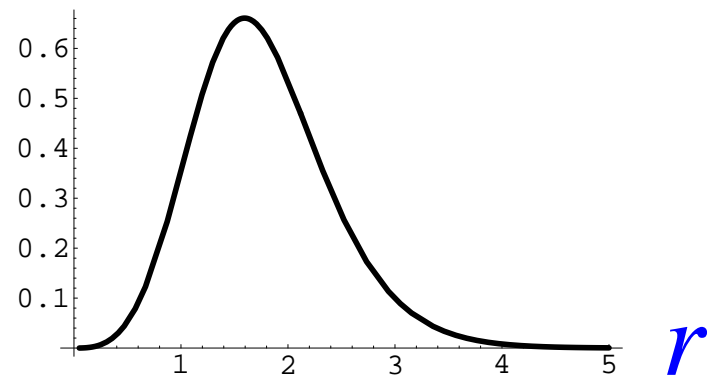
$$R_n|_{g^n} \sim 4 \frac{12^n}{\pi n^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \xi^2 e^{-\xi^2} \left( \mathcal{F}(r \sqrt{-i\xi}) \right)$$

Probabilité  $\Phi(r)$  pour un point (vertex ou arête) d'être à distance géodésique **inférieure** à  $r$ :

$$\Phi(r) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty d\xi \xi^2 e^{-\xi^2} \left\{ 1 - 6 \frac{1 - \cosh(r\sqrt{3\xi}) \cos(r\sqrt{3\xi})}{(\cosh(r\sqrt{3\xi}) - \cos(r\sqrt{3\xi}))^2} \right\}$$

Probabilité  $\rho(r)$  pour un point (vertex ou arête) d'être à distance géodésique égale à  $r$

$$\rho(r) = \frac{d\Phi(r)}{dr}$$

$\Phi(r)$  $\rho(r)$ 

$$\rho(r) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} \frac{3}{7} r^3, \quad \rho(r) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \exp\left(-\frac{3}{4} 3^{2/3} r^{4/3}\right)$$

en accord avec  $\langle v_i \rangle$  et la loi de Fisher  $\delta = \frac{4}{3} = \frac{1}{1-\nu}$  avec

$$\nu = \frac{1}{4} = \frac{1}{d_F}$$

# Arbres et étiquettes

La dimension fractale  $4$  des graphes est le produit de:

- la dimension  $2$  des arbres
  - la dimension  $2$  des étiquettes
- masse  $n$  (*nombre d'arêtes de l'arbre  $\equiv$  nombre de faces du graphe*)
  - génération  $T$  le long de l'arbre
  - étiquette  $i$  sur l'arbre ( *$\equiv$  distance sur le graphe*)



# Arbres et étiquettes

La dimension fractale 4 des graphes est le produit de:

- la dimension 2 des arbres
  - la dimension 2 des étiquettes
- masse  $n$  (nombre d'arêtes de l'arbre  $\equiv$  nombre de faces du graphe)
  - génération  $T$  le long de l'arbre
  - étiquette  $i$  sur l'arbre ( $\equiv$  distance sur le graphe)

$$T \sim n^{1/2}$$

# Arbres et étiquettes

La dimension fractale 4 des graphes est le produit de:

- la dimension 2 des arbres
- la dimension 2 des étiquettes
  - masse  $n$  (nombre d'arêtes de l'arbre  $\equiv$  nombre de faces du graphe)
  - génération  $T$  le long de l'arbre
  - étiquette  $i$  sur l'arbre ( $\equiv$  distance sur le graphe)

$$T \sim n^{1/2}, \quad i \sim T^{1/2}$$

# Arbres et étiquettes

La dimension fractale  $4$  des graphes est le produit de:

- la dimension  $2$  des arbres
  - la dimension  $2$  des étiquettes
- masse  $n$  (nombre d'arêtes de l'arbre  $\equiv$  nombre de faces du graphe)
  - génération  $T$  le long de l'arbre
  - étiquette  $i$  sur l'arbre ( $\equiv$  distance sur le graphe)

$$T \sim n^{1/2}, \quad i \sim T^{1/2}, \quad i \sim n^{1/4}$$

# Processus de branchement spatiaux

Un graphe aléatoires est la “superposition” de

# Processus de branchement spatiaux

Un graphe aléatoires est la “superposition” de

- un arbre planaire aléatoire

# Processus de branchement spatiaux

Un graphe aléatoires est la “superposition” de

- un arbre planaire aléatoire
- des étiquettes sur l’arbre

# Processus de branchement spatiaux

Un graphe aléatoires est la “superposition” de

- un arbre planaire aléatoire
- des étiquettes sur l’arbre
- condition aux limites (*étiquettes*  $\geq 1$ )

# Processus de branchement spatiaux

Un graphe aléatoires est la “superposition” de

- un arbre planaire aléatoire → arbre généalogique
- des étiquettes sur l'arbre
- condition aux limites (*étiquettes*  $\geq 1$ )

Un parent a  $k$  enfants avec probabilité

$$p(k) = (1 - p)p^k, \quad (\text{nombre moyen d'enfants } \frac{p}{1-p})$$



# Processus de branchement spatiaux

Un graphe aléatoires est la “superposition” de

- un arbre planaire aléatoire → arbre généalogique
- des étiquettes sur l’arbre → processus de diffusion à 1D
- condition aux limites (*étiquettes*  $\geq 1$ )

Un parent a  $k$  enfants avec probabilité

$$p(k) = (1 - p)p^k, \quad (\text{nombre moyen d'enfants } \frac{p}{1-p})$$

L’enfant d’un parent à position  $i$  vit à position  $i, i \pm 1$

# Processus de branchement spatiaux

Un graphe aléatoires est la “superposition” de

- un arbre planaire aléatoire → arbre généalogique
- des étiquettes sur l’arbre → processus de diffusion à 1D
- condition aux limites (étiquettes  $\geq 1$ ) → zone interdite

Un parent a  $k$  enfants avec probabilité

$$p(k) = (1 - p)p^k, \quad (\text{nombre moyen d'enfants } \frac{p}{1-p})$$

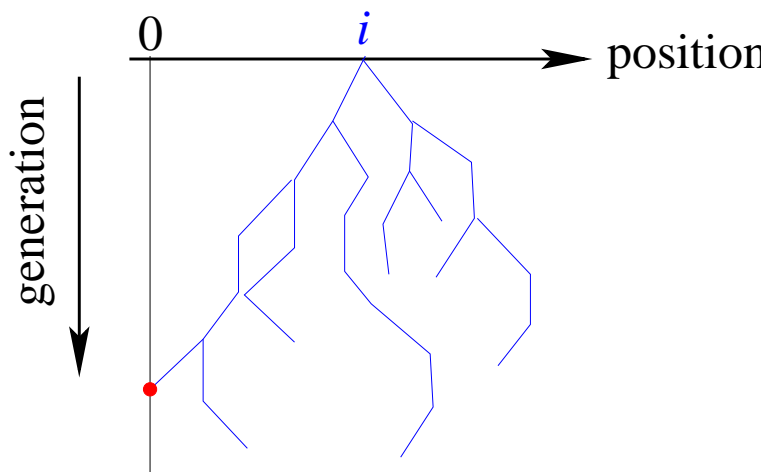
L’enfant d’un parent à position  $i$  vit à position  $i, i \pm 1$

Quelle est la probabilité  $\mathcal{P}_i(p)$  que la population dont le germe est à position  $i$  atteigne la position 0 ?

$$\mathcal{P}_i(p) = 1 - (1 - p)R_i(g) \text{ avec } g = \frac{p(1-p)}{3}$$

$$\mathcal{P}_i(p) = 1 - \frac{1 - |2p - 1|}{2p} \frac{(1 - x^i)(1 - x^{i+3})}{(1 - x^{i+1})(1 - x^{i+2})}$$

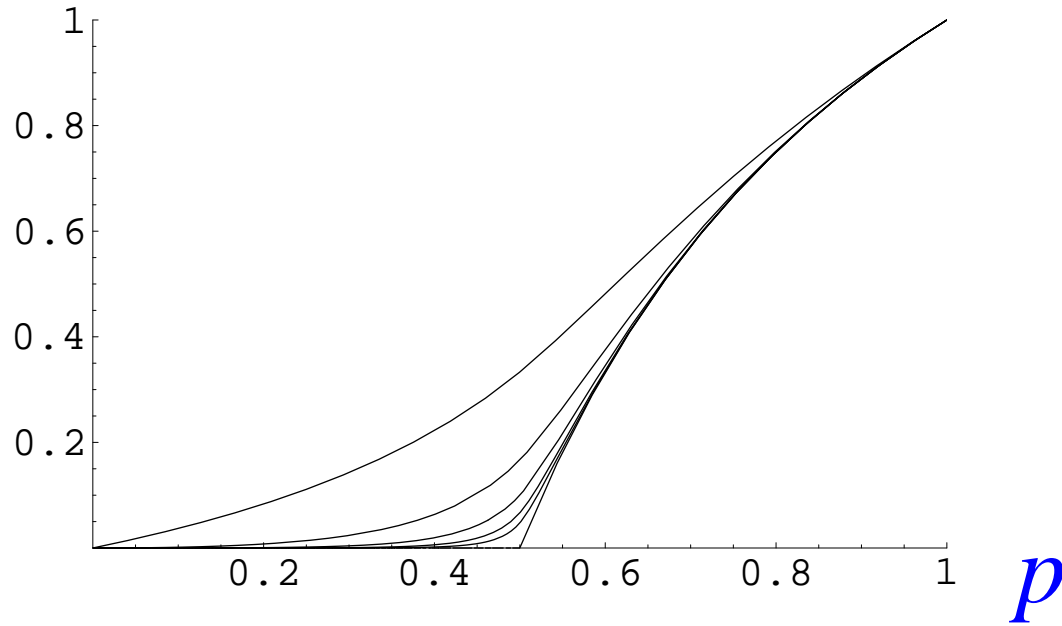
$$\text{avec } x = \frac{1 + 2|1 - 2p| - \sqrt{3|1 - 2p|} \sqrt{2 + |1 - 2p|}}{1 - |1 - 2p|}$$

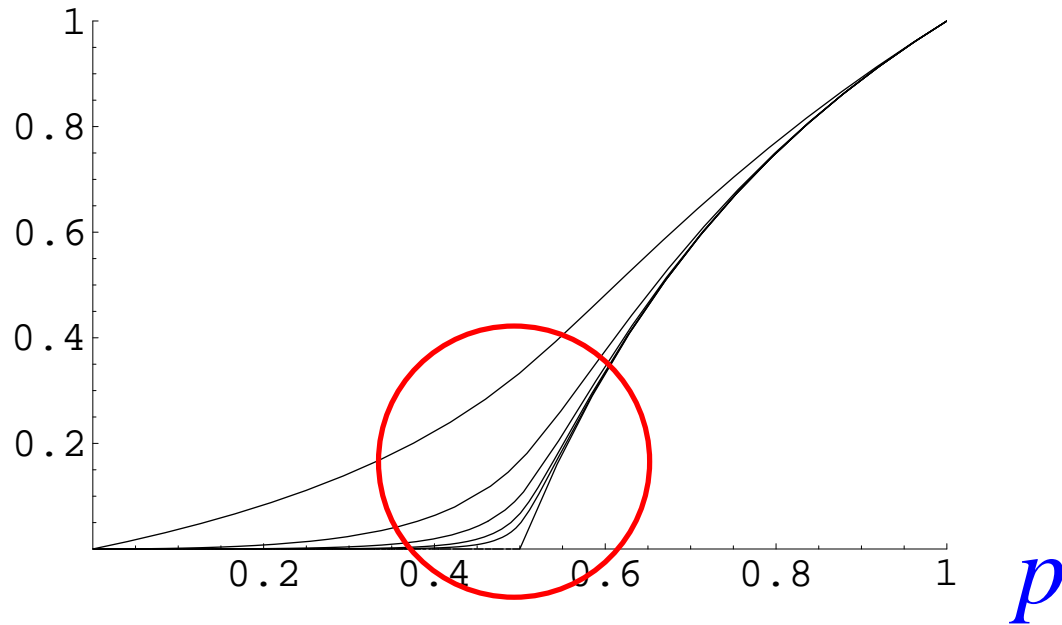


$\mathcal{P}_i(p) \stackrel{i \rightarrow \infty}{\sim} S(p)$ : probabilité de survie

$$S(p) = 1 - \frac{1 - |2p - 1|}{2p} = \begin{cases} 0 & p \leq \frac{1}{2} \\ \frac{2p-1}{p} & p \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$P_i(p)$



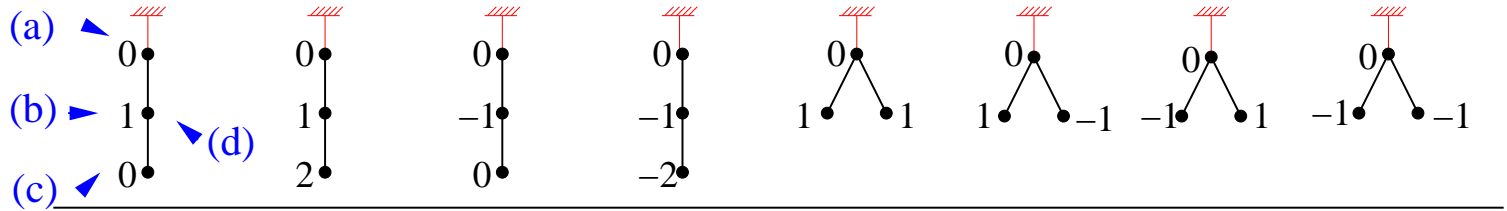
$\mathcal{P}_i(p)$ 

comportement d'échelle autour de  $p = \frac{1}{2}$ :

$$\mathcal{P}_i(p) \sim |2p - 1| \left( \frac{3}{\sinh^2(\sqrt{3/2} |2p - 1|^{1/2})} + 1 \right) + (2p - 1)$$

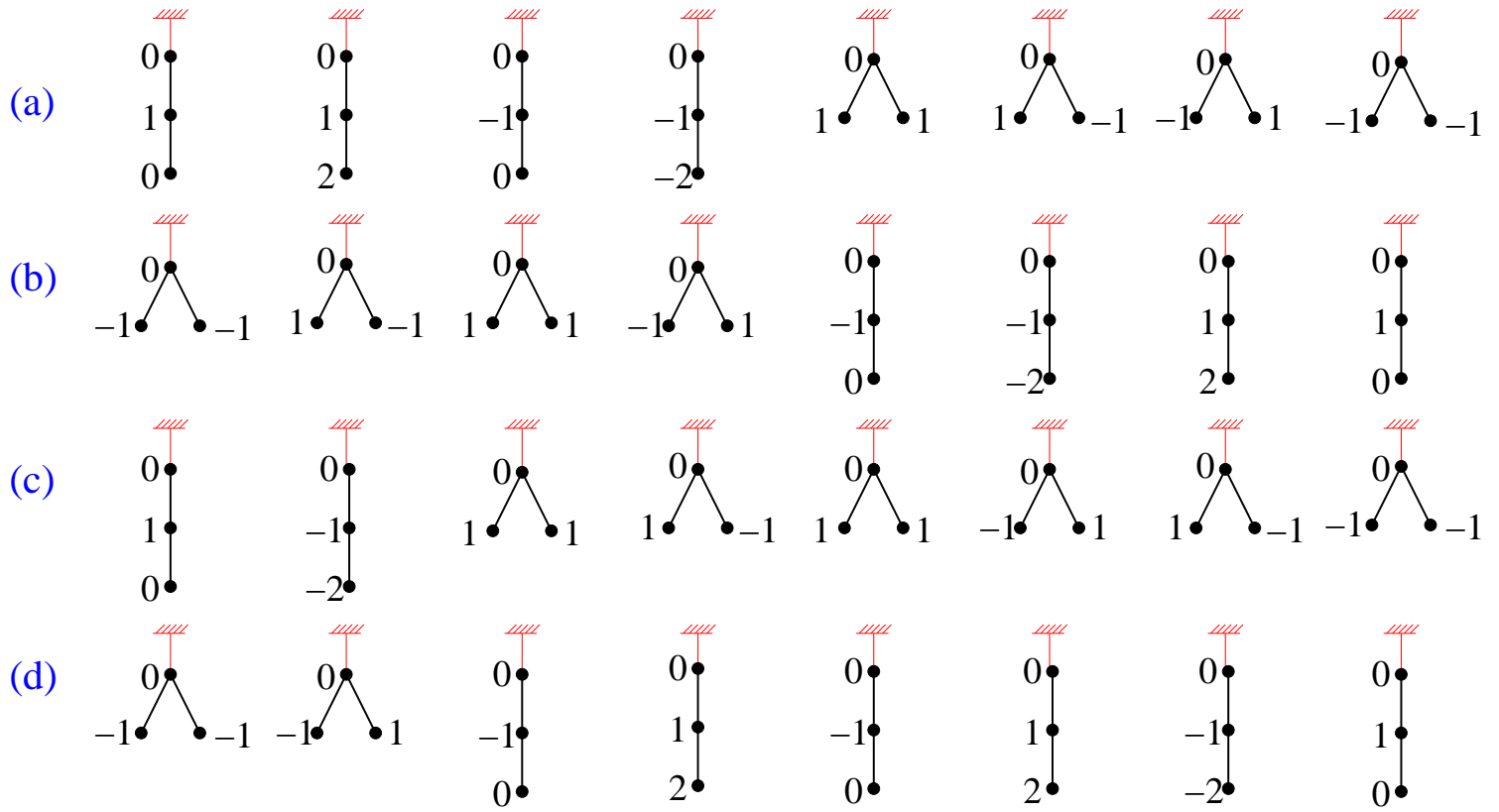
# Réénracinement

proba  $1/8$   
par arbre



choix d'un coin  
uniformement  
(proba  $1/4$ )  
et  
réénracinement

proba  $1/32$   
par configuration

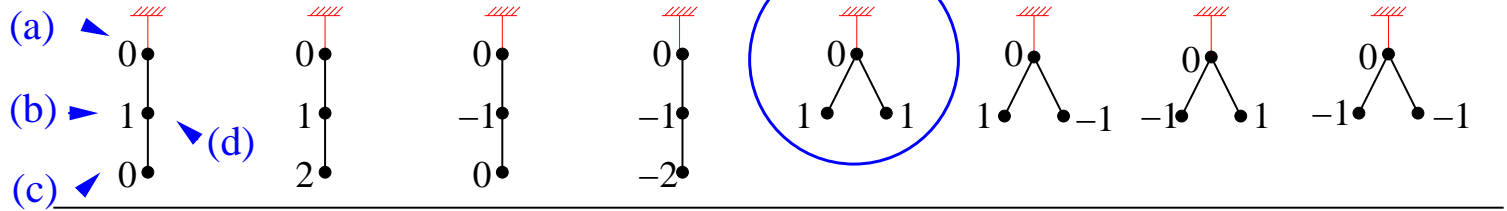


regroupement

on retrouve la même loi de proba sur les arbres

# Réénracinement

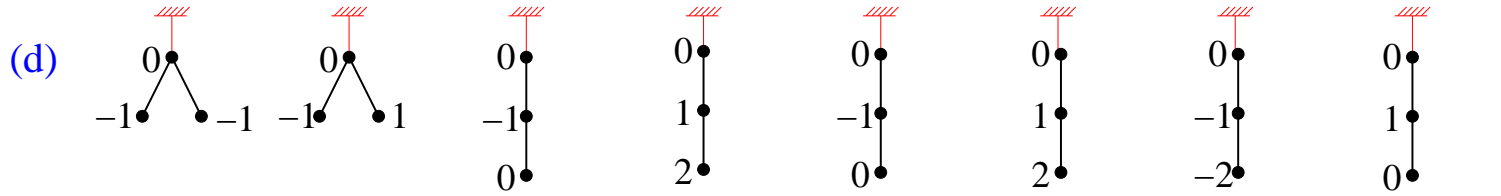
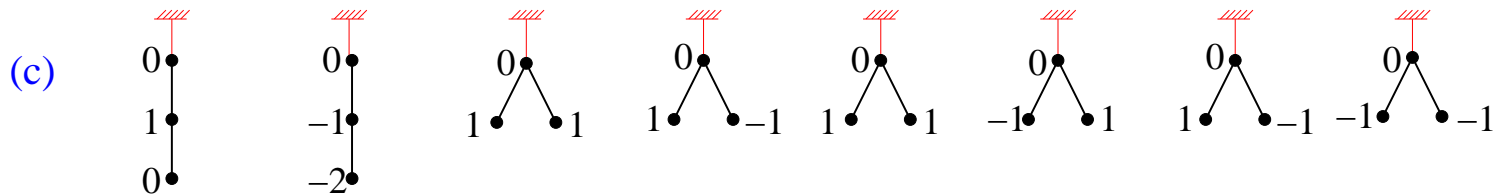
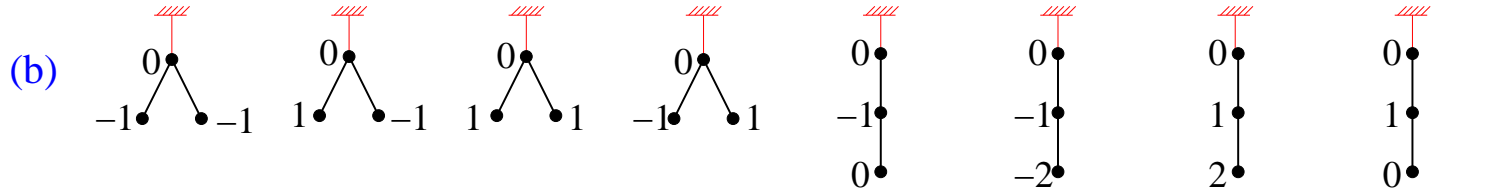
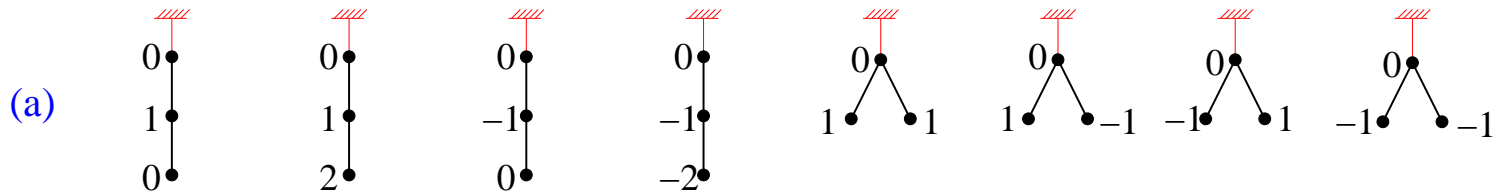
proba  $1/8$   
par arbre



choix d'un coin  
uniformement  
(proba  $1/4$ )  
et  
réénracinement



proba  $1/32$   
par configuration



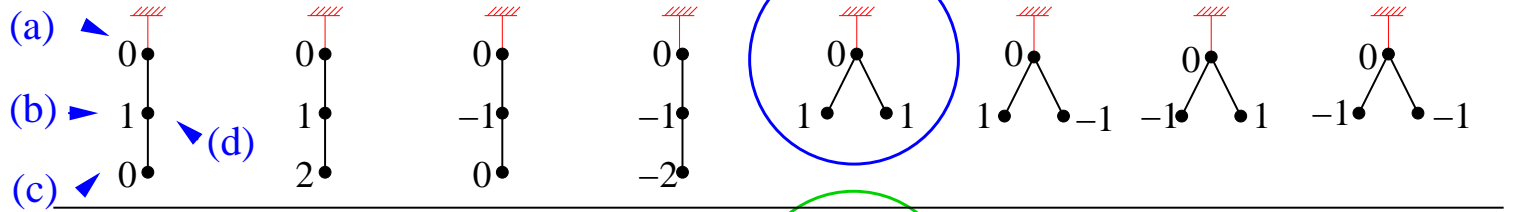
regroupement



on retrouve la même loi de proba sur les arbres

# Réénracinement

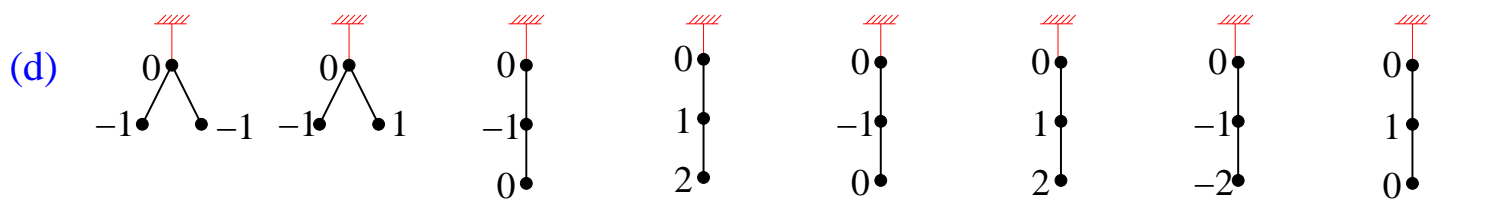
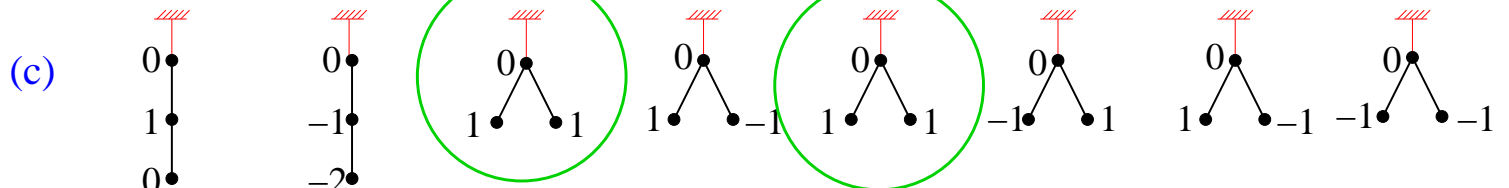
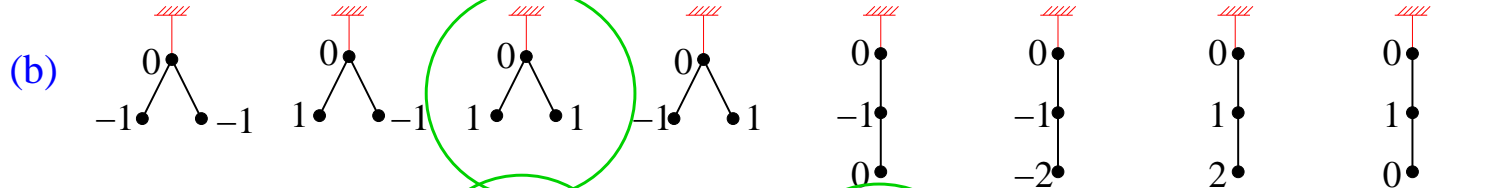
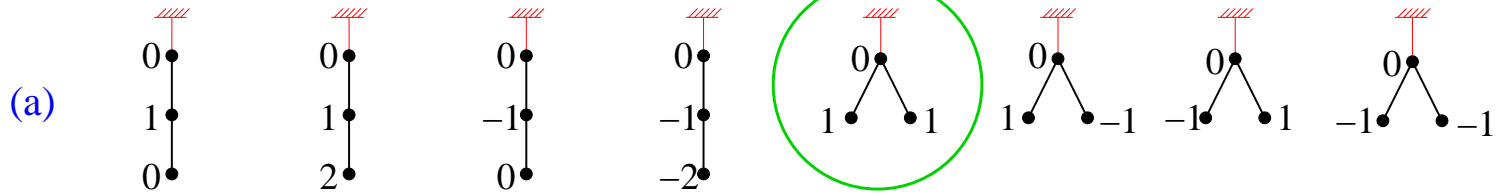
proba  $1/8$   
par arbre



choix d'un coin  
uniformement  
(proba  $1/4$ )  
et  
réénracinement



proba  $1/32$   
par configuration



regroupement



on retrouve la même loi de proba sur les arbres